সূচীপত্র

পৃষ্ঠা

প্রথম অধ্যায়

উপক্রমণিকা 1

দ্বিতীয় অধ্যায়

সংজ্ঞাপ্রকরণ 5

তৃতীয় অধ্যায়

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা ও ঋণরাশি 26

চতুর্থ অধ্যায়

সাধারণ চারটি নিয়ম 40

পঞ্চম অধ্যায়

সাংকেতিক বাক্য- ও সূত্র-গঠন 58

বিবিধ প্রশ্নমালা I 70

ষষ্ঠ অধ্যায়

বিশেষ গুণফলের সূত্রাবলী 76

পৃষ্ঠা

সপ্তম অধ্যায়

সহজ সরল সমীকরণ 94

অষ্টম অধ্যায়

বিন্দু অঙ্কন ও লেখাবলী 108
বিবিধ প্রশ্নমালা II 121

নবম অধ্যায়

দুরূহ যোগ ও বিয়োগ 126

দশম অধ্যায়

দুরূহ গুণন ও ভাগ 147
বিবিধ প্রশ্নমালা III 183

একাদশ অধ্যায়

সাধারণ সূত্র 187

দ্বাদশ অধ্যায়

সরল গুণনীয়ক এবং অভেদ 200

ত্রয়োদশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক ... 218

চতুর্দশ অধ্যায়

সরল ভগ্নাংশ 234

পঞ্চদশ অধ্যায়

দুরূহ সরল সমীকরণ 247

পৃষ্ঠা

ষোড়শ অধ্যায়

সরল সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী 263
বিবিধ প্রশ্নমালা IV 275

সপ্তদশ অধ্যায়

দুরূহ সূত্রাবলী 282

অষ্টাদশ অধ্যায়

দুরূহ গুণনীয়ক ও অভেদাবলী 297

ঊনবিংশ অধ্যায়

ভাগশেষ উপপাদ্য এবং বিভাজ্যতা 325

বিংশ অধ্যায়

দুরূহ গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. 335

একবিংশ অধ্যায়

দুরূহ ভগ্নাংশ 343

দ্বাবিংশ অধ্যায়

একঘাত সহ-সমীকরণ 368

ত্রয়োবিংশ অধ্যায়

একঘাত সহ-সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী 403

চতুর্বিংশ অধ্যায়

লৈখিক চিত্র 417

পৃষ্ঠা

পঞ্চবিংশ অধ্যায়

অনুপাত এবং সমানুপাত 454
বিবিধ প্রশ্নমালা V 489

ষড়্‌বিংশ অধ্যায়

সূচক-প্রকরণ 493

সপ্তবিংশ অধ্যায়

অবঘাতন, বর্গমূল 513

অষ্টাবিংশ অধ্যায়

করণী 525

ঊনত্রিংশ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ 555

ত্রিংশ অধ্যায়

দ্বিঘাত অপেক্ষকের লেখ 583

একত্রিংশ অধ্যায়

প্রগতি 604

দ্বাত্রিংশ অধ্যায়

বিবিধ উপপাদ্যমালা 638
বিবিধ প্রশ্নমালা VI 653

উত্তরমালা 677

বীজগণিত-প্রবেশিকা

প্রথম অধ্যায়

উপক্রমণিকা

1. বীজগণিত

পাটীগণিত (Arithmetic) পড়িয়া সংখ্যাসম্বন্ধে (number) অনেক তথ্য জানিতে পারা যায়। সংখ্যাসম্বন্ধে ব্যাপকভাবে আলোচনা করিবার আর একটি শাস্ত্র (সংখ্যা-বিজ্ঞান) আছে, তাহার নাম "বীজগণিত" বা "Algebra." ইহাকে "নিখিল পাটীগণিত"ও (Universal Arithmetic)* বলা হইত। বীজগণিত ও পাটীগণিতের মধ্যে একটি প্রভেদ এই যে, পাটীগণিতের সংখ্যাসমূহ ১, ২, ৩, ৪ প্রভৃতি অঙ্কদ্বারা লিখিত হয়, কিন্তু বীজগণিতে সংখ্যাসমূহ প্রকাশ করিতে ১, ২, ৩, ৪ প্রভৃতি অঙ্ক এবং ক, খ, গ, ঘ, a, b, c, d প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষর (letters), উভয়ই ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এইরূপ ব্যবহারের ফলে পাটীগণিত-লব্ধ জ্ঞান বীজগণিতে আরও ব্যাপকভাবে প্রয়োগ করা যায়। বীজগণিতের আর একটি সুবিধা এই যে, পাটীগণিতের বহু নিয়ম ও প্রণালী অতি সংক্ষেপে লেখা যায় এবং অতি সহজে ও অল্প সময়ে অনেক দুরূহ প্রশ্নের সমাধান করা যাইতে পারে। গণিতের সংখ্যা এবং নিয়মাদি ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয় বলিয়া বীজগণিতের সাহায্যে সংখ্যাসম্বন্ধে এমন অনেক তথ্য জানা যায় যাহা সাধারণত পাটীগণিতের দ্বারা সম্ভবপর হয় না।

* নিউটনের (Newton) সময়ে বীজগণিতকে নিখিল পাটীগণিত (Universal Arithmetic) বলা হইত।

পাটীগণিতের সংখ্যাসমূহ বাংলায় ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ ও ০ (ইংরেজিতে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ও 0) এই দশটি অঙ্কদ্বারা লিখিত হয়। কিন্তু বীজগণিতে সংক্ষেপে সংখ্যাসমূহ প্রকাশ করিবার জন্য ক, খ, গ, ঘ প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষরগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। লিখিবার সুবিধার জন্য এই পুস্তকে ক, খ, গ, ঘ প্রভৃতি বাংলা বর্ণমালার পরিবর্তে a, b, c, d……. x, y, z প্রভৃতি ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষরগুলি সংখ্যার প্রতীকরূপে (symbols of numbers) ব্যবহৃত হইবে।

পাটীগণিতে প্রত্যেক অঙ্কের একটি নির্দিষ্ট মান (value) আছে। কিন্তু বীজগণিতে ব্যবহৃত সাংকেতিক অক্ষরগুলির কোন নির্দিষ্ট মান নাই। ইহাদের প্রত্যেকটির যে-কোন মান ধরা যাইতে পারে এবং প্রত্যেক অক্ষরই যে-কোন সংখ্যার পরিবর্তে ব্যবহৃত হইতে পারে। তবে মনে রাখিতে হইবে যে, একবার কোন অক্ষরের একটি নির্দিষ্ট মান ধরিয়া লইলে একই প্রশ্ন বা সমাধানের মধ্যে সর্বদা সেই অক্ষরটির সেই মানই বুঝিতে হইবে।

মন্তব্য। বীজগণিতে ব্যবহৃত সাংকেতিক অক্ষরগুলিকে "বীজগণিতীয় বা বৈজিক সংখ্যা" এবং পাটীগণিতে ব্যবহৃত অঙ্কগুলিকে "পাটীগণিতীয় বা পাটীক সংখ্যা" বলা যাইতে পারে।

2. বীজগণিতে পাটীগণিতের নিয়মাদির ব্যবহার

উদাহরণ 1. পাটীগণিতে সংখ্যাসম্বন্ধে যে সকল নিয়মাদি প্রচলিত আছে বীজগণিতে সেই সকল নিয়ম আরও ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

যেমন, $3+4=7$ এবং $4+3=7$, অর্থাৎ 3 এবং 4 এই দুইটি অঙ্ককে যে-কোন পর্যায়ে যোগ করিলে উহাদের সমষ্টি 7 হইবে।

এই নিয়মটি যে-কোন দুইটি সংখ্যার পক্ষেই প্রযোজ্য। যদি 3 এর পরিবর্তে x এবং 4 এর পরিবর্তে y লেখা যায়, তবে উপরিলিখিত নিয়মানুসারে দেখা যায়, $x+y=y+x$, অর্থাৎ **যে-কোন দুইটি সংখ্যার প্রথমটির সহিত দ্বিতীয়টি যোগ করিলে যে সমষ্টি পাওয়া যায়, দ্বিতীয়টির সহিত প্রথমটি যোগ করিলেও সেই সমষ্টিই পাওয়া যাইবে।** এস্থলে দেখা যাইতেছে, $3+4=4+3$ অপেক্ষা $x+y=y+x$ এর ব্যবহার আরও ব্যাপক। কারণ এই শেষোক্ত নিয়মটিতে x এবং y এর যে-কোন মানই

ধরা যাইতে পারে। x এবং y এর বিভিন্ন মান নির্দেশ করিয়া দেখা যায় যে, $2+3=3+2$, $4+5=5+4$ প্রভৃতি সমস্তই $x+y=y+x$ এই একটিমাত্র বাক্যের (statement) অন্তর্ভুক্ত। সুতরাং $x+y=y+x$ একটি সাধারণ ব্যাপক নিয়ম। ইহা যে-কোন দুইটি সংখ্যার পক্ষেই প্রযোজ্য।

উদাহরণ 2. পাটীগণিতের অনেক নিয়ম বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায়।

মনে কর, একখানা রেল গাড়ি 4 ঘণ্টা সময়ে 80 মাইল পথ অতিক্রম করিল। পাটীগণিতের নিয়মানুসারে উহার বেগ ঘণ্টা প্রতি $80 \div 4 = 20$ মাইল।

অর্থাৎ,
$$\text{বেগ} = \frac{\text{অতিক্রান্ত পথ}}{\text{অতিবাহিত সময়}};$$
ইহার অর্থ এই যে, কোনও দূরত্ব অতিক্রম করিতে যত সময় (ঘণ্টা) লাগে, দূরত্বের পরিমাণকে সময়ের (ঘণ্টার) পরিমাণ দিয়া ভাগ করিলে ঘণ্টাপ্রতি বেগ নির্ণীত হইয়া থাকে।

সাংকেতিক অক্ষরের সাহায্যে উপরিলিখিত নিয়মটিকে সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায়। যদি অতিক্রান্ত দূরত্বের পরিবর্তে S, অতিবাহিত সময়ের (ঘণ্টার) পরিবর্তে T এবং ঘণ্টাপ্রতি বেগের পরিবর্তে V ব্যবহার করা যায়, তবে উপরিলিখিত নিয়মটিকে $V = \frac{S}{T}$ লেখা যাইতে পাবে। এই সংক্ষেপে লিখিত নিয়মটি সহজে মনে রাখা যায় এবং এইরূপ সাধারণভাবে প্রকাশিত নিয়মকে সূত্র (Formula) বলে। ইহার দ্বারা V, S, T—এই তিনটি সংখ্যার মধ্যে একটি সম্বন্ধ স্থাপিত হইল। ইহাদের যে-কোন দুইটি জানা থাকিলে তৃতীয়টি নির্ণয় করা যায়। এইরূপ সূত্রেব ব্যবহার-দ্বারা অনেক অনাবশ্যক গণনা ও পুনরুক্তি হইতে নিষ্কৃতি পাওয়া যায়।

3. ঐতিহাসিক মন্তব্য

ভারতবাসীর পক্ষে একটি বিশেষ গৌরবের বিষয় এই যে, বর্তমানে বীজগণিত নামে পরিচিত সংখ্যা-বিজ্ঞানটি তাহাদেরই পূর্বপুরুষদের মস্তিষ্ক-প্রসূত। পুরাকালে হিন্দুজ্যোতির্বিদ্‌গণ বহুবিধ কাল্পনিক প্রশ্নের সমাধান করিতেন। তাহারই কতকগুলি বর্তমানে বীজগণিতের অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে। সেই সকল

খ্যাতনামা হিন্দুজ্যোতির্বিদ্‌গণের মধ্যে সর্বপ্রথম আর্যভট (৫২৫ খ্রীঃ অঃ) পাটনায় জন্মগ্রহণ করেন। তারপর উজ্জয়িনীর ব্রহ্মগুপ্ত (৬৫০ খ্রীঃ অঃ) বিশেষ খ্যাতিলাভ করেন। মহিসূরের প্রথিতনামা মহাবীরাচার্য বীজগণিত-শাস্ত্রে বিশেষ পারদর্শী ছিলেন। ইহার পর আরও দুইজন পণ্ডিত—শ্রীধরাচার্য ও পদ্মনাভ—গণিত-শাস্ত্রে অসামান্য কৃতিত্ব প্রদর্শন করিয়া গিয়াছেন।

এই বিজ্ঞানক্ষেত্রে ইউরোপীয়গণের আবির্ভাবের বহুপূর্বে শেষ হিন্দুজ্যোতিষী ভাস্করাচার্য (১১৫০ খ্রীঃ অঃ) এই শাস্ত্রে বিশেষ কৃতিত্বের পরিচয় দিয়াছিলেন। তৎকৃত পাটীগণিত তাঁহার কন্যা লীলাবতীর নামানুসারে "লীলাবতী" নামে পরিচিত এবং বীজগণিতও (Algebra) উক্ত নামেই পরিচিত। আশ্চর্যের বিষয় এই যে, উক্ত মহাপুরুষগণ সকলেই জ্যোতিষশাস্ত্রজ্ঞ এবং জ্যোতিষ-শাস্ত্রের সাহায্যার্থেই বীজগণিতের অনুশীলন ও উন্নতিসাধন করিয়াছিলেন। তাঁহাদের এই পুস্তকাদি সমস্তই সংস্কৃত ভাষায় ছন্দোবদ্ধ আকারে লিখিত।

ইতিমধ্যে আরবীয়গণও বীজগণিতের কতক উন্নতিসাধন করেন। Md. ibn Musa Alkhowari Zmi "Al-jabrwa'l Muquabalah" নামক একখানি বীজগণিত প্রণয়ন করেন। Pisa-নিবাসী Leonardo Bonacci ১২০০ খ্রীষ্টাব্দে উহা ইতালি দেশে প্রচার করেন এবং "Algebra," "Almucabela," "Mucabel" প্রভৃতি নামে পরিচিত হয়। এই পণ্ডিত Bonacci-র চেষ্টায় বীজগণিত—বিশেষত হিন্দুদিগের প্রবর্তিত সংখ্যালিখন-পদ্ধতি—ইউরোপে প্রথম প্রচারিত হয় এবং Robert Recorde নামক একজন চিকিৎসক প্রথমে ১৫৫৭ খ্রীষ্টাব্দে উহা ইংলণ্ডে প্রচার করেন। বর্তমান বীজগণিতে ব্যবহৃত সংকেতাদি অপেক্ষাকৃত আধুনিক। বিখ্যাত ফরাসি গণিতজ্ঞ Descartes (১৬৩৭ খ্রীঃ অঃ) অজ্ঞাত রাশির পরিবর্তে x, y, z প্রভৃতি এবং ধ্রুবক বা জ্ঞাত রাশির পরিবর্তে a, b, c প্রভৃতি অক্ষরের ব্যবহারের প্রথা প্রথমে প্রবর্তিত করেন।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সংজ্ঞাপ্রকরণ (Definitions)

4. রাশি এবং উহার পরিমাণ (Magnitude and Quantity)

যাহার পরিমাণ করা যায়, অর্থাৎ সমজাতীয় বস্তুর সহিত তুলনা করিয়া যাহার পরিমাণ নির্ধারণ করা যায়, তাহাকে **রাশি** (quantity বা magnitude) বলে।

যথা, ওজন, দূরত্ব, সময় ইত্যাদি-বোধক শব্দ এক একটি রাশি। কারণ ইহাদের প্রত্যেকটিরই পরিমাণ আছে।

বীজগণিতে রাশি শব্দটি কোন খণ্ড বা অখণ্ড সংখ্যা অর্থেও ব্যবহৃত হইয়া থাকে। ধন, দৈর্ঘ্য, গুরুত্ব প্রভৃতি পরিমেয় রাশিগুলিকে **বদ্ধ** রাশি (concrete quantity) এবং সাধারণ সংখ্যাগুলিকে **শুদ্ধ** রাশি (abstract quantity) বলে।

5. সাংখ্যমান (Measure), একক (Unit)

কোন রাশির পরিমাণ জানিতে হইলে সমজাতীয় আর একটি নির্দিষ্ট রাশি উহার ভিতর কতবার আছে তাহাই নির্ণয় করা হয়। যে নির্দিষ্ট রাশিটির সহিত তুলনা করিয়া উক্ত রাশির পরিমাণ নির্ণয় করা হয় তাহাকে **একক রাশি** (unit quantity) বা সংক্ষেপে **একক** (unit) বলা হয়। কোন রাশির মধ্যে তাহার এককটি যতবার আছে, তাহাকে সেই রাশির **সাংখ্যমান** (measure) বলে।

যেমন, মনে কর, একখানি কাপড়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। যদি এক গজকে দৈর্ঘ্যের নির্দিষ্ট রাশি বলিয়া ধরা হয় এবং কাপড়খানি দৈর্ঘ্যে দুইখণ্ড এক গজ কাপড়ের সমান হয়, তাহা হইলে কাপড়খানির দৈর্ঘ্যের পরিমাণ দুই গজ। এখানে এক গজকে (দৈর্ঘ্যের) 'একক' এবং 'দুই' সংখ্যাটিকে 'দুই গজ' রাশিটির 'সাংখ্যমান' বলা হয়। এইরূপ, এক ফুটকে দৈর্ঘ্যের নির্দিষ্ট রাশি ধরিলে, কাপড়খানির দৈর্ঘ্য 6 ফুট হইবে। এস্থলে 'এক ফুট'কে দৈর্ঘ্যের 'একক'

এবং '6' সংখ্যাটিকে '6 ফুট' রাশিটির 'সাংখ্যমান' বলা হয়। আবার, 3 ইঞ্চিকে একক ধরিলে কাপড়খানির দৈর্ঘ্যের সাংখ্যমান 24 হইবে।

6. **বীজগণিতীয় চিহ্ন বা প্রতীক** (Algebraic Symbols)

সংখ্যা বুঝাইবার জন্য a, b, c, x, y, z প্রভৃতি বর্ণমালার যে সকল অক্ষর ব্যবহৃত হয় এবং $+, -, \times, \div, =$ প্রভৃতি যে সকল চিহ্ন-সহযোগে ইহাদের পরস্পরের মধ্যে সম্বন্ধ প্রকাশিত হয়, অথবা গণিতের কোন ক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হয়, তাহাদিগকে বীজগণিতীয় চিহ্ন বা প্রতীক (algebraic symbols) বলে। গণিতের $+$, $-$ প্রভৃতি ক্রিয়াবাচক চিহ্নসমূহ হইতে পার্থক্য-নির্দেশ করিবার জন্য a, b, c প্রভৃতি অক্ষর ও অঙ্কগুলিকে **প্রতীক** (symbols of quantity) বলা হয়।

7. যোগ চিহ্ন (+)

দুইটি সংখ্যার মধ্যে অবস্থিত '+' চিহ্নটির দ্বারা বুঝা যায় যে, দ্বিতীয় সংখ্যাটি প্রথম সংখ্যাটির সহিত যোগ করিতে হইবে। যথা, '$x+y$' দ্বারা বুঝা যায় যে, y যে-সংখ্যাটির পরিবর্তে ব্যবহৃত হইয়াছে তাহাকে x যে-সংখ্যাটির পরিবর্তে ব্যবহৃত হইয়াছে তাহার সহিত যোগ করিতে হইবে। যোগফলকে x ও y এর সমষ্টি বলা হয়। '$x+y$' কে "x যুক্ত y" এইরূপে পড়িতে হয়।

যদি x দ্বারা 2 এবং y দ্বারা 3 সূচিত হয়, তাহা হইলে $x+y=2+3=5$ বুঝিতে হইবে।

মন্তব্য। $2+3=5$ অপেক্ষা $x+y=5$ অধিকতর ব্যাপক; কারণ এস্থলে x এবং y এর পরিবর্তে এমন যে-কোন দুইটি সংখ্যা ব্যবহার করা যায় যাহাদের সমষ্টি 5. যথা, $x+y=1+4=2+3=5$ ইত্যাদি।

উদাহরণ। যদি রামের x টি মার্বেল থাকে এবং হরির y টি মার্বেল থাকে তবে তাহাদের দুইজনের একত্র $x+y$ টি মার্বেল হইবে। এস্থলে, x এবং y যে-কোন দুইটি সংখ্যার পরিবর্তেই ব্যবহৃত হইতে পারে। যথা, $x=5$, $y=7$, $x+y=12$; $x=9$, $y=21$, $x+y=30$. এইরূপ, x এবং y এর যে-কোন মান (value) ধরা যাইতে পারে।

মন্তব্য। x এর মান (value) 5 ধরিলে সর্বত্রই যে 5 ধরিতে হইবে তাহা নহে। শুধু যে স্থলে 5 ধরা হইবে সেই স্থলেই উহার মান 5, কিন্তু অন্যত্র যে-কোন মান ধরা যাইতে পারে।

8. বিয়োগ চিহ্ন (−)

দুইটি সংখ্যার মধ্যে '−' চিহ্নটি থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, দ্বিতীয় সংখ্যাটি প্রথম সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিতে হইবে। যথা, $x-y$; ইহাকে "x বিযুক্ত y" এইরূপে পড়িতে হইবে। ইহার দ্বারা এই বুঝায় যে, x অক্ষর-দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি হইতে y অক্ষর-দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি বিয়োগ করিতে হইবে। যদি $x=7$ এবং $y=5$ হয়, তাহা হইলে $x-y=7-5=2$. কিন্তু এই শেষোক্ত "$x-y=2$" বাক্যটি অধিকতর ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হইল, কারণ x এবং y এর পরিবর্তে এমন যে-কোনও দুইটি সংখ্যা ব্যবহার করা যাইতে পারে যাহাদের বিয়োগফল 2 হয়। যথা, $x-y=8-6=12-10$ ইত্যাদি।

মন্তব্য। পাটীগণিতে শুধু একটি বৃহত্তর সংখ্যা হইতে একটি লঘুতর সংখ্যা বিয়োগ করা যায়। কিন্তু বীজগণিতে y অপেক্ষা x বৃহত্তর না হইলেও x হইতে y বিয়োগ করা যায় এবং বিয়োগফল সর্বদা "$x-y$" এইরূপে লিখিত হয়। এ সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা তৃতীয় অধ্যায়ে করা হইবে।

9. গুণন চিহ্ন (×)

দুইটি সংখ্যার মধ্যে '×' চিহ্নটি থাকিলে বুঝিতে হইবে যে প্রথম সংখ্যাটিকে দ্বিতীয় সংখ্যাটিব দ্বারা গুণ করিতে হইবে। যথা, $x \times y$ দ্বারা এই বুঝায় যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটির দ্বারা গুণ করিতে হইবে। গুণ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে x এবং y এর 'গুণফল' (product) বলে।

'×' চিহ্নের নাম 'গুণন' বা 'পূরণ' চিহ্ন (sign of multiplication). $x \times y$ কে 'x গুণিত y' এইরূপে পড়িতে হয়। যদি $x=3$ এবং $y=8$ হয়, তবে $x \times y=3 \times 8=24$. কিন্তু $x \times y$ বাক্যটি অধিকতর ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। কারণ x ও y এর পরিবর্তে এমন দুইটি সংখ্যা ব্যবহার করা যাইতে পারে যাহাদের গুণফল 24 হয়। যথা, $x \times y=2 \times 12=6 \times 4$ ইত্যাদি। বীজগণিতে '×' চিহ্নটি ব্যবহার না করিয়া ইহার স্থলে সাধারণত

একটি বিন্দু (·) ব্যবহার করা হয়। অনেক সময় '×' বা '·' ইহাদের কোনটিই ব্যবহৃত হয় না। যেমন, $x \times y$, $x.y$ এবং xy এই তিন প্রকারেই x এবং y এর গুণফল প্রকাশিত হইয়া থাকে।

মন্তব্য 1. গুণনের চিহ্ন-সম্পর্কে পাটীগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে অনেক পার্থক্য রহিয়াছে। পাটীগণিতে দুইটি অঙ্ক 2 এবং 5 পাশাপাশি লিখিলে 25 হয় এবং ইহার দ্বারা 2 দশক- ও 5 একক-বিশিষ্ট একটি সংখ্যা বুঝা যায়। কিন্তু বীজগণিতে দুইটি অঙ্ক x এবং y পাশাপাশি থাকিলে, x গুণিত y, অর্থাৎ x এবং y এর গুণফল বুঝা যায়। যে সংখ্যাটির প্রথম অঙ্ক x এবং দ্বিতীয় অঙ্ক y, তাহার অর্থ x-দশক যুক্ত y; ইহা $10x+y$ এইরূপে লিখিত হয়। পাটীগণিতের ন্যায় শুধু xy লিখিয়া উহা প্রকাশ করা যায় না। x এবং y এর 0 হইতে 9 পর্যন্ত বিভিন্ন মান ধরিয়া, $10x+y$ দ্বারা 1 হইতে 99 পর্যন্ত যে-কোন সংখ্যা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

মন্তব্য 2. যখন কোন অক্ষরকে কোন অঙ্কদ্বারা গুণ করা হয় তখন অঙ্কটিকে প্রথমে লিখিয়া অক্ষরটিকে পরে লিখিতে হয়। যেমন, '$x \times 2$' কে '$2x$' এইরূপে লিখিতে হয়; $x2$ এরূপে নয়। মনে রাখিতে হইবে যে, $2 \times x$, $2.x$ এবং $2x$ দ্বারা একই রাশি প্রকাশিত হয়।

10. ভাগ চিহ্ন (÷)

দুইটি সংখ্যার মধ্যে ' ÷ ' চিহ্নটি থাকিলে প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির দ্বারা ভাগ করিতে হইবে, ইহাই বুঝা যায়। যেমন, $x \div y$; ইহাকে 'x ভাজিত y' এইরূপে পড়িতে হয়; ইহার অর্থ এই যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটির দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। যদি y এর মান 12 এবং x এর মান 3 হয়, তাহা হইলে $x \div y$ এর মান $12 \div 3$, অর্থাৎ 4 হইবে। কিন্তু $x \div y$ দ্বারা আরও ব্যাপকভাবে এই বুঝা যায় যে, x এবং y এর মান এমন যে-কোন দুইটি সংখ্যা ধরা যাইতে পারে যাহাদের ভাগফল 4. যেমন, $x=16, y=4$; $x=32, y=8$ ইত্যাদি।

মন্তব্য 1. ভাজ্য এবং ভাজককে যথাক্রমে একটি রেখার উপরে ও নীচে লিখিয়া ভাগক্রিয়া প্রকাশিত হয়। যেমন, $\frac{x}{y}$ বা x/y; '/' চিহ্নটিকে 'solidus' বলে।

মন্তব্য 2. $+$, $-$, $\times$ ও $\div$ চিহ্নগুলিকে 'গাণিতিক ক্রিয়া-সূচক চিহ্ন' (signs of operation) বলা যাইতে পারে।

11. সাম্য চিহ্ন ('=' Sign of Equality)

দুইটি সংখ্যার মধ্যস্থ '=' চিহ্নটির দ্বারা বুঝা যায় যে, ঐ সংখ্যা দুইটির মান (value) পরস্পর সমান। যেমন, $x=y$; ইহাকে 'x সমিত y' এইরূপে পড়িতে হয় ; ইহার অর্থ এই যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটির সমান। যদি $x=3$ হয়, তাহা হইলে $y=3$. এইরূপে $x=y+x$ দ্বারা এই বুঝায় যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি y এবং x দ্বারা সূচিত সংখ্যা দুইটির সমষ্টির সমান।

দুইটি রাশি অভিন্ন বা সর্বতোভাবে সমান (identically equal)—ইহা বুঝাইবার জন্য '$\equiv$' এই চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়। যেমন, $x+1\equiv\frac{1}{2}(2x+2)$ দ্বারা এই বুঝায় যে, x এর মান যাহাই হউক $x+1$ এবং $\frac{1}{2}(2x+2)$এর মান সর্বদা সমান। '$\equiv$' চিহ্নটিকে 'অভেদ চিহ্ন' (sign of identity) বলা যাইতে পারে।

12. অন্যান্য চিহ্ন

উপরি উক্ত চিহ্নগুলি ব্যতীত পাটীগণিতে ও বীজগণিতে '$>$', '$<$', '$\ngtr$', '$\nless$', '$\neq$', '$\sim$' এবং '$\pm$' প্রভৃতি আরও কতকগুলি চিহ্ন ব্যবহৃত হইয়া থাকে। যথা, '$x>y$' দ্বারা এই বুঝায় যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি অপেক্ষা বড়। '$x<y$' দ্বারা এই বুঝায় যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি অপেক্ষা ছোট। '$x\ngtr y$' দ্বারা এই বুঝায় যে, x দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি y দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি অপেক্ষা বড় নহে (সমান অথবা ছোট) ; এইরূপ '$x\nless y$' দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, y অপেক্ষা x ছোট নহে (বড় অথবা সমান) ; '$x\neq y$' দ্বারা বুঝা যায় যে x এবং y পরস্পর সমান নহে।

দুইটি রাশির মধ্যে '$\sim$' চিহ্নটি বিদ্যমান থাকিলে, উহাদের বৃহত্তরটি হইতে লঘুতরটির বিয়োগফল বুঝিতে হইবে। যেমন, '$3\sim8$' দ্বারা 8 হইতে 3এর বিয়োগফল, অর্থাৎ 5 বুঝায় ; এইরূপ '$x\sim y$' দ্বারা x এবং y এর অন্তর বুঝা যায়।

'$\pm$' চিহ্নটির দ্বারা যোগ এবং বিয়োগ বুঝায় ; আবার '$\mp$' চিহ্নটির দ্বারা বিয়োগ এবং যোগ বুঝায়। যথা, $8\pm3=8+3$ বা $8-3$, অর্থাৎ 11 বা 5. এবং $8\mp3=5$ বা 11.

এতদ্ব্যতীত 'যেহেতু' শব্দটির পরিবর্তে '∵' চিহ্ন এবং 'সুতরাং' কিংবা 'অতএব'-এর পরিবর্তে '∴' চিহ্ন ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

13. দৃষ্টান্ত

(1) যদি A র 3 টাকা এবং B এর 4 টাকা থাকে, তাহা হইলে তাহাদের দুইজনের একত্র $3+4$ টাকা আছে। সেইরূপ, যদি A র x টাকা এবং B এর y টাকা থাকে, তাহা হইলে তাহাদের দুইজনের একত্র $x+y$ টাকা থাকিবে।

(2) একটি থলিতে 50 টাকা আছে; তাহা হইতে 10 টাকা লওয়া হইলে থলিতে $50-10$ টাকা বা 40 টাকা থাকিবে। সেইরূপ, যদি কোন থলিতে x টাকা থাকে এবং তাহা হইতে y টাকা লওয়া হয়, তাহা হইলে থলিটিতে $x-y$ টাকা অবশিষ্ট থাকিবে।

(3) যদি 10 জন লোকের প্রত্যেককে 5 টি করিয়া কমলা লেবু দেওয়া হয়, তাহা হইলে সর্বশুদ্ধ 5×10 বা 50 টি কমলা লেবু লাগিবে। সেইরূপ, যদি লোকসংখ্যা y হয় এবং প্রত্যেক ব্যক্তিকে x টি করিয়া কমলা লেবু দেওয়া হয়, তাহা হইলে সর্বশুদ্ধ $x\times y$ বা xy টি কমলা লেবু লাগিবে।

(4) যদি 100 টি আপেল 20 জন বালকের ভিতর সমভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হয়, তাহা হইলে তাহাদের প্রত্যেকে $\frac{100}{20}$ বা 5 টি করিয়া আপেল পাইবে। সেইরূপ, যদি y জন বালকের ভিতর x টি আপেল সমভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকে $\frac{x}{y}$ টি করিয়া আপেল পাইবে।

(5) যদি $x=y$ এবং x এর মান 5 হয়, তাহা হইলে y এর মানও 5 হইবে।

(6) $x=2$ হইলে, $5x=5\times2=10$.

(7) $a=3$ এবং $b=4$ হইলে, $6ab$ এর মান $=6\times a\times b=6\times3\times4$ $=72$.

(8) যখন, $x>y$ এবং $y=3$ হয়, তখন x দ্বারা 3 অপেক্ষা যে-কোন বৃহত্তর সংখ্যাকে বুঝায়।

(9) যদি $a<b$ এবং $b=7$ হয়, তাহা হইলে a দ্বারা 7 অপেক্ষা যে-কোন লঘুতর সংখ্যাকে বুঝায়।

(10) যদি $p\neq q$ এবং $p=5$ হয়, তাহা হইলে q দ্বারা 5 ব্যতীত অপর যে-কোন সংখ্যাই সূচিত হইতে পারে।

(11) $x+1$, $x+2, \cdots$ দ্বারা x এর অব্যবহিত পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যাগুলি (integers) এবং $x-1$, $x-2, \cdots$ দ্বারা x এর অব্যবহিত পূর্ববর্তী পূর্ণ সংখ্যাগুলি সূচিত হয়।

প্রশ্নমালা 1

$x=2$ এবং $y=3$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে লিখ :—

1. $x+y$; $y-x$; xy ; $\frac{x}{y}$.

2. $x+2y$; $2x+y$; $3x+2y$; $3x-2y$.

3. $\frac{2x}{y}$; $\frac{x+y}{x}$; $\frac{y-x}{y}$; $\frac{5x+y}{xy}$.

4. x এর মান 3 হইলে, $5+x$ এবং $5x$ এর বিয়োগফল কত ?

5. যদি $a=5$ এবং $b=3$ হয়, তাহা হইলে $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{a-b}{a+b}$ এবং $\frac{a+b}{ab}$ এর মান কত ?

6. একটি রাশি p হইতে আর একটি রাশি q বিয়োগ করিতে হইলে ইহা কি ভাবে লিখিবে ? যদি $p=25$ এবং $q=13$ হয়, তবে p এবং q এর বিয়োগ-ফল কত হইবে ?

7. যদি $a+b=c$ এবং $a=6$, $b=9$ হয়, তাহা হইলে c এর মান কত ?

8. যদি $x=6$ এবং $y=5$ হয়, তাহা হইলে x এবং y দ্বারা 65 সংখ্যাটিকে কি প্রকারে লিখিবে ? xy এর মান কত হইবে ?

9. 60 টি কমলা লেবু x জন বালকের মধ্যে সমভাবে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে কয়টি করিয়া পাইবে ?

10. একটি আলমারির ভিতরে 20 খানি পুস্তক আছে। উহা হইতে y খানা পুস্তক সরাইয়া লইলে আলমারিতে আর কয়খানা পুস্তক থাকিবে ?

14. গুণফল (Product)

দুই বা তদধিক সংখ্যা গুণ করিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির **গুণফল** (product) বলে এবং উক্ত সংখ্যাগুলিকে গুণফলের **উৎপাদক বা গুণনীয়ক** (factor) বলে। যথা,

$a \times x$, অর্থাৎ ax কে a এবং x এই দুইটি সংখ্যার গুণফল বলে। a এবং

x কে উক্ত গুণফল ax এর 'উৎপাদক' বা 'গুণনীয়ক' বলে। সেইরূপ, 3, a এবং b এই তিনটি সংখ্যার প্রত্যেকটি উহাদের গুণফল $3ab$ এর একটি 'গুণনীয়ক'।

15. সহগ (Co-efficient)

কোন বীজগণিতীয় রাশির পূর্বে কোন একটি রাশি গুণনীয়করূপে অবস্থিত হইলে শেষোক্ত রাশিটিকে প্রথমোক্ত রাশির **'সহগ'** (co-efficient) বলে। যথা, $2a$ র অর্থ এই যে, a কে 2 দিয়া গুণ করা হইয়াছে। এস্থলে 2 কে a র 'সহগ' বলা হয়। সেইরূপ, $3xyz$ রাশিটিতে, xyz এর সহগ 3, yz এর সহগ $3x$, z এর সহগ $3xy$ ইত্যাদি।

ইহা হইতে বুঝা যায় যে, 'সহগ' শব্দটি এস্থলে ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হইতেছে এবং কোন গুণফলের যে-কোন গুণনীয়ককে অবশিষ্ট গুণনীয়কগুলির গুণফলের সহগ বলা যাইতে পারে।

যে সহগ মাত্র একটি সংখ্যা তাহাকে **সংখ্যাত্মক সহগ** (numerical co-efficient) এবং যে সহগ সংখ্যাত্মক নহে তাহাকে **আক্ষরিক সহগ** (literal co-efficient) বলে। যেমন, $3xy$ এর মধ্যে xy এর সংখ্যাবাচক সহগ 3, কিন্তু ax এর মধ্যে x এর আক্ষরিক সহগ a.

মন্তব্য। যখন কোন বীজগণিতীয় রাশির পূর্বে কোন সংখ্যাত্মক সহগ থাকে না, তখন বুঝিতে হইবে উহার পূর্বে একটি সংখ্যাত্মক সহগ '1' উহ্য রহিয়াছে। যথা, a র সহগ 1 ধরিতে হইবে; কিন্তু উহা সর্বদা উহ্য থাকে।

16. ক্রমিক গুণফল (Continued Product)

যখন কোন একটি সংখ্যা x কে অপর একটি সংখ্যা y দ্বারা গুণ করা হয় এবং লব্ধ গুণফল xy কে আর একটি তৃতীয় সংখ্যা z দ্বারা গুণ করা হয়, তখন এই শেষোক্ত গুণফলকে x, y এবং z এই তিনটি রাশির **ক্রমিক গুণফল** (continued product) বলা যায় এবং $x \times y \times z$ এইরূপে লেখা যায়। x, y এবং z এর প্রত্যেকটিকে উক্ত ক্রমিক গুণফলের গুণনীয়ক (factor) বলে। যথা, যদি $x=2$, $y=3$ এবং $z=4$ হয়, তাহা হইলে $xyz=2\times3\times4=24$. আবার, $5xyz=5\times2\times3\times4=120$. এইরূপে তিন বা তদধিক রাশির

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করা যাইতে পারে। যথা, $abcd\cdots = a\times b\times c\times d\times\cdots$; a, b, c, d,$\cdots$ অক্ষরগুলির প্রত্যেকে $abcd\cdots$ এই গুণফলের এক একটি গুণনীয়ক।

এই গুণনীয়কগুলিকে যে-কোন ক্রম (order) অনুসারে লেখা যাইতে পারে; কিন্তু সাধারণত ইহারা বর্ণমালার ক্রম অনুসারেই লিখিত হয়।

17. ঘাত (Power), সূচক (Index, Exponent)

যখন কোন গুণফলের গুণনীয়কগুলি পরস্পর সমান হয়, অর্থাৎ কোনও রাশিকে উক্ত রাশি-দ্বারাই একাধিক বার গুণ করা হয়, তখন লব্ধ গুণফলকে উক্ত রাশিটির 'ঘাত' (power) বলে। যথা, $a\times a$, $a\times a\times a$, $a\times a\times a\times a$, ……ইহাদের প্রত্যেকে a র একটি ঘাত।

$a\times a$ গুণফলটিকে a র 'বর্গ' (square) বা 'দ্বিঘাত' বলে এবং $a\times a = a^2$ এইরূপে লেখা হয়।

$a\times a\times a$ গুণফলটিকে a র 'ঘন' (cube) অথবা 'ত্রিঘাত' বলে এবং $a\times a\times a = a^3$ এইরূপে লেখা হয়। সেইরূপ, $a\times a\times a\times a = a^4$ কে a র 'চতুর্থ ঘাত' বলে।

কোনও রাশির ঘাতে কয়টি গুণনীয়ক লওয়া হইয়াছে তাহা প্রকাশ করিবার জন্য উক্ত রাশির উপরে ডান দিকে যে ক্ষুদ্র অঙ্ক বা চিহ্ন ব্যবহার করা হয় উহাকে ঐ ঘাতের 'সূচক' (index বা exponent) বলে। যেমন, 2, 3, 4 প্রভৃতি যথাক্রমে a^2, a^3, a^4 প্রভৃতি রাশির সূচক।

$x\times x\times x\times x$ প্রভৃতি n-সংখ্যক গুণনীয়ক লইয়া যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে x^n এইরূপে লেখা হয়, এবং ইহাকে x এর n-তম ঘাত বলা হয়।

মন্তব্য 1. কোন রাশিকে উহার যে কোন ঘাতের **মূল** (base) বলা হয়। কোন রাশি নিজে উহার প্রথম ঘাত; যথা, a র প্রথম ঘাত a^1; কিন্তু লিখিবার সময় শুধু a লিখিত হয়। '1' অঙ্কটি উহ্য থাকে।

মন্তব্য 2. কোন গুণফলের (product) গুণনীয়কগুলি কোন্‌টি কতবার গ্রহণ করা হইয়াছে তাহা উপরের নিয়মানুসারে অতি সংক্ষেপে লেখা যাইতে পারে। যেমন, $a\times a\times b\times b\times b$ এই গুণফলটিকে সংক্ষেপে a^2b^3 এইরূপে

লেখা যাইতে পারে। সেইরূপ, $x \times x \times y \times y \times y \times x$ কে x^2y^3x এইরূপে লেখা যায়। এস্থলে x এর সূচক 1 উহ্য রহিয়াছে।

মন্তব্য 3. প্রথম শিক্ষার্থীকে 'সহগ' (co-efficient) এবং সূচকের (index) পার্থক্য বিশেষরূপে মনে রাখিতে হইবে। $2x$ এবং x^2 একই রাশি নহে। $2x$ দ্বারা $2 \times x$ বুঝায়, কিন্তু x^2 দ্বারা $x \times x$ বুঝিতে হইবে। সেইরূপ, $2a^4$ এবং $4a^2$ একই রাশি নহে। কারণ $2a^4 = 2 \times a \times a \times a \times a$, কিন্তু $4a^2 = 4 \times a \times a$. যদি $a=3$ হয়, তাহা হইলে $2a^4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162$; কিন্তু $4a^2 = 4 \times 3 \times 3 = 36$.

18. মাত্রা (Dimension) এবং মান (Degree)

যতগুলি অক্ষর গুণ করিয়া একটি গুণফল পাওয়া যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে উক্ত গুণফলের এক একটি **মাত্রা** (dimension) বলে এবং উক্ত গুণফলে যতগুলি অক্ষর থাকে তাহাদের সমষ্টি-সংখ্যাকে উক্ত গুণফলের **মান** (degree) বলা যাইতে পারে। সুতরাং দেখা যায় যে, কোন গুণফলে যতগুলি ঘাত (power) থাকে তাহাদের সূচক-সমষ্টিকেই উক্ত গুণফলের 'মান' বলা হয়। যথা, $a^2b^3xy^4$ গুণফলটিতে $a \times a \times b \times b \times b \times x \times y \times y \times y \times y$, অর্থাৎ 10 টি অক্ষর গুণ করা হইয়াছে। ইহার প্রত্যেকটি অক্ষরই এক একটি 'মাত্রা' এবং ইহাদের সূচকসমষ্টি 10 উক্ত গুণফলের 'মান'; কারণ $2+3+1+4=10$. অতএব, ইহার 10 টি মাত্রা এবং ইহা একটি 'দশম মানের রাশি'। এইরূপ, $3ab^3c^4x^2y$ এর 11 টি মাত্রা এবং ইহা একটি 'একাদশ মানের রাশি'।

মন্তব্য 1. কোনও গুণফলের মাত্রা ও মান নির্ণয় করিবার সময় উহার সংখ্যাত্মক (numerical) সহগটিকে ধরা হয় না। যথা, $2x^3$ এর মাত্রা 3 এবং ইহা একটি তৃতীয় মানের রাশি; $5a^3b^4$ এর মাত্রা 7 এবং ইহা একটি সপ্তম মানের রাশি। মাত্রা ও মান নির্ণয় করিবার সময় 2 এবং 5 কে ধরা হইল না।

মন্তব্য 2. কোন বিশেষ অক্ষরের সম্পর্কেও কোন গুণফলের মাত্রা অথবা মান নির্দেশ করা যায়। যেমন, $a^2b^3x^4y^5$ গুণফলটির মাত্রা a র অনুসারে 2, b এর অনুসারে 3, x এর অনুসারে 4 এবং y এর অনুসারে 5.

মন্তব্য 3. একটি গুণনীয়ক শূন্য (0) হইলে অন্যান্য গুণনীয়কগুলি যাহাই

হউক না কেন, গুণফলটি শূন্য হইবে। যথা, $x=0$ হইলে a এবং y এর মান যাহাই হউক না কেন, $a^2x^3y^4=0$.

• **উদাহরণ।** $6a^2b^3x^2y$ এর মাত্রা কত? যদি $a=2, b=3, x=4$ এবং $y=5$ হয়, তাহা হইলে উহার মান (value) কত?

মাত্রা-সমষ্টি $=2+3+2+1=8$; সুতরাং ইহা একটি অষ্টম মানের রাশি।

$$\text{এস্থলে,}\quad 6a^2b^3x^2y = 6\times a^2\times b^3\times x^2\times y$$
$$= 6\times 2^2\times 3^3\times 4^2\times 5$$
$$= 6\times 4\times 27\times 16\times 5$$
$$= 51840.$$

19. মূল (Root)

যদি একটি রাশি অন্য একটি রাশির ঘাত হয়, তাহা হইলে শেষের রাশিটিকে পূর্বের রাশির **মূল** (root) বলে। যেমন, মনে কর, A রাশিটি B রাশির একটি ঘাত, তাহা হইলে B রাশিটি A রাশির একটি মূল।

যথা, 2, 4 এর একটি 'বর্গমূল', কারণ 4, 2 এর দ্বিতীয় ঘাত; a রাশিটি a^2 এর 'বর্গমূল', কারণ a^2, a র একটি ঘাত। 2, 8 এর 'ঘনমূল', কারণ 8, 2 এর তৃতীয় ঘাত। x রাশিটি x^3 এর ঘনমূল, কারণ x^3, x এর তৃতীয় ঘাত। a রাশিটি a^n এর 'n-তম মূল,' কারণ a^n, a র n-তম ঘাত।

বর্গমূলকে সাধারণত '$\sqrt{\ }$' চিহ্ন-দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ইহাকে **মূলচিহ্ন** (radical sign) বলে। 4 এর বর্গমূল $\sqrt{4}$ এইরূপে লিখিত হয় এবং 'বর্গমূল 4' এইরূপে পঠিত হয়।

ঘনমূল, চতুর্থ মূল, পঞ্চম মূল প্রভৃতি যথাক্রমে $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ এইরূপে লিখিত হয়। যেমন, a র ঘনমূল $\sqrt[3]{a}$, x এর n-তম মূল $\sqrt[n]{x}$.

1 ই 1 এর যে-কোন ঘাত, সুতরাং 1 এর যে-কোন মূলও 1. যেমন, $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[4]{1}=1$ ইত্যাদি। 0 এর যে কোন মূলই 0 হইবে।

মন্তব্য 1. '$\sqrt{\ }$' চিহ্নটিকে সাধারণত 'মূলচিহ্ন' (radical sign) বলে। এই চিহ্নটি radix শব্দের প্রথম অক্ষর *r* এর অপভ্রংশ বলা হয়।

মন্তব্য 2. কখন কখনও একটি মাত্রা-দ্বারা (রেখা) মূলচিহ্নটিকে প্রসারিত করিয়া কোনও সম্পূর্ণ একটি রাশির মূল বুঝান হয়। যেমন, $\sqrt{xy}$ দ্বারা বুঝায় যে,

x এবং y এর গুণফলের বর্গমূল লইতে হইবে। কিন্তু $\sqrt{x}y$ দ্বারা বুঝায় যে, x এর বর্গমূলকে y দ্বারা গুণ করিতে হইবে। এইরূপ $\sqrt{a}+b$ এবং $\sqrt{a+b}$ একই রাশি নহে। $\sqrt{a}+b$ দ্বারা a র বর্গমূলের সহিত b যোগ করিতে হইবে বুঝা যায়, কিন্তু $\sqrt{a+b}$ দ্বারা a এবং b এর যোগফলের বর্গমূল লইতে হইবে ইহাই বুঝায়।

উদাহরণ 1. যদি $a=9$ এবং $b=16$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt{ab}$ এবং $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এর মান (value) কত হইবে ?

এস্থলে, $ab=9\times16=144$. $\therefore$ $\sqrt{ab}=\sqrt{144}=12$;

এবং, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.

উদাহরণ 2. যদি $x=4$ এবং $y=25$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশি দুইটির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

(i) $2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$. (ii) $y\sqrt{x}-x\sqrt{y}$.

(i) $2\sqrt{xy}-\sqrt{y}=2\sqrt{4\times25}-\sqrt{25}=2\sqrt{100}-\sqrt{25}$
$=2\times10-5=15$.

(ii) $y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=25\sqrt{4}-4\sqrt{25}=25\times2-4\times5$
$=50-20=30$.

উদাহরণ 3. যদি $a=4$ এবং $b=5$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt{a^3b^4}$ এর মান কত ?

$$
\begin{aligned}
a^3b^4 &= 4\times4\times4\times5\times5\times5\times5\\
&= 64\times25\times25\\
&= 8\times25\times8\times25\\
&= 8^2\times25^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore \sqrt{a^3b^4} = \sqrt{8^2\times25^2}=8\times25=200.$$

প্রশ্নমালা 2

যদি $a=2$, $b=3$, $x=4$ এবং $y=6$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশি-গুলির মান (value) নির্ণয় কর :—

1. a^2 ; $3b^2$; $2y^3$; x^2+y^2.
2. $2a^2x$; $4abxy$; $2x+3a$; $2y+b^2$; a^2+2b^2.

3. ax^2 ; by^2 ; $ax+by$; $ay-bx$; $a^2y^2-b^2x^2$.

4. a^3+x^3 ; $4a^3$; x^3y ; xy^3 ; b^3x.

5. a^4x ; b^3y ; $ab+x$; $ab-ax$; $xy+ay$.

যদি $x=4$ এবং $y=9$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত ?

6. $\sqrt{x}$; $\sqrt{y}$; $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $\sqrt{y}-\sqrt{x}$; $2\sqrt{x}$.

7. $3\sqrt{x}$; $x\sqrt{y}$; $5\sqrt{x}+2\sqrt{y}$; $3\sqrt{y}-2\sqrt{x}$.

8. $\sqrt{xy}$; $x+\sqrt{y}$; $x-\sqrt{y}$; $\sqrt{x^2+y}$.

যদি $a=3$, $b=5$, $c=1$ এবং $x=2$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

9. $a+b+c$; $ax+b+c$.

10. a^2x+b^2c ; $a^2x+a^2b^2c$; abc.

11. $\frac{2a}{x}$; $\frac{5c}{b}$; $\frac{a}{3c}+x$; $\frac{2b}{x}-3c$.

12. $\sqrt{2cx}+a$; $2a+b-c$; $ab-\sqrt{8x}$.

13. 2^a ; 5^x ; a^x ; x^a.

14. $\frac{x}{c^2}$; $\frac{a}{cx}$; $\frac{bx}{5c}$.

15. a, b, c এবং x এর উল্লিখিত মান হইলে, প্রমাণ কর যে, $7x>bc$; $9a<4bx$.

16. $7x^3y^4z^2$ রাশিটির মাত্রা কত ?

17. a^2bc, $2a^2b^2c^2$, $3abc^2$, $4abc^4$ রাশিগুলির মাত্রা নির্দেশ কর। ইহাদের মধ্যে কোন্‌গুলি একই মানের (degree) ?

20. বীজগণিতীয় রাশিমালা (Algebraic Expressions)

+, −, × এবং ÷ এই ক্রিয়াসূচক চিহ্নগুলির দ্বারা সংযুক্ত অঙ্ক- ও প্রতীক-সমূহের কোন অর্থবোধক সমাবেশকে **বীজগণিতীয় রাশিমালা** (algebraic expression) বলে। এরূপ সমাবেশকে কখন কখনও **বীজগণিতীয় রাশি** (algebraic quantity) বা সংক্ষেপে **রাশি**ও (quantity) বলা হয়।

কোন বীজগণিতীয় রাশিমালার যে সকল অংশ শুধু যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত থাকে (গুণন এবং ভাগ চিহ্ন-দ্বারা নহে), তাহাদের প্রত্যেকটিকে উক্ত রাশিমালার **পদ** (term) বলে।

$\times$ এবং $+$ চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত রাশিগুলিকে একটি মাত্র 'পদ' ধরিতে হয়।

যেমন, $a+b$ একটি রাশিমালা; a এবং b উহার দুইটি পদ। এইরূপ $ax-by$ রাশিমালাটির ax এবং by দুইটি পদ।

$a\times b+c+d-2ax$ একটি রাশিমালা। ইহাতে তিনটি মাত্র পদ আছে। $a\times b$ একটি পদ, $c+d$ আর একটি পদ এবং $2ax$ টি তৃতীয় পদ।

মন্তব্য। কোন পদের পূর্বে যদি কোন চিহ্ন না থাকে, তবে উহার পূর্বে $+$ চিহ্ন বিদ্যমান আছে বলিয়া ধরিয়া লইতে হইবে।

21. ধন এবং ঋণ পদ (Positive and Negative Terms)

যে সকল পদের পূর্বে '$+$' চিহ্ন থাকে তাহাদিগকে ধন পদ (positive term) এবং যে সকল পদের পূর্বে '$-$' চিহ্ন থাকে তাহাদিগকে ঋণ পদ (negative term) বলে। রাশিমালার প্রথম পদের পূর্বে সাধারণত কোন চিহ্ন বর্তমান থাকে না। উহার পূর্বে সর্বদা একটি যোগ চিহ্ন আছে বলিয়া ধরিয়া লইতে হয়।

যেমন, $x-y$ এই রাশিমালার দুইটি পদ। $(+)x$ টি ধনপদ এবং $-y$ টি ঋণপদ। এইরূপ $ab-3c-4d+e$ রাশিমালাটির তিনটি পদ। তন্মধ্যে $(+)ab$ টি ধনপদ এবং $-3c$ ও $-4d+e$ দুইটি ঋণপদ।

22. সদৃশ ও অসদৃশ পদ (Like and Unlike Terms)

পদসমূহকে 'সদৃশ' ও 'অসদৃশ' এই দুই প্রকারের বলা হয়। যখন দুইটি পদের কোনই পার্থক্য থাকে না, অথবা শুধু তাহাদের সংখ্যাবাচক সহগ দুইটি বিভিন্ন হয়, তখন তাহাদিগকে সদৃশ পদ বলা হয়; অন্যথা অসদৃশ পদ বলা হয়। যেমন, $2x$ এবং $3x$ দুইটি সদৃশ পদ। এইরূপ $5ab$ এবং $9ab$ দুইটি সদৃশ পদ। কিন্তু $2x$ এবং $3y$ সদৃশ পদ নহে। সেইরূপ ax এবং by দুইটি অসদৃশ পদ। ইহা হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, দুইটি সদৃশ পদের যোগ বা বিয়োগ-ফলও একটি সদৃশ পদ। যথা, $2x+3x=5x$; $9ab-5ab=4ab$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য 1. একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাত (power), যেমন x এবং x^2, সদৃশ পদ নহে। এইরূপ $3a$ এবং a^3 এই দুইটি পদও সদৃশ পদ নহে।

দ্রষ্টব্য 2. অসদৃশ পদগুলি যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত হইয়া একটি পদ হইতে পারে না। যথা, $2x$ এর সহিত $3y$ যোগ করিয়া $2x+3y$ (একটি রাশিমালা) হইবে,—একটি পদ হইবে না।

23. সরল এবং মিশ্র রাশিমালা (Simple and Compound Expressions)

যে রাশিতে মাত্র একটি পদ (term) থাকে, অর্থাৎ একাধিক অংশ + বা − চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত না থাকে, তাহাকে **সরল রাশিমালা** বা **সরল রাশি** বলে। ইহাকে **একপদ** রাশিমালা (monomial expression), অথবা সংক্ষেপে **একপদ**ও (monomial) বলা হয়। যথা, $2x$, $3ab$, $4a^2bx$, $6a^3b^2x^4y^2$ ইহাদের প্রত্যেকটি একপদ।

কোন রাশিতে একাধিক পদ + বা − চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত থাকিলে উহাকে **মিশ্ররাশি** (compound expression) বলে। যথা, $ax+by$, $2a-3b+4c$ ইত্যাদি। কোন মিশ্র রাশিতে মাত্র দুইটি পদ থাকিলে তাহাকে **দ্বিপদ** (binomial) **রাশি,** অথবা সংক্ষেপে **দ্বিপদ** (binomial) বলে। যেমন, $a+b$, $ax-by$ ইত্যাদি। কোন মিশ্র রাশিতে তিনটি পদ থাকিলে উহাকে **ত্রিপদ রাশি** (trinomial expression), অথবা সংক্ষেপে **ত্রিপদ** (trinomial) বলে। যথা, $a+b+c$, $x+2y-3z$ ইত্যাদি। কোন মিশ্ররাশিতে তিনটির অধিক পদ থাকিলে উহাকে **বহুপদ** (multinomial অথবা polynomial) বলে। যথা, $a+bc-dx+xyz$ একটি 'বহুপদ'।

24. রাশিমালার মাত্রা (Dimension or Degree of an Expression)

কোন মিশ্ররাশির পদগুলি বিভিন্ন মাত্রার হইলে, যে পদটির মাত্রা সর্বাপেক্ষা অধিক, তাহার মাত্রাকেই উক্ত মিশ্ররাশির **মাত্রা** বলা হয়। সমস্ত পদগুলি একই মাত্রা-বিশিষ্ট হইলে উক্ত মিশ্ররাশিটিকে **সমমাত্র** (homogeneous) বলে। যেমন, $a+bx+cxy+dxyz$ মিশ্ররাশিটির মাত্রা-সংখ্যা 4, কারণ ইহার $dxyz$ পদটি সর্বোচ্চ 4 মাত্রা-বিশিষ্ট। আবার, $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ একটি 'সমমাত্র' মিশ্ররাশি, কারণ ইহার প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3. সেইরূপ, রাশিমালার **মান** বলিলে ঐ রাশিমালাস্থ পদগুলির মধ্যে যে পদের 'মান' সর্বাপেক্ষা অধিক, রাশিমালাটিরও সেই মান বুঝিতে হইবে। যেমন, $ba^2+3a^2b+7a^5-2ab$ একটি 'পঞ্চম মানের' রাশিমালা।

মন্তব্য। মিশ্ররাশিস্থ কোন নির্দিষ্ট অক্ষর বা অক্ষরসমূহের মাত্রানুসারেও উক্ত রাশির মাত্রা নির্ধারিত হইয়া থাকে, এবং রাশিটির পদগুলিকে উক্ত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম (ascending order) বা অধঃক্রম (descending order) অনুসারে সাজাইয়া লেখা যাইতে পারে। যথা, x এর মাত্রানুসারে ax^2+bx+c রাশিটির মাত্রা 2 এবং ইহাকে x এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে।

25. কোন অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজান মিশ্ররাশি (Expression arranged according to ascending or descending power of a letter)

যদি কোন মিশ্ররাশির পদাবলী একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাতযুক্ত হয়, এবং উক্ত পদাবলী এমনভাবে সাজান হয় যে, সর্বাধিক ঘাতযুক্ত পদটি সর্বপ্রথম বামে, তন্নিম্ন ঘাতযুক্ত পদটি তাহার দক্ষিণে ইত্যাদি এবং সর্বনিম্ন ঘাতযুক্ত পদটি, অথবা উক্ত অক্ষর-বর্জিত ধ্রুবক (constant) পদটি সর্বশেষে লেখা হয়, তবে উক্ত রাশিটিকে উক্ত অক্ষরটির ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে বলিতে হয়।

পরন্তু, যদি পদাবলী বিপরীতক্রমে লেখা হয়, তবে রাশিটি ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে লেখা হইয়াছে বলিতে হইবে। যেমন, $a^2x^4+4a^3x^3y+6a^4x^2y^2+4a^5xy^3+a^6y^4$ রাশিটিকে x এর ঘাতের অধঃক্রম, কিন্তু a অথবা y এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে লেখা হইয়াছে। পদগুলি বিপরীতক্রমে লিখিলে $a^6y^4+4a^5xy^3+6a^4x^2y^2+4a^3x^3y+a^2x^4$ হয় এবং ইহা x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম এবং a অথবা y এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে লেখা হইয়াছে।

26. বন্ধনী (Brackets)

পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও ( ), { }, [ ] এই তিনটি চিহ্নকে যথাক্রমে **লঘু, ধনু** এবং **গুরু বন্ধনী** (brackets) বলে। যখন কোন রাশি-মালার একাধিক পদকে একটিমাত্র রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হয়, তখন ঐ পদগুলিকে কোন বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিতে হয়। এইরূপ বন্ধনীমধ্যস্থ পদগুলিকে রাশিটির একটি মাত্র পদ বলিয়া ধরিয়া লইতে হইবে। যেমন,

$(a+b)c$ দ্বারা এই বুঝায় যে, c দ্বারা সূচিত রাশিটির দ্বারা '$a+b$' এই একটি মাত্র রাশিকে, অর্থাৎ a এবং b এর সমষ্টিকে গুণ করিতে হইবে। এস্থলে $(a+b)$ কে একপদ রাশি মনে করিতে হইবে। কিন্তু যদি কোন বন্ধনী না থাকে, তখন $a+bc$ রাশিটি একটি দ্বিপদ হয়, এবং ইহার দ্বারা এই বুঝায় যে, b এবং c এর গুণফল a র সহিত যোগ করিতে হইবে।

সেইরূপ, $a+(b+c)x$ একটি দ্বিপদ রাশি। a এবং $(b+c)x$ ইহার পদদ্বয়। বন্ধনীটি না থাকিলে $a+b+cx$ একটি ত্রিপদ রাশি হয় এবং a, b এবং cx ইহার তিনটি পদ।

কখনও কখনও বন্ধনীর পরিবর্তে একটি দীর্ঘ মাত্রা ব্যবহৃত হয়, অর্থাৎ যে পদগুলিকে একটি মাত্র রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হইবে তাহাদের উপরে একটি দীর্ঘ রেখা টানিয়া দেওয়া হয়। এই রেখাটিকে **রেখাবন্ধনী** (vinculum) বলে। যথা, $x-\overline{y-x}$ এবং $x-(y-x)$ এই দুইটির দ্বারা একই রাশি সূচিত হয়। এস্থলে $\overline{y-x}$ কে একটি মাত্র পদ বিবেচনা করা হয়।

দ্রষ্টব্য 1. বন্ধনীকে কখনও কখনও 'একত্রীকরণ চিহ্ন' (symbol of aggregation) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. $\sqrt{x}+y$, $\sqrt{(x+y)}$ এবং $\sqrt{x+y}$ এর পরস্পর পার্থক্য স্মরণ রাখিবে। প্রথমটির দ্বারা বুঝায় যে, x এর বর্গমূলের সহিত y যোগ করিতে হইবে; কিন্তু দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির দ্বারা x এবং y এর সমষ্টির বর্গমূল বুঝায়।

উদাহরণ 1. যদি $a=1, b=2, c=3, d=1, x=4$ এবং $y=5$ হয়, তাহা হইলে $a+b\{x+(c+y)d\}$ রাশিটির মান নির্ণয় কর।

এস্থলে, $c+y$ কে একটি রাশি বলিয়া মনে করিতে হইবে; ইহার মান $3+5$, অর্থাৎ 8.

আবার, $x+(c+y)d$ কেও একটি রাশি বলিয়া মনে করিতে হইবে, এবং

$$x+(c+y)d=4+(3+5)\times 1$$
$$=4+8=12.$$
$$\therefore \quad a+b\{x+(c+y)d\}=a+b\times 12$$
$$=1+2\times 12=25.$$

লক্ষ্য করিতে হইবে যে, বন্ধনীটি না থাকিলে $a+bx+c+dy$ একটি বহুপদ হয়।

উদাহরণ 2. যদি $x=9$ এবং $y=16$ হয়, তাহা হইলে $\surd x+y$ এবং $\surd(x+y)$ এর মান নির্ণয় কর।

এস্থলে, $\surd x+y=\surd 9+16=3+16=19$;

এবং $\surd(x+y)=\surd(9+16)=\surd\overline{25}=5.$

27. অপেক্ষক (Functions)

যে-কোনও অক্ষর-সমন্বিত রাশিকে উক্ত অক্ষরটির একটি **অপেক্ষক** বলা যাইতে পারে। যেমন, x, $3x+2$, $3x^2+2x+1$ তিনটি রাশি x এরই এক একটি 'অপেক্ষক' (function). সেইরূপ, x^2+xy+y^2 রাশিটি x এবং y এর একটি 'অপেক্ষক'। $x^3+y^3+z^3-3xyz$ রাশিটি x, y এবং z এই তিনটি অক্ষরের 'অপেক্ষক'।

কোনও অপেক্ষকের অক্ষরসমূহকে উহার **চল** (variables) বলে। উপরের অপেক্ষকগুলিতে x, y এবং z প্রত্যেকে এক একটি 'চল'।

মন্তব্য। x এর কোন অপেক্ষককে সংক্ষেপে $f(x)$ অথবা $\phi(x)$ এইরূপ লেখা যায়।

28. ক্রিয়াবাচক চিহ্নসমূহের ক্রম (Order of Operation)

বহুপদ রাশিমালার (polynomial) 'মান' (value) নির্ণয় করিতে হইলে ক্রিয়াবাচক চিহ্নসমূহের ক্রম গণিতের নিয়মানুসারেই হইয়া থাকে, অর্থাৎ যখন শুধু + এবং − চিহ্ন, অথবা × এবং ÷ চিহ্ন বর্তমান থাকে, তখন ক্রমে বাম দিক্ হইতে ক্রিয়াগুলি সম্পন্ন করিতে হয়। যদি +, −, × ও ÷ এই চারিটি চিহ্নই বর্তমান থাকে, তবে প্রথমত গুণ ও ভাগের কার্যগুলি সম্পন্ন করিয়া তারপর বাম দিক্ হইতে ক্রমে যোগ ও বিয়োগের কার্য করিতে হয়।

বহুপদের (polynomial) প্রত্যেকটি পদের মান নির্ণয় করিয়া এই নিয়ম অনুসারে সম্পূর্ণ বহুপদটির মান নির্ণয় করিতে হয়।

মন্তব্য। যেখানে × চিহ্ন উহ্য থাকে, অথবা যেখানে ÷ চিহ্নের পরিবর্তে ভাগসূচক '—' বা '/' $\left(\text{যেমন } \frac{a}{b} \text{ বা } a/b\right)$ এই চিহ্ন থাকে, সেখানে এই গুণন বা ভাগক্রিয়া সর্বাগ্রে সম্পন্ন করিতে হয়। $a+b\times c$ ও $a+bc$ এবং $a\div b\div c$ ও $a\div\frac{b}{c}$ ইহাদের পার্থক্য বিশেষ করিয়া লক্ষ্য করিবার বিষয়।

$a \div b \times c = \frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; কিন্তু $a \div bc = \frac{a}{bc}$. এইরূপ, $a \div b \div c = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$; কিন্তু $a \div \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

উদাহরণ 1. যদি $a=2$, $b=15$ এবং $c=8$ হয়, তাহা হইলে $9a+2b-4c$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} 9a+2b-4c &= 9\times a+2\times b-4\times c \\ &= 9\times 2+2\times 15-4\times 8 \\ &= 18+30-32 \\ &= 48-32=16. \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. যদি $a=5$, $b=2$ এবং $c=6$ হয়, তাহা হইলে $a\,(b+c)^2-a\times b+c^2$ এর মান কত হইবে ?

এস্থলে, $a\,(b+c)^2 = 5\times(2+6)^2$
$= 5\times 8^2 = 5\times 64 = 320.$

$a\times b = 5\times 2 = 10$ এবং $c^2 = 6^2 = 36$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 320-10+36$
$= 310+36 = 346.$

উদাহরণ 3. $a=4, b=3$ এবং $c=2$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে ?

(*i*) $a+b\div(b+c)$; (*ii*) $(a+b)\div(b+c)$; (*iii*) $(a+b)\div b+c$.

(*i*) প্রদত্ত রাশিমালা $= a+\frac{b}{b+c} = 4+\frac{3}{3+2} = 4+\frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$.

(*ii*) প্রদত্ত রাশিমালা $= \frac{a+b}{b+c} = \frac{4+3}{3+2} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

(*iii*) প্রদত্ত রাশিমালা $= \frac{a+b}{b}+c = \frac{4+3}{3}+2 = \frac{7}{3}+2 = 4\frac{1}{3}$.

উদাহরণ 4. যদি $a=3, b=6, p=1, q=2, x=5$ এবং $y=8$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিমালা দুইটির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

(*i*) $a-b\div q+y\div q+p$.

(*ii*) $3a+pxy-2b\div a-bp+aq-3px$.

(i) $a-b+q+y+q+p$

$$=3-6+2+8+2+1$$
$$=3-3+4+1=5.$$

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=3\times3+1\times5\times8-2\times6+3-6\times1+3\times2-3\times1\times5$$
$$=9+40-4-6+6-15$$
$$=49-4-15=30.$$

প্রশ্নমালা 3

$x=3$, $y=5$, $a=2$ এবং $b=6$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

1. $a+x\times y$ 2. $(a+x)y$ 3. $x+b+a$

4. $(x+b)+a$ 5. $b+a+x$ 6. $b+(a+x)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির অর্থ কথায় প্রকাশ কর, এবং যখন $x=2$, $y=3$, $z=4$ এবং $w=1$ হয়, তখন উহাদের মান কত হইবে বল :—

7. $(x+y)(z+w)$ 8. $2x+3y-z$ 9. $xyw+yzw+zxw$

10. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xyz}{w}$ 11. $x^2+y^2+z^2+w^2$.

যদি $a=2, b=1, c=3, x=4, y=6$ এবং $z=0$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

12. $(a+x)^2+(b+y)^2$ 13. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2y}{x^2}$

14. $\frac{(a+x)^2}{(y-z)^2}\;\frac{(b+y)}{(a+x^2)}$ 15. $(x+y)/x-(y-x)/y$.

যদি $a=0, b=5, c=6, x=4$ এবং $y=2$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

16. $x^3-12x^2+48x-64$ 17. $4x^3-\{b^2-2(c^2-7y^2)\}$

18. $x^2-[y+b\{c+y(c-\overline{x-a})\}]$

19. $(x^2-y^2)(c^2-b^2)-\{x^3-(c^2-\overline{a+y})\}$.

যদি $a=9$, $b=5$, $x=3$ এবং $y=2$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,

20. $3a+2b=9x+5y$.

21. $5a-2b+7x=8b+10y-4$.

22. $2ab-8xy=8bx-9a+3$.

যদি $a=3$, $b=8$, $x=5$ এবং $y=9$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশি দুইটির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

23. $\sqrt{(x-a)(y-b)b}$.   24. $\sqrt[3]{15x^2a^2b^2}$.

নিম্নলিখিত রাশিমালা দুইটি কোন্ কোন্ মানের নির্ণয় কর :—

25. $3x^3y^2+5xy^3+7x^2y^3-9x^4+7x^2y$.

26. $2a^2b^2-3a^4b^3+10ab-2ab^2+6a^3b^3$.

তৃতীয় অধ্যায়

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Directed Numbers) ও ঋণরাশি (Negative Quantities)

29. সাধারণ ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Common and Directed Numbers)

পাটীগণিতে কোন রাশি বুঝাইবার জন্য সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। কোন বালকের বয়স কত 'বৎসর', ইহার উত্তরে শুধু '10' একটি সংখ্যা বলিলেই হয়। এস্থলে উত্তরটি সম্পূর্ণ অর্থসূচক। সেইরূপ কোন বস্তুর ওজন কত 'সের' বুঝাইতে হইলে কেবলমাত্র একটি সংখ্যা '15' দ্বারাই তাহা প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ উহার ওজন 15 সের। এই উত্তরটিও সম্পূর্ণ অর্থসূচক।

পক্ষান্তরে, "অদ্য প্রাতঃকাল হইতে তাপের পরিমাণ কত পরিবর্তন হইয়াছে" উহা বুঝাইতে শুধু '5 ডিগ্রি' বলিলে উত্তরটি সম্পূর্ণ অর্থসূচক হইবে না। 5 ডিগ্রি 'বাড়িয়াছে' বা 'কমিয়াছে' নির্দিষ্ট করিয়া না বলিলে, শুধু '5°' এই উত্তরটির কোনই অর্থ হয় না।

সেইরূপ, বোম্বাই-এর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইলে শুধু "কলিকাতা হইতে বোম্বাই-এর দূরত্ব 1223 মাইল" এ কথা বলিলে ঠিক উত্তর হইবে না। "কলিকাতা হইতে বোম্বাই 1223 মাইল পশ্চিমে" এই কথা বলিতে হইবে। এখন সহজেই বুঝা যায় যে, যদিও উপরি উক্ত সংখ্যাগুলি এক এক প্রকারের রাশি বুঝাইতেছে, তথাপি '10' এবং '15' সংখ্যা দুইটি এবং '5' ও '1223' সংখ্যা দুইটির মধ্যে প্রকৃতিগত কিছু বৈষম্য রহিয়াছে। প্রথম 10 ও 15 সংখ্যা দুইটিতেই নির্দিষ্ট রাশি প্রকাশ করে, কিন্তু শেষ দুইটির পর যথাক্রমে "বাড়িয়াছে" বা "কমিয়াছে" এবং "পশ্চিম" এই কথা দুইটি যোগ না করিলে শুধু 5 ও 1223 সংখ্যা দুইটির দ্বারা কিছুই বুঝা যায় না। এই দুই প্রকারের সংখ্যার মধ্যে বৈষম্য নির্দেশ করিবার জন্য প্রথম দুইটিকে **সাধারণ** (common) সংখ্যা এবং শেষ দুইটিকে **নিয়ন্ত্রিত** (directed) সংখ্যা বলা হয়।

সুতরাং কোন বিশেষ অর্থে ব্যবহৃত সংখ্যাকেই 'নিয়ন্ত্রিত' সংখ্যা বলা যায়। যেমন, আমরা বলিতে পারি কোন ঘরের মেঝের তুলনায় পার্শ্বস্থ রাস্তাটি 20 ফুট **নিম্ন**• এবং রাস্তার তুলনায় ঘরের মেঝে 20 ফুট **উচ্চ**। এই উচ্চ ও নিম্ন শব্দ দুইটির দ্বারা 20 ফুট এই বদ্ধ সংখ্যাটির অর্থ একটু বিশেষ করিয়া দেওয়া হইল।

30. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার দৃষ্টান্ত (Illustrations of Directed Numbers)

(1) আমরা বলিয়া থাকি তাপ 'হিমাঙ্ক' (freezing point) হইতে 8° নীচে অথবা 10° উপরে।

(2) বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষা প্রত্যহ পূর্বাহ্ণ 10 টায় আরম্ভ হয় এবং পরাহ্ণ 5 টায় শেষ হয়। এস্থলে এই সময়ের ঘণ্টাগুলি দুপুর বেলা 12 টা হইতে গণনা করা হয় এবং 'পূর্বাহ্ণ' ও 'পরাহ্ণ' শব্দ দুইটির দ্বারা 12 টার আগে বা পরের সময়-নির্দেশ করা হয়।

(3) 1857 খ্রীষ্টাব্দে পলাশীর যুদ্ধ হইয়াছিল, কিন্তু বুদ্ধদেব 557 খ্রীষ্টপূর্ব অব্দে জন্মগ্রহণ করেন। এই তারিখ দুইটি নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা। যীশুখ্রীষ্টের জন্ম-তারিখ হইতে হিসাব করিয়া তাহার পূর্বের ঘটনার সময় "খ্রীষ্টপূর্ব অব্দ" এবং পরের ঘটনার সময় "খ্রীষ্ট অব্দ" বলিয়া বর্ণনা করা হয়। এই কথাগুলি যোগ না করিলে শুধু 1857 বা 557 সংখ্যা দুইটি সম্পূর্ণ নিরর্থক।

(4) কোন ব্যক্তি 500 টাকা আয় করিয়া তাহা হইতে 300 টাকা ব্যয় করিল। সুতরাং তাহার সঞ্চয়-তহবিল 200 টাকা। কিন্তু 300 টাকা আয় করিয়া 500 টাকা ব্যয় করিলে তাহার সঞ্চয় কিছুই রহিল না, পরন্তু 200 টাকা ধার হইল। বীজগণিতে দেনার এই 200 টাকাকেও তহবিল বলিয়া অভিহিত করা হয়। উভয় ক্ষেত্রেই তাহার আর্থিক অবস্থা '200 টাকা' এই বদ্ধ রাশির দ্বারা প্রকাশিত হইল, কিন্তু প্রথম 200 টাকা **সঞ্চয়** এবং শেষ 200 টাকা **ধার** এইরূপে প্রকাশ করিতে হয়। সুতরাং সঞ্চয় এবং ধার শব্দ দুইটি ব্যবহার না করিলে উক্ত ব্যক্তির আর্থিক অবস্থা সম্যক্ বর্ণিত হইবে না।

31. বিভিন্ন প্রকৃতির রাশি (Quantities of Different Nature)

.উপরের দৃষ্টান্তসমূহ হইতে সহজেই প্রতীয়মান হইবে যে, রাশিসমূহ একই জাতীয় হইলেও তাহাদের প্রকৃতিগত বৈষম্য থাকিতে পারে। মনে কর, এক

ব্যক্তি A বিন্দু হইতে পূর্বাভিমুখে B পর্যন্ত 3 মাইল গেল। এখন যদি সে পুনরায় পশ্চিম মুখে 3 মাইল পথ চলে তবে সে তাহার যাত্রাবিন্দু A তে আসিয়া পৌঁছিবে, অর্থাৎ তাহার অবস্থানের কোনই পরিবর্তন হইবে না। এইজন্য পূর্ব দিকের 3 মাইল এবং পশ্চিম দিকের 3 মাইল উভয়ের সাংখ্যমান এক হইলেও উহারা বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট মনে করিতে হইবে। বিপরীত দিকে পরিমিত দূরত্বকে এইজন্য বিভিন্ন প্রকৃতির বলা হয়। উভয়ই দূরত্ব-বোধক একই জাতীয় রাশি, কিন্তু দিক্-সম্বন্ধে উহাদের বিচার করিলে উভয়কে বিপরীত প্রকৃতির গণ্য করিতে হইবে।

এইরূপ 'সঞ্চয়' ও 'ব্যয়', 'লাভ' ও 'ক্ষতি' প্রভৃতি অর্থ-বোধক সংখ্যা একই জাতীয় হইলেও তহবিল-সম্পর্কে বিপরীত অবস্থার পরিচায়ক বলিয়া বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট মনে করা হয়। বীজগণিতে বিভিন্ন প্রকৃতির নিয়ন্ত্রিত রাশি-সমূহের প্রকৃতিগত বৈষম্য প্রকাশ করিবার জন্য '+' ও '−' চিহ্ন দুইটি ব্যবহৃত হয়, এবং ইহাদিগকে উক্ত সংখ্যার চিহ্ন বলা হয়। একটিকে ধনরাশি বলিলে অপরটিকে ঋণরাশি বলিতে হইবে। উপরি উক্ত পূর্বাভিমুখে 3 মাইলকে +3 মাইল (ধনরাশি) বলিলে, পশ্চিমাভিমুখের 3 মাইলকে −3 মাইল (ঋণরাশি) বলিতে হইবে। এই ব্যক্তি যদি A বিন্দু হইতে পশ্চিমাভিমুখে 3 মাইল যায়, তাহা হইলে সে A বিন্দু হইতে 3 মাইল পশ্চিমেই রহিল বটে, কিন্তু বীজগণিতের প্রণালীতে লোকটি A বিন্দুর −3 মাইল পূর্বে আছে এইরূপ বলা চলে।

যখন বিপরীত প্রকৃতির দুইটি রাশির পার্থক্য নির্দেশ করিতে হইবে, তখন একটির পূর্বে '+' চিহ্ন এবং অপরটির পূর্বে '−' চিহ্ন দিতে হয়। যেমন, যখন তাপের পরিমাণ হিমাঙ্ক হইতে 10° উপরে থাকে তখন +10° এবং যখন 17° নীচে থাকে তখন −17° এইরূপ লিখিতে হয়।

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবে, উপরি উক্ত যে-কোন একটিকে '+' চিহ্ন-দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। হিমাঙ্কের নীচস্থ কোন তাপের পরিমাণকেও '+' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে, কিন্তু এরূপ স্থলে হিমাঙ্কের উপরিস্থ কোন তাপের পরিমাণকে '−' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করিতে হইবে। শুধু এই কথাটি স্মরণ রাখিবে যে, বিপরীত প্রকৃতির দুইটি রাশির যে-কোন একটিকে '+' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করিলে অপরটিকে '−' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করিতে হইবে। চিহ্ন-সম্বন্ধে একবার যাহা ধরিয়া লইতে হয় সর্বত্র তাহাই মানিয়া চলিতে হইবে।

32. '+' এবং '−' চিহ্নের নূতন প্রকৃতি (New Aspect of the Signs '+' and '−')

এস্থলে + এবং − চিহ্নের একটি নূতন প্রকৃতি উপলব্ধ হইতেছে। পাটীগণিতে '+' চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে যোগ এবং '−' চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে বিয়োগ করিতে হয়, ইহাই দেখা গিয়াছে। সুতরাং উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে বুঝা যায় যে, + এবং − চিহ্নদ্বয় দুইটি বিভিন্ন অর্থে ব্যবহৃত হয়। স্বভাবত মনে হইতে পারে যে, একই চিহ্নের এই দ্ব্যর্থক ব্যবহার অসুবিধাজনক। কিন্তু ইহাতে বস্তুত কোন অসুবিধা হয় না; কারণ কোন্ স্থলে কি অর্থে উক্ত চিহ্নদ্বয় ব্যবহৃত হইতেছে তাহা সহজেই বুঝা যায়।

এ বিষয়ে বীজগণিত এবং পাটীগণিতের মধ্যে বিশেষ বৈষম্য লক্ষিত হয়। পাটীগণিতে একটি বৃহত্তর সংখ্যা হইতে একটি লঘুতর সংখ্যা বিয়োগ করা যাইতে পারে, কিন্তু কোন লঘুতর সংখ্যা হইতে বৃহত্তর সংখ্যা বিয়োগ করা যাইতে পারে না। পক্ষান্তরে, ঋণরাশিগুলির এইরূপ স্বাধীন অবস্থান সম্ভবপর হয় বলিয়া বীজগণিতে বিয়োগ-কার্যটি অধিকতর ব্যাপকতা ও সম্পূর্ণতা লাভ করিয়াছে। পাটীগণিতে স্বতন্ত্রভাবে অবস্থিত ঋণরাশির কোন অর্থই হয় না, সুতরাং উহার কোন ব্যবহারও নাই। কিন্তু বীজগণিতে ঋণরাশির স্বতন্ত্র অস্তিত্ব স্বীকার করা হয় বলিয়া বিয়োগ-প্রণালীটি ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

উদা. যখন $x=5$ এবং $y=3$, তখন $x-y=5-3$, অথবা 2. কিন্তু যদি $x=2$ এবং $y=3$ হয়, তাহা হইলে পাটীগণিতে $x-y$, অর্থাৎ $2-3$ এর কোন অর্থ হয় না। কিন্তু ঋণরাশির অস্তিত্ব স্বীকার করিয়া লইলে, x অপেক্ষা y বড় হইলেও $x-y$ এর একটি অর্থ প্রতিপন্ন হয়, এবং বর্তমান স্থলে $x-y=2-3=-1$. সুতরাং x অপেক্ষা y বড় বা ছোট হউক, x হইতে y সর্বদাই বিয়োগ করা যাইতে পারে।

33. ধন ও ঋণ সংখ্যা (Positive and Negative Numbers)*

'+' চিহ্নযুক্ত কোন নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে ধনসংখ্যা এবং '−' চিহ্নযুক্ত নিয়ন্ত্রিত

* হিন্দুগণই সর্বপ্রথম "ঋণসংখ্যা" (absolutely negative numbers) এবং "অমূলদ" (irrational) সংখ্যা আবিষ্কার করেন।—Cajori, *History of Mathematics*, p. 101.

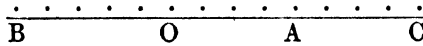
সংখ্যাকে ঋণসংখ্যা বলে। ব্যবহার-কালে ধনসংখ্যার পূর্বে + চিহ্নটি উহ্য থাকে, কিন্তু ঋণসংখ্যার পূর্বে − চিহ্নটি সর্বদা ব্যবহার করিতে হয়। + এবং − চিহ্ন দুইটিকে যথাক্রমে 'ধন' ও 'ঋণ' চিহ্ন বলে।

দ্রষ্টব্য 1. + এবং − চিহ্ন দুইটি ক্রিয়া-বাচক চিহ্ন ব্যতীত বিপরীত প্রকৃতি-বিশিষ্ট রাশির পার্থক্য-সূচক চিহ্নরূপেও ব্যবহৃত হইয়া থাকে, এবং এই শেষোক্ত অর্থে উহাদিগকে 'ভেদ চিহ্ন' (sign of affection) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. ভেদ-চিহ্ন-বর্জিত কোন রাশির সংখ্যাকে উহার পরম (absolute) মান বলে। যথা, $+5$ এবং -5 উভয়ের পরম মান 5.

34. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার লৈখিক চিত্র (Graphical Representation of Directed Numbers)

উদা. 1. কোন একটি সরল রেখার উপর দূরত্ব পরিমাপ করিয়া নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাগুলিকে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

মনে কর, একটি বালক তিন বার মার্বেল খেলিল এবং সে প্রথম বারে 4 টি জিতিয়া দ্বিতীয় বারে 9 টি হারিল, কিন্তু তৃতীয় বারে পুনরায় 13 টি জিতিল।

কোন সরল রেখার উপর O একটি মূলবিন্দু লইলে জিতের মার্বেল O এর ডান দিকে এবং হারের মার্বেল O এর বাঁ দিকে বিন্দু-দ্বারা সূচিত করিতে হয়।

এইরূপে প্রথম বারের জিত O এর ডান দিকে A বিন্দু-দ্বারা, দ্বিতীয় বারের হার A র বাঁ দিকে B বিন্দু-দ্বারা এবং তৃতীয় বারের জিত B এর ডান দিকে C বিন্দু-দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। এখানে হার-জিতের মার্বেল উক্ত রেখার উপর চিহ্নিত বিন্দু-দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে।

চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, C, O-এর ডান দিকে অষ্টম বিন্দুতে অবস্থিত। অতএব বুঝা গেল যে, তিনটি খেলার শেষে বালকটি মোট 8 টি মার্বেল জিতিয়াছিল।

উদা. 2. মনে কর, AB একটি পথ। যদি কোন ব্যক্তি C বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া B এর দিকে অগ্রসর হইতে থাকে এবং D বিন্দুতে উপস্থিত হইয়া

পরে আবার আগের C বিন্দুতে ফিরিয়া যায়, তবে ইহা সহজেই অনুমেয় যে, উক্ত ব্যক্তি তাহার আগের স্থানেই ফিরিয়া গিয়াছে এবং তাহার C

A C D B

হইতে D পর্যন্ত যাওয়ায় এবং পুনরায় C বিন্দুতে ফিরিয়া আসায় তাহার অবস্থানের কোনই পরিবর্তন হয় নাই। সুতরাং C হইতে D পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব, অর্থাৎ বাম হইতে দক্ষিণ দিক্ পর্যন্ত CD দূরত্ব এবং দক্ষিণ হইতে বাম দিকে DC দূরত্ব পরিমাণে সমান হইলেও বিপরীত প্রকৃতির। অতএব বাম দিক্ হইতে দক্ষিণ দিকের দূরত্ব যদি '+' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে দক্ষিণ দিক্ হইতে বাম দিকের দূরত্ব '−' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত হইবে। বিপরীতক্রমেও (conversely) এইরূপ হইবে। সুতরাং C কে শূন্য (0) বিন্দু ধরিয়া ইহা হইতে +5 মাইল দূরত্ব বলিলে বুঝা যাইবে যে, C বিন্দু হইতে ডান দিকে 5 মাইল, এবং −5 মাইল বলিলে C বিন্দু হইতে বাঁ দিকে 5 মাইল দূরত্ব বুঝা যাইবে।

মন্তব্য। ঋণসংখ্যা-সম্বন্ধে আরও এক প্রকারে ধারণা করা যাইতে পারে। পাটীগণিতে সংখ্যাগুলি ক্রমশ কমিয়া 4, 3, 2, 1 ইত্যাদি ক্রমে 0 পর্যন্ত লেখা হয়। 0 ই পাটীগণিতে ক্ষুদ্রতম সংখ্যা। কিন্তু বীজগণিতে শূন্যতে শেষ না হইয়া শূন্যের পরেও ক্ষুদ্রতর সংখ্যার কল্পনা করা হয়। 0 অপেক্ষা 1 কম যে-সংখ্যা তাহাকে −1, যে-সংখ্যা 2 কম, তাহাকে −2, যে-সংখ্যা 3 কম তাহাকে −3 প্রভৃতি বলা হয়। সেই জন্যই 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাকে ঋণসংখ্যা বলা হয়।

35. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার ব্যবহার (Operation with Directed Numbers)

গণিতে ঋণসংখ্যার প্রবর্তন হওয়ায় উহাদের ব্যবহার-সম্বন্ধেও কতকগুলি নিয়ম বিধিবদ্ধ করা আবশ্যক। কারণ সাধারণ ধনসংখ্যা-দ্বারা গুণন ও ভাগের নিয়ম পাটীগণিতে প্রচলিত আছে, কিন্তু কোন ঋণসংখ্যা-দ্বারা গুণন ও ভাগের— যেমন $2\times(-3)$ এবং $4\div(-2)$ র—কি অর্থ হইতে পারে, সে সম্বন্ধে কিছু জানা নাই; সুতরাং এ সম্বন্ধেও কতকগুলি নিয়ম প্রবর্তন করা আবশ্যক। প্রচলিত নিয়মের সহিত শৃঙ্খলা রক্ষা করিয়া গুণন- ও ভাগ-ক্রিয়াগুলির এমনভাবে

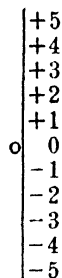
ব্যাখ্যা করিতে হইবে, যেন এই সব নিয়ম ঋণসংখ্যা-সম্বন্ধেও ব্যবহৃত হইতে পারে।

36. ঋণসংখ্যার যোগ (Addition of Negative Numbers)

একটি স্কেলে $+1$, $+2$, $+3$ প্রভৃতি ধনসংখ্যাগুলি কোন শূন্য বিন্দু o হইতে উপরের দিকে এবং -1, -2, -3 প্রভৃতি ঋণসংখ্যাগুলি নীচের দিকে চিহ্নিত কর।

(1) 3 কে 2 এর সহিত যোগ করিতে $+2$ চিহ্নিত বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে 3 ঘর উঠিয়া $+5$ চিহ্নিত বিন্দু পর্যন্ত আসিতে হয়। সুতরাং $2+3=5$.

(2) 3 কে (-2) এর সহিত যোগ করিতে (-2) চিহ্নিত বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া 3 ঘর উপরের দিকে উঠিলে $+1$ চিহ্নিত বিন্দুতে আসা যায়। সুতরাং $(-2)+3=+1$.

+5
+4
+3
+2
+1
o 0
−1
−2
−3
−4
−5

আবার, x এবং y দুইটি ধনসংখ্যা হইলে, $x+y=y+x$, সুতরাং ঋণসংখ্যাগুলি যোগ করিবার পদ্ধতিও এইরূপভাবে লইতে হইবে, যেন $3+(-2)=(-2)+3=+1$ হয়। এইজন্য 3 এর সহিত -2 যোগ করিতে $+3$ চিহ্নিত বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া নীচের দিকে 2 ঘর নামিয়া $+1$ চিহ্নিত বিন্দুতে যাইতে হয়।

$\therefore\ 3+(-2)=+1$; সেইরূপ, $5+(-3)=+2$ ইত্যাদি।

এইরূপে দেখা যায় যে, যখন কোন ধনসংখ্যা যোগ করিতে হয়, তখন স্কেলটির উপরের দিকে উঠিতে হয় এবং কোন ঋণসংখ্যা যোগ করিতে হইলে নীচের দিকে নামিতে হয়।

এক্ষণে, $3-2=1$. $\therefore$ $3+(-2)$ এর অর্থ $3-2$.

সেইরূপ, $5+(-3)=5-3$ ইত্যাদি।

সুতরাং ঋণসংখ্যার যোগ অর্থে উহার পরম মানের পূর্বে একটি ঋণ-চিহ্ন দিতে হইবে, ইহাই বুঝা যায়। যথা, $a+(-b)=a-b$.

উদা. (*i*) যদি কোন ব্যবসায়ী প্রথমে 35 টাকা লাভ করিয়া পরে 50 টাকা লাভ করে তবে তাহার মোট $(+35)+(+50)=(+85)$, অর্থাৎ 85 টাকা লাভ হয়। বন্ধনী-মধ্যস্থ '+' চিহ্নটির দ্বারা নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা বুঝা যায়, কিন্তু বন্ধনীর বহিঃস্থ '+' চিহ্নটি একটি ক্রিয়াবাচক চিহ্ন মাত্র।

(*ii*) যদি প্রথমে 35 টাকা লাভ করিয়া পরে 50 টাকা ক্ষতি হয়, তবে তাহার মোট $(+35)+(-50)=-15$, অর্থাৎ 15 টাকা ক্ষতি হয়।

(*iii*) যদি প্রথমে 35 টাকা ক্ষতি হইয়া পরে আবার 50 টাকা ক্ষতি হয়, তাহা হইলে মোট $(-35)+(-50)=(-85)$, অর্থাৎ 85 টাকা ক্ষতি হইবে।

37. ঋণসংখ্যার বিয়োগ (Subtraction of Negative Numbers)

গণিতশাস্ত্রে ঋণসংখ্যার প্রবর্তন হওয়ায় বিয়োগের সাধারণ প্রক্রিয়াটি একটি যোগের প্রক্রিয়ায় পরিণত হইয়াছে। যেমন, 5 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইলে এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয় যাহা 3 এর সহিত যোগ করিলে সমষ্টি 5 হয়, অর্থাৎ

$$5-3=5+(-3)=(-3)+5=2.$$

আবার 3 হইতে (-2) বিয়োগ করিতে হইলে এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহার সহিত (-2) যোগ করিলে সমষ্টি 3 হয়। পূর্ব অনুচ্ছেদের চিত্র হইতে দেখা যায় যে, (-2) ও 3 চিহ্নিত বিন্দু দুইটির মধ্যস্থ দূরত্ব 5;

$$\therefore \quad 3-(-2)=3+2=5.$$

সুতরাং কোন ঋণসংখ্যা বিয়োগ করিতে হইলে শুধু ইহার পূর্ববর্তী ঋণ-চিহ্নটির পরিবর্তন করিয়া উহাকে যোগ করিতে হয়, অর্থাৎ দুইটি বিয়োগ-চিহ্ন একত্র একটি যোগ-চিহ্নে পরিণত হয়। যথা, $a-(-b)=a+b$.

উদা. 1. 3° ও -2° ডিগ্রি তাপের পার্থক্য 5°, অর্থাৎ 3° তাপ -2° হইতে 5° বেশি।

উদা. 2. (*i*) কোন বালক দুইবার খেলিয়া মোট 45 টি মার্বেল পাইল। যদি সে প্রথমে 32 টি পাইয়া থাকে তবে দ্বিতীয়বারে সে মাত্র 13 টি পাইয়াছে, অর্থাৎ

$$+45-(+32)=(+13)\text{; অথবা } 45-32=13.$$

(*ii*) যদি প্রথম সে 32 টি মার্বেল হারিয়া থাকে তবে শেষ খেলায় সে 77 টি জিতিয়াছে, কারণ

$$(+45)-(-32)=+77,\text{ অর্থাৎ } 45-(-32)=45+32=77.$$

(*iii*) যদি সে মোট 45 টি মার্বেল হারিয়া থাকে এবং প্রথমবারে 32 টি হারিয়া থাকে, তবে দ্বিতীয়বারে মাত্র 13 টি হারিয়াছে, কারণ

$$(-45)-(-32)=(-13),\text{ অথবা } (-45)-(-32)=-45+32=-13.$$

প্রশ্নমালা 4

1. যদি 15 টাকা সঞ্চয় −15 এই সংখ্যা-দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে 20 টাকা ব্যয় কি ভাবে প্রকাশ করিবে?

2. 5 টাকাকে একক ধরিয়া "−20 টাকা লাভ" কিরূপে বুঝাইবে?

3. যদি কোন বিন্দুর উত্তরস্থ 4 ফুট দূরত্বকে 12 দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহা হইলে উক্ত বিন্দুর দক্ষিণস্থ 9 ফুট দূরত্বকে কি ভাবে প্রকাশ করিবে?

4. কোন ব্যক্তির 125 পাউণ্ড সঞ্চিত আছে এবং সে 200 পাউণ্ড ধার করিল। তাহার প্রকৃত তহবিল কত হইবে?

5. যাহার 10 টাকা আছে এবং যাহার −50 টাকা আছে এই দুই ব্যক্তির আর্থিক অবস্থা তুলনা কর।

6. কোন বালক সাপ্তাহিক পরীক্ষায় গড়ে 75 নম্বর পায়। যদি তাহার দুই সপ্তাহের নম্বর যথাক্রমে +20 ও −17 বেশি হয় তবে তাহার প্রকৃত নম্বর কত?

7. কোন ব্যক্তির তহবিল −95 টাকা, কিন্তু প্রথমে তাহার তহবিলে 135 টাকা ছিল। এখন তাহার তহবিলে কি পরিবর্তন হইয়াছে?

8. সমুদ্রের সমতল হইতে কোন একটি বিন্দুর উচ্চতা 200 ফুট। উক্ত বিন্দু হইতে 500 ফুট নিম্ন স্থানের উচ্চতা কত?

9. তাপের পরিমাণ -12° হইতে -6°তে পরিবর্তিত হইল। কি পরিবর্তন হইল বলিতে পার? a° হইতে b° অথবা -5° হইতে -3°তে পরিবর্তিত হইলে কি পরিমাণ তাপ বাড়িল বা কমিল?

10. বিষুবরেখার 38° উত্তর এবং 33° দক্ষিণস্থ দুই স্থানের অক্ষাংশের (latitude) পার্থক্য কত?

11. একখানা জাহাজ $14^\circ\ 5'\ 45''$ E. দেশান্তরস্থ (longitude) নেপলস হইতে $63^\circ\ 35'\ 17''$ W. দেশান্তরস্থ হালিফাক্স শহরে গেলে, উহা দেশান্তরের কত ডিগ্রি, কত মিনিট এবং কত সেকেণ্ড অতিক্রম করিল?

12. একটি এঞ্জিন কোন স্টেশনের 200 ফুট উত্তরের এক স্থান হইতে আরম্ভ করিয়া আরও 300 ফুট উত্তরে গিয়া পরে 600 ফুট দক্ষিণে আসিল। এখন উক্ত এঞ্জিনটি স্টেশন হইতে কত উত্তরে রহিল?

13. 1432 ফুট উচ্চে অবস্থিত একখানি উড়োজাহাজ 516 ফুট নীচে নামিল। পরে ইহার ব্যালাস্ট (ballast) ফেলিয়া দিলে আবার 628 ফুট উচ্চে উঠিল এবং ইহার পর 875 ফুট নামিয়া পড়িল। এখন উহার উচ্চতা কত?

14. 4, $3\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, 0 এই সংখ্যাগুলিকে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ কর।

38. ঋণসংখ্যা-দ্বারা গুণন (Multiplication by Negative Numbers)

প্রত্যেক বার লাভের পরিমাণ 3 হইলে দুই বারে মোট লাভের পরিমাণ 6 হয় এবং প্রত্যেক বার ক্ষতির পরিমাণ 3 হইলে 5 বারে মোট ক্ষতি 15 হইবে।

অর্থাৎ $(+3)\times(+2)=(+6)$, অথবা $3\times2=6$.

এবং $(-3)\times(+5)=(-15)$, অথবা $(-3)\times5=-15$.

যেহেতু গুণন যোগের একটি সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া মাত্র, $3\times2=3+3=6$. সেইরূপ, $(-3)\times5=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-15$.

আবার, x এবং y দুইটি ধনরাশি হইলে, $x\times y=y\times x$, সুতরাং ঋণরাশি-সম্বন্ধেও এই নিয়মটি প্রযোজ্য হওয়া আবশ্যক।

$$\therefore\quad (-3)\times 5=5\times(-3)=-15.$$

সুতরাং সাধারণভাবে, $a\times(-b)=-ab$.

আবার, $(-3)\times 5=-15$ এবং $(-5)\times 3=-15$, এবং একটি ঋণরাশি (-3) কে আর একটি ঋণরাশি (-5) দ্বারা গুণ করিলে গুণফলের চিহ্ন $(-3)\times 5$ এই গুণফলটির বিপরীত হইবে।

অর্থাৎ $(-3)\times(-5)=-(-15)=+15$.

অতএব সাধারণভাবে, $(-a)\times(-b)=(+ab)$.

উদা. 1. কোন ব্যক্তির দৈনিক সঞ্চয় 3 টাকা। 4 দিন পরে তাহার মোট সঞ্চয় হইবে টা. $3\times 4=12$ টাকা, অর্থাৎ $3\times 4=12$. কিন্তু 4 দিন পূর্বে (এখন হইতে -4 দিনে) তাহার সঞ্চয় অদ্যকার সঞ্চয় হইতে 12 টাকা কম ছিল।

$$\therefore\quad (+3)\times(-4)=(-12),\quad \text{অথবা}\quad 3\times(-4)=-12.$$

উদা. 2. যদি তাহার দৈনিক ক্ষতি 3 টাকা হয়, 4 দিন পরে তাহার মোট ক্ষতি দাঁড়াইবে 12 টাকা, অর্থাৎ

$$(-3)\times(+4)=-12,\quad \text{অথবা}\quad (-3)\times 4=-12.$$

কিন্তু 4 দিন পূর্বে তাহার সঞ্চয় 12 টাকা বেশি ছিল। সুতরাং

$$(-3)\times(-4)=(+12),\quad \text{অথবা}\quad (-3)\times(-4)=+12.$$

গুণন প্রক্রিয়ার চিহ্নসম্বন্ধে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পাওয়া যায় :—

(+) যোগ × (+) যোগ = (+) যোগ
(+) যোগ × (−) বিয়োগ = (−) বিয়োগ
(−) বিয়োগ × (+) যোগ = (−) বিয়োগ
(−) বিয়োগ × (−) বিয়োগ = (+) যোগ।

অর্থাৎ গুণন-প্রক্রিয়ায় সদৃশ চিহ্নদ্বারা (+) যোগ চিহ্ন এবং অসদৃশ চিহ্নদ্বারা (−) বিয়োগ চিহ্ন পাওয়া যায়।

39. ঋণসংখ্যা-দ্বারা ভাগ (Division by Negative Numbers)

সহজেই বুঝা যায় যে, লাভের পরিমাণ 6 হইলে তাহার অর্ধেক লাভের পরিমাণ 3 হইবে, অর্থাৎ $(+6)\div 2=(+3)$, অথবা $6\div 2=3$. সেইরূপ, ক্ষতির পরিমাণ 6 হইলে তাহার অর্ধেক ক্ষতির পরিমাণ 3 হইবে, অর্থাৎ $(-6)\div 2=(-3)$, অথবা $-6\div 2=-3$.

বিষয়টি অন্যরূপেও বিবেচনা করা যাইতে পারে। কোন্ সংখ্যাকে (-2) দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 6 হইবে ?

যেহেতু $(-3)\times(-2)=6$, নির্ণেয় ভাগফল (-3) হইবে,

অর্থাৎ $6\div(-2)=-3$; এইরূপ $(-6)\div(-2)=+3$.

সাধারণভাবে, $a\div(-b)=-\frac{a}{b}$ এবং $(-a)\div(-b)=+\frac{a}{b}$

ভাগপ্রক্রিয়ায়ও গুণনপ্রক্রিয়ার চিহ্ন-ব্যবহারের নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

40. 0 চিহ্নটির অর্থ

গণিতে সংখ্যা প্রকাশ করিবার জন্য শূন্যকে একটি অঙ্ক বলিয়া গণ্য করা হয় এবং উহাতে শূন্যের বহুল ব্যবহার আছে। সুতরাং ইহার প্রকৃত অর্থ জানা বিশেষ আবশ্যক। যখন দ্বাদশ শতাব্দীতে ইউরোপে প্রথম সংখ্যা-প্রকরণ-প্রণালী প্রবর্তিত হয়, তখন সম্ভবত এই '0' চিহ্নটি আবিষ্কৃত হয় নাই। তখন কোন স্থানে অঙ্কের অভাব বুঝাইবার জন্য মাত্র একটি বিন্দু (.) ব্যবহৃত হইত। যেমন, 508 লিখিতে 5.8 লেখা হইত। ব্যবসায়-সংক্রান্ত হিসাবেই এই সকল অঙ্কের বহুল ব্যবহার ছিল এবং অসাবধানতাবশত কোন প্রকারে বিন্দুটি মুছিয়া গেলে বিষম ভুলের সৃষ্টি হইত। এই জন্য একটি ভাল চিহ্ন ব্যবহারের উপযোগিতা উপলব্ধ হওয়ায় বিন্দুর পরিবর্তে ○ এই চিহ্নটি ব্যবহৃত হইত। এই চিহ্নটিই ক্রমে পরিবর্তিত হইয়া শূন্যের আকার প্রাপ্ত হইয়াছে। সুতরাং কোন সংখ্যায় '0' (শূন্য) অঙ্কটির অর্থ এই যে, সেই স্থলে কোন অঙ্ক নাই। শূন্যের এই ব্যাখ্যানুসারে নিম্নলিখিত ফল কয়টি সহজেই পাওয়া যায় :—

$$x+0=x;\quad x-0=x;\quad 0-x=-x;\quad 0.x=0;$$
$$x.0=0;\quad 0\div x=0;\quad x-x=0.$$

$x\div0$ এর অর্থ হয় না। কোন রাশি x কে শূন্য-দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, এমন একটি রাশি নির্ণয় করিতে হইবে যাহাকে 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল x হইবে। কিন্তু ইহা সহজেই অনুমেয় যে, এই প্রশ্নের কোনই উত্তর হইতে পারে না। কারণ যে-কোন সংখ্যাকে 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল সর্বদাই 0 হয়। বস্তুত যদি x কে কোন সংখ্যা a দ্বারা ভাগ করা যায়, তাহা হইলে

a র মান ক্রমে ক্রমে কমিতে থাকিলে, ভাগফলটির মানও ক্রমে ক্রমে বাড়িতে থাকিবে এবং পরিশেষে যখন a র মান ক্রমশ শূন্যের নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, তখন ভাগফলটির মানও ক্রমে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে পরিশেষে অত্যন্ত বৃহৎ বা অসীম হইয়া যাইবে। তখন ইহাকে **অনন্ত** (Infinity) বলা হয় এবং '∞' এই চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করা হয়।

প্রশ্নমালা 5

যদি $x=2$, $y=3$ এবং $z=-5$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির **মান** (value) নির্ণয় কর :—

1. $x+z$; $x-y$; $x\times y$; $x\div y$; $2x\div z$.

2. $\dfrac{2y-5x}{3x+2z}$; $\dfrac{3y-4x}{3y-7x}$; $\dfrac{5x-3y}{x+2y}$.

$x=-2$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

3. $2x^2$; $(2x)^2$; $4x$; $-4x$; $4\div x$.

4. x^2-3x+1 ; $x^2-3(x+1)$; $(2x-3)(x+1)$; $(2x-3)x+1$.

5. x^3+3x^2+5+0 ; $(x+1)(3-2x+x^2-0)$;
$(x+1)(x+2)(x+3)$.

যদি $a=4$ এবং $b=-3$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

6. $a+b$; $-b+0$; $(-b)^2$; $-2ab$; a^2-2b.

7. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; $\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)}$; $\dfrac{a^2+b}{b^2+a}$; $\dfrac{2b+3a}{2a+3b}$.

8. $(-2)^2$ এবং $(+2)^2$ এর মান নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, x^2 এর বর্গমূলের দুইটি মান $(+x)$ এবং $(-x)$.

9. -16° হইতে -4° তাপের পরিমাণে কি প্রভেদ ?

10. তাপের পরিমাণ প্রতি মিনিটে 1° হিসাবে 5 মিনিট পর্যন্ত কমিল। পূর্বে উহা 0° ছিল ; বর্তমানে উহার পরিমাণ কত ? যদি প্রথমে উহা 5° হয় তবে এখন উহার পরিমাণ কত ?

11. একখানা জাহাজ বিষুবরেখা হইতে ঠিক উত্তরে 40° অক্ষাংশ পর্যন্ত গিয়া পরে যদি ঠিক দক্ষিণে 20° অক্ষাংশ পর্যন্ত যায়, তবে উহা অক্ষাংশের কত ডিগ্রি পরিভ্রমণ করিল ?

12. আমার ঘড়িটি স্কুলের ঘড়ি অপেক্ষা 3 মিনিট ফাস্ট (fast)। স্কুলের ঘড়ি ঠিক সময় অপেক্ষা 5 মিনিট স্লো (slow). আমার ঘড়ি ঠিক সময় অপেক্ষা কত ফাস্ট বা স্লো ?

13. একখানা উড়োজাহাজ স্থির বায়ুতে ঘণ্টায় 64 মাইল যায়। যদি বায়ুর বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল হয়, তবে বায়ুর বিপরীত দিকে যাইতে তাহার বেগ কত হইবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

সাধারণ চারটি নিয়ম (The Four Simple Rules)

41. সাধারণ চারটি নিয়ম

পাটীগণিতে ধনসংখ্যাগুলির যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ এই চারটি প্রক্রিয়া-সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়। বীজগণিতে এই নিয়মগুলি ঋণ-সংখ্যাগুলি-সম্বন্ধেও ব্যবহৃত হয়। পাটীগণিতে অঙ্কগুলি-সম্বন্ধে যেরূপে এই নিয়মগুলি ব্যবহার করা যায়, বীজগণিতের অক্ষর-দ্বারা সূচিত সংখ্যাগুলি-সম্বন্ধেও ঠিক সেইরূপেই এই নিয়মগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

42. সদৃশ পদের যোগ (Addition of Like Terms)

5 টাকার সহিত 2 টাকা যোগ করিলে সমষ্টি 7 টাকা হয়। 5 টাকা হইতে 2 টাকা বাদ দিলে 3 টাকা অবশিষ্ট থাকে। এখন যদি টাকার চিহ্ন (symbol) x ধরা যায়, তবে

$$5x+2x=7x,$$
$$5x-2x=3x\,;$$

কিন্তু 2 টি গরু ও 5 টি ঘোড়া একত্র 7 টি ঘোড়া হয় না বা 7 টি গরুও হয় না। যদি x গরুর চিহ্ন এবং y ঘোড়ার চিহ্ন ধরা যায়, তবে উহাদের সমষ্টি $2x+5y$ এইরূপে লেখা যায়।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, দুইটি সদৃশ পদের সমষ্টি করিতে হইলে তাহাদের সহগ দুইটির সমষ্টি লইতে হয় এবং একটি হইতে আর একটি বিয়োগ করিতে হইলে তাহাদের সহগের বিয়োগফল লইতে হয়।

অসদৃশ পদের সমষ্টি বা বিয়োগফল নিরূপণ করিতে হইলে শুধু যে পদটি যোগ বা বিয়োগ করিতে হইবে তাহার পূর্বে + বা − চিহ্ন বসাইতে হয়।

উদা. 1. $2a$ এবং $3a$ র সমষ্টি কত?

এস্থলে $2+3=5$; সুতরাং $2a+3a=5a$.

উদা. 2. $7x$ হইতে $3x$ বিয়োগ কর।

এস্থলে $7-3=4$. $\therefore\ 7x-3x=4x$.

উদা. 3. x এবং $2y$ এর সমষ্টি কত ?

এস্থলে সমষ্টি $x+2y$ এইরূপে লিখিতে হয়; কারণ x এবং $2y$ দুইটি অসদৃশ পদ।

উদা. 4. $8b$ হইতে $5a$ বিয়োগ কর।

এস্থলে পদ দুইটি অসদৃশ, সুতরাং তাহাদের বিয়োগফল $8b-5a$ এইরূপে লিখিতে হয়।

43. কতিপয় সদৃশ পদের সমষ্টি (Addition of Several Like Terms)

পদগুলি হয় ধনপদ বা ঋণপদ; সুতরাং তিন প্রকার সম্ভাবনা-সম্বন্ধে বিবেচনা করিতে হইবে :—

(1) সবগুলি ধনপদ,

(2) সবগুলি ঋণপদ,

বা (3) কতক ধনপদ, কতক ঋণপদ।

১ম প্রকার। সবগুলি ধনপদ হইলে, তাহাদের সমষ্টিও একটি ধনপদ এবং তাহাদের সাংখ্যেয় সহগগুলির সমষ্টিই এই যোগফলটির সহগ হইবে; কারণ দুই বা তদধিক লাভের সমষ্টিও লাভই হইবে।

উদা. x, $3x$ এবং $5x$ এর সমষ্টি কত ?

এস্থলে, সমষ্টি $=x+3x+5x=(1+3+5)x=9x$;

অর্থাৎ বিভিন্ন সদৃশপদের সহগগুলির সমষ্টিই যোগফলে x এর সহগ হইবে।

সেইরূপ, $13a+7a+a+4a=(13+7+1+4)a=25a$.

২য় প্রকার। সবগুলি ঋণপদ হইলে, উহাদের সমষ্টিও একটি ঋণপদ হইবে; কারণ একাধিকবার ক্ষতি হইলে মোটের উপরও ক্ষতি হইবে, এবং এই ক্ষতির পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে বিভিন্ন বারের ক্ষতির পরিমাণ যোগ করিতে হইবে।

উদা. $-x, -5x, -8x, -17x$ এর সমষ্টি কত ?

এস্থলে ক্রমান্বয়ে 1, 5, 8 এবং 17 টি সদৃশবস্তু বিয়োগ করিবার অর্থ এই যে, একবারে $(1+5+8+17)$, অর্থাৎ 31 টি বস্তু বিয়োগ করিতে হইবে।

সুতরাং উহাদের সমষ্টি $=(-x)+(-5x)+(-8x)+(-17x)=-31x.$

নিয়ম। একই চিহ্নযুক্ত কতিপয় সদৃশপদের সমষ্টি ঐ চিহ্নযুক্ত একটি সদৃশপদ হয় এবং এই শেষোক্ত পদটির সংখ্যাবাচক সহগটি উক্ত পদসমূহের সহগ-গুলির সমষ্টি।

৩য় প্রকার। যখন কতকগুলি ধনপদ এবং ঋণপদের সমষ্টি করিতে হয়, তখন ধরা যাইতে পারে যে, কয়েক বারের লাভের সহিত কয়েক বারের ক্ষতি মিলিত হইয়াছে। যদি লাভগুলির সমষ্টি ক্ষতির সমষ্টি হইতে বৃহত্তর বা লঘুতর হয়, তাহা হইলে মোটের উপর শেষফলও লাভ বা ক্ষতি হইবে।

এস্থলে নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া যায় :—

নিয়ম। বিভিন্ন চিহ্নযুক্ত কতিপয় সদৃশপদের সমষ্টিও একটি সদৃশপদ। ইহার সহগ নির্ণয় করিতে হইলে ধনপদগুলির সংখ্যাবাচক সহগসমূহ যোগ কর এবং সেইরূপে ঋণপদগুলির সহগগুলিও যোগ কর। এই দুই সমষ্টির অন্তরে বৃহত্তর সমষ্টির চিহ্ন যোগ করিয়া দিলেই নির্ণেয় সহগ পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $15a$ এবং $-7a$ ইহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে সহগ দুইটির সমষ্টি $=15+(-7)=15-7=8$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=8a.$

উদা. 2. $3x, \ -2x, \ 9x, \ -5x$ এবং x এর সমষ্টি কত ?

এস্থলে, ধনপদগুলির সহগের সমষ্টি $=3+9+1=13,$

এবং ঋণপদগুলির সহগের সমষ্টি $=2+5=7$,

এই সমষ্টিদ্বয়ের অন্তর $=13-7=6$, এবং বৃহত্তর সমষ্টির চিহ্ন $+$, সুতরাং

নির্ণেয় সমষ্টি $=(13-7)x=6x.$

দ্রষ্টব্য 1. দুইটি বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট রাশির সাংখ্যেয় মান সমান হইলে উহাদের সমষ্টি শূন্য হয়। যথা, $3x+(-3x)=0.$

দ্রষ্টব্য 2. ধন বা ঋণপদগুলির চিহ্ন ঠিক রাখিয়া উহাদিগকে যে-কোন

পর্যায়ে যোগ করা যায়; তাহাতে ফলের কোন ব্যতিক্রম হয় না। এই নিয়মকে "পদ-সংগ্রহ" (collecting terms) বলে।

দ্রষ্টব্য 3. রাশিগুলি '+' বা '−' চিহ্ন-দ্বারা যুক্ত হইলে, সম্পূর্ণ রাশিটিকে উহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি (algebraic sum) বলে। এস্থলে মনে রাখিতে হইবে, "সমষ্টি" (sum) শব্দটি পাটীগণিত এবং বীজগণিতে একই অর্থে ব্যবহৃত হয় না। বীজগণিতে ধনপদ এবং ঋণপদ-সমূহের সমষ্টি করা যাইতে পারে এবং যথাযথ চিহ্ন-বিশিষ্ট রাশিগুলির সমষ্টিকেই বীজগণিতীয় সমষ্টি বলে। যথা,

$$9+3+(-12)+1+(-10)+(-7)=9+3-12+1-10-7$$
$$=-16.$$

44. অসদৃশ পদের যোগ (Addition of Unlike Terms)

অসদৃশ পদসমূহের যোগফল, সদৃশপদের ন্যায়, বিভিন্নপদের সহগগুলির বীজগণিতীয় যোগফল নির্ণয় করিয়া নির্ধারণ করা যায় না।

দৃষ্টান্ত। 5 টাকা, 6 আনা এবং 10 পাইকে সমজাতীয় রাশিতে পরিবর্তিত করিয়া না লইলে উহাদের সমষ্টি 5 টাকা 6 আনা 10 পাই এইরূপে লিখিত হয়। এইরূপ বীজগণিতেও দুই কিংবা তদধিক অসদৃশ রাশির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে যোগচিহ্ন-দ্বারা যুক্ত করিয়া রখিতে হয়। যেমন, a এবং b এর সমষ্টি $a+b$ এইরূপে লিখিত হয়; x, $2y$ এবং $3x$ এর সমষ্টি $x+2y+3x$ এইরূপে লিখিত হয়; ইহা অপেক্ষা আর সরল করা যায় না।

a এবং $(-b)$ এর যোগফল $a+(-b)=a-b$;

সুতরাং কোন রাশির সহিত $-b$ এই ঋণরাশিটি যোগ করিলে এবং ঐ রাশি হইতে b এই ধনরাশিটি বিয়োগ করিলে একই ফল পাওয়া যায়।

45. বিয়োগ (Subtraction)

বিভিন্ন চিহ্নযুক্ত সদৃশপদসমূহের যোগফল নির্ণয়-প্রসঙ্গে সহজ সহজ বিয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। যেমন,

$$3x+(-x)=3x-x=2x;\quad 6a+(-8a)=6a-8a=-2a;$$
$$-7p+(-3p)=-7p-3p=-10p.$$

এই সকল ক্ষেত্রে কতকগুলি ঋণরাশি যোগ করা হইয়াছে এবং ইহা সহজেই বুঝা যায় যে, এইরূপ যোগের এবং কতকগুলি ধনরাশি-বিয়োগের একই অর্থ।

সুতরাং একটি ধনরাশি বিয়োগ করিলে এবং একই পরমমান-বিশিষ্ট (absolute value) একটি ঋণরাশি যোগ করিলে একই ফল পাওয়া যাইবে। এই দুইটি সিদ্ধান্ত একত্র নিম্নলিখিত নিয়মের আকারে প্রকাশ করা যায় :—

নিয়ম। দুই রাশির বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে, বিয়োজ্য রাশির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া অপর রাশির সহিত যোগ করিতে হয়।

উদা. 1. $9xy$ হইতে $4xy$ বিয়োগ কর।

এস্থলে, $9xy$ এর সহিত $-4xy$ যোগ করিতে হইবে।

$$\therefore \quad 9xy-4xy=9xy+(-4xy)=(9-4)xy=5xy.$$

উদা. 2. $6abc$ হইতে $-15abc$ বিয়োগ কর।

এস্থলে, $6abc$ এর সহিত $+15abc$ যোগ করিতে হইবে।

$$\therefore \quad 6abc-(-15abc)=6abc+15abc=21abc.$$

46. বন্ধনীর ব্যবহার (Use of Brackets)

26 অনুচ্ছেদে বর্ণিত ব্যাখ্যা হইতে বুঝা যায় যে, $a+(b+c)$ দ্বারা b এবং c এর সমষ্টিকে a র সহিত যোগ করিতে হইবে। b এবং c এর একটিকে a র সহিত যোগ করিয়া সেই যোগফলের সহিত অন্যটিকে যোগ করিলেও একই ফল পাওয়া যাইবে। সুতরাং

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

সেইরূপ, $$a+(b-c)=a+b-c.$$

অতএব, বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীস্থিত রাশিমালার চিহ্নের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনীটি অপসারিত হইতে পারে।

পুনরায়, $a-(b+c)$ এর অর্থ এই যে, b এবং c এর সমষ্টিকে a হইতে বিয়োগ করিতে হইবে; b এবং c এর একটিকে a হইতে বিয়োগ করিয়া সেই বিয়োগফল হইতে অন্যটিকে বিয়োগ করিলেও একই ফল পাওয়া যায়।

$$\therefore \quad a-(b+c)=a-b-c.$$

সেইরূপ, $$a-(b-c)=a-b+c.$$

অতএব, বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলেও ঐ বন্ধনী অপসারিত হইতে পারে, কিন্তু সেস্থলে বন্ধনীর ভিতরের সমস্ত পদের চিহ্নই পরিবর্তন করিতে হইবে।

উদা. 1. সরল কর : $9x+(6x-2x)$.

প্রদত্ত রাশি $=9x+6x-2x=(9+6-2)x=13x$.

এস্থলে বন্ধনী অপসারণ করিবার পরও বন্ধনীস্থিত সমস্ত পদের চিহ্ন পূর্ববৎ রহিয়াছে।

উদা. 2. সরল কর : $17xy-(15xy+4x)-(3xy-2x)$.

প্রদত্ত রাশি $=17xy-15xy-4x-3xy+2x$
$=(17-15-3)xy-4x+2x$
$=-xy+(-4+2)x$
$=-xy-2x$.

এস্থলে বন্ধনীস্থিত সমস্ত পদের চিহ্নই পরিবর্তন করা হইয়াছে।

উদা. 3. বন্ধনী অপসারণ করিয়া $a^2+2ab-b^2-(a^2-b^2+2ab-\overline{a^2-b^2})$ রাশিমালাটি সরল কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2+2ab-b^2-(a^2-b^2+2ab-a^2+b^2)$
$=a^2+2ab-b^2-a^2+b^2-2ab+a^2-b^2$
$=(1-1+1)a^2+(2-2)ab+(-1+1-1)b^2$
$=a^2+0.ab-b^2=a^2-b^2$.

এস্থলে প্রথমে রেখা-বন্ধনীটি অপসারিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। অন্যান্য বন্ধনীসংবলিত উদাহরণ পরে দেওয়া হইবে।

প্রশ্নমালা 6

নিম্নলিখিত রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $3x$ এবং $4x$. 2. $2x$ এবং $-3y$. 3. a এবং $4a$.
4. $2ab$, $-6ab$ এবং $9ab$. 5. $5a^2$, $3a^2$ এবং $16a^2$.

নিম্নলিখিত যোগ এবং বিয়োগ-ক্রিয়াগুলি সম্পন্ন কর :—

6. $5a+9a$. 7. $-7x+(-x)$. 8. $a^2-(-3x^2)$.
9. $21xy-13xy$. 10. $75p+(-25p)$. 11. $6ax-(+9ax)$.

12. $17x^3+12x^3$. 13. $6abc-4abc$. 14. $28xyz+(-7xyz)$.

বিয়োগ কর :—

15. $5x$ হইতে $3x$. 16. $22y$ হইতে $9y$. 17. $8x^2$ হইতে $11x^2$.

18. $13ax^2y$ হইতে $4ax^2y$. 19. $35abxy$ হইতে $19abxy$.

সরল কর :—

20. $x+2x+5x$. 21. $7a+4a-8a$.

22. $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x^2+2x^2$. 23. $9b+16b-13b$.

24. $8a^2-24a^2-17a^2+3a^2$. 25. x^2+x+3x^2-5x.

26. $3x^2-y^2+9x^2-4y^2$. 27. $y^2-x^2+3x+2x^2$.

28. $a^2b-ab+ab^2-3a^2b+ab^2$. 29. $ax-by+6ax+4x+3by$.

$a=4$ এবং $b=3$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের বিয়োগফল কত ?

30. a^2+a এবং a^3. 31. $3a+b$ এবং $3ab$. 32. $a+b^2$ এবং ab^2.

33. a^2-a এবং $2a-a^2$. 34. a^3-b^2 এবং $3a-2b$.

বন্ধনী অপসারণ করিয়া নিম্নলিখিত রাশিমালা-সমূহ সরল কর :—

35. $-5x+(11x-6x)$. 36. $(8x^2-3x^2)+(7x^2-4x^2)$.

37. $(a^2+b^2)-(a^2-b^2)+(2a^2-b^2)$.

38. $p^2-(6p^2-2p^2)+8p^2$. 39. $3(ax+by)-(3ax+by)$.

40. $x^2-y^2+(x^2+2xy+y^2)-(4y^2-3xy+x^2)$.

41. $(5a-2b)-(3a-4b)-(2a+7b)$.

42. $abc-(6a+bc)-(2a+3bc-abc)$.

সরল কর :—

43. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}-\frac{a}{5}$. 44. $\frac{xy}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{xy}{9}$. 45. $\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}b$.

46. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}$. 47. $\frac{3a^2}{8}-\frac{5b^2}{6}-\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{4}$.

48. $2x$, $3x$ এবং $5x$ এর সমষ্টি 40 হইলে, x এর মান কত হইবে ?

49. $7x$, $-9x$ এবং $5x$ এর বৈজিক যোগফল 12 হইলে, x এর মান কত ?

50. দুইটি রাশির সমষ্টি $8x$, তাহাদের একটি $5x$ হইলে, অপরটি কত ?

51. দুইটি রাশির অন্তর $6a$, বৃহত্তরটি $9a$ হইলে, অপরটি কত ?

47. মিশ্ররাশি-মালার যোগ (Addition of Compound Expressions)

যোজ্য রাশিগুলি একাধিক পদবিশিষ্ট হইলে কেবলমাত্র সদৃশ পদগুলি একসঙ্গে যোগ করিতে হইবে। বস্তুত বীজগণিতে মিশ্ররাশি-সমূহের যোগ পাটীগণিতের মিশ্ররাশির যোগের ন্যায় একই নিয়মে সাধিত হয়।

নিয়ম। কতিপয় মিশ্ররাশি-মালা যোগ করিতে হইলে, রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে আর একটি এইরূপ ভাবে বসাইতে হয় যে, বিভিন্ন রাশিমালাস্থ সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে (column) পড়ে। তারপর বাম দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক পাটির সমষ্টি রাশিমালা-সমূহের পাদদেশে অঙ্কিত একটি রেখার নিম্নে রাখিতে হয়।

উক্ত নিয়মানুসারে সদৃশ পদগুলি পাটিক্রমে সাজাইবার সময়ে রাশিমালাস্থ পদগুলিকে, প্রয়োজন হইলে, সুবিধামত সাজাইয়া লইতে হয়, কারণ বীজগণিতীয় রাশিমালাস্থ পদগুলি যে-কোন পর্যায়ে লিখিলেও রাশিমালাটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

উদা. 1. $a-2b+c,\ 2a+3b-5c$ এবং $3a-4b-2c$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

সদৃশ পদগুলি পাটিক্রমে লিখিয়া নিম্নলিখিতরূপে যোগ-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা হইল :—

$$\begin{array}{r|r|r} a & -2b & +\ c \\ 2a & +3b & -5c \\ 3a & -4b & -2c \\ \hline 6a & -3b & -6c \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= 6a-3b-6c.$

কার্যত উল্লম্ব (vertical) রেখাগুলি বর্জিত হইয়া থাকে।

উদা. 2. $3x-5y+z,\ 2x+3y-4$ এবং $-4x+2y$ যোগ কর।

সদৃশ পদগুলিকে পাটিক্রমে সাজাইয়া :—

$$\begin{array}{r|r|r|r} 3x & -5y & +z & \\ 2x & +3y & & -4 \\ -4x & +2y & & \\ \hline x & & +z & -4 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= x+z-4.$

প্রথম পাটিতে লিখিত পদসমূহের বৈজিক সমষ্টি x এবং দ্বিতীয় পাটির পদ-সমূহের সমষ্টি শূন্য। তৃতীয় এবং চতুর্থ পাটিতে মাত্র এক একটি পদ থাকায় উহাদিগকেই নিম্নে রাখা হইল।

প্রশ্নমালা 7

$a=3, b=4, x=1, y=2$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালা-সমূহের মান কত হইবে?

1. $a+a^2+a^3$. 2. a^2+b^2+2ab. 3. $2x+x^2+3x^3$.

4. a^2+x+b^2+y. 5. $a^3+b^3+a^2x+b^2y$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় কর :—

6. $a+b,\ \ a-b$. 7. $a+b-c,\ \ a-b+c$.

8. $a+b+c,\ \ a-b-c,\ \ c-a+b$.

9. $x+y+z,\ \ x-y+z,\ \ x+y-z,\ \ y+z-x$.

10. $2x-y+3z,\ \ x+4y-z,\ \ 4x+2y-2z$.

11. $-xy+yz+zx,\ -3xy-2yz+3zx,\ \ xy+yz-zx$.

12. $2a^2+4ax+3x^2,\ \ a^2-3ax+2x^2,\ \ ax-x^2,\ \ a^2+x^2$.

13. $x^2-y^2,\ \ x^2+2xy+y^2,\ \ 4y^2-3xy+x^2$.

14. $a^3+b^3+c^3,\ \ a^3-2b^3+c^3,\ \ 3a^3-4b^3-4c^3$.

15. $a^3-a^2+a,\ \ a^2-a+1,\ \ a^4-a^3-1$.

16. যদি $X=ax+by+cz$, $Y=-ax+by-cz$, $Z=ax-by+cz$ হয় তবে $X+Y+Z$ এবং $X-2Y+3Z$ এর মান কত হইবে?

17. সরল কর :—

$$12+(3x-ax)+(4ax-3y)+(ax+5y-16)+(4y-32-3ax).$$

18. $5t^2+3t+2$ এবং $2t^2+5t+3$ এর যোগফল নির্ণয় কর এবং $t=10$ হইলে, প্রত্যেক রাশিমালার মান কত হইবে নির্ণয় কর।

19. $f(x)\equiv x^2-6x+7$, $F(x)\equiv 3x^2+8x-15$, $K(x)\equiv -7x^2+9x+5$ এবং $x=2$ হইলে, $f(x)+F(x)+K(x)$ এর মান কত হইবে? $x=-3$ হইলেই বা উহার মান কত হইবে?

20. $A \equiv x^2 - xy + y^2$, $B \equiv 2x^2 + 3xy + 4y^2$ এবং $C \equiv y^2 - xy - 2x^2$; $x = 3$ এবং $y = 5$ হইলে, $A+B+C$ এর সংখ্যাত্মক মান কত হইবে নির্ণয় কর।

48. সরল রাশিসমূহের গুণন (Multiplication of Simple Expressions)

পাটীগণিতে দেখা যায় যে, গুণন যোগেরই একটি সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া মাত্র। যেমন, 2 কে 3 দ্বারা গুণ করিবার অর্থ 2 কে 3 বার লইয়া যোগ করিলে কত হয় তাহা নির্ণয় করা, সুতরাং $2 \times 3 = 2+2+2 = 6$.

এইরূপ, বীজগণিতেও একটি রাশি দুই বা তদধিক বার লইয়া একত্র যোগ করিলে কত হয় তাহা নির্ণয় করিবার সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়াকে গুণন বলে। যেমন, $a \times b$ এর অর্থ a কে b বার যোগ করা; অর্থাৎ $a \times b = a + a + \cdots (b)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= a \times b$.

$2 \times 3 \times 4$ দ্বারা বুঝা যায় যে, 2 এবং 3 এর গুণফলকে, অর্থাৎ 2×3 কে 4 দ্বারা গুণ করিতে হইবে, কিন্তু ইহার দ্বারা $2 \times 3 \times 2 \times 4$ বুঝা যায় না।

এইরূপ, $2ab$ এর অর্থ $2 \times a \times b$, কিন্তু $2a \times 2b$ নয়।

কোন বন্ধনীর মধ্যে দুই বা তদধিক পদ থাকিলে বন্ধনীর বহিঃস্থ গুণনীয়ক-দ্বারা উহাদের প্রত্যেকটিকে গুণ করিতে হয়। যথা,

$$2(3+4) = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14.$$

সেইরূপ, $x(y+z) = xy + xz$.

উদা. 1. $3x$ কে $5y$ দ্বারা গুণ কর।

$$3x \times 5y = 3 \times 5 \times x \times y = 15xy.$$

উদা. 2. $x + 2y$ কে $3z$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x+2y) \times 3z = x \times 3z + 2y \times 3z = 3xz + 6yz.$$

49. গুণনের পর্যায় (Order of Multiplication)

যেমন পাটীগণিতে কোন গুণফলের অন্তর্গত গুণনীয়কগুলির ক্রম পরিবর্তন করিলে ঐ গুণফলের কোন পরিবর্তন হয় না, সেইরূপ বীজগণিতেও a এবং b যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন,

$$a \times b = b \times a, \quad \text{অর্থাৎ} \quad ab = ba.$$

যেহেতু, a এবং b যে-কোন মানবিশিষ্ট হইলেই এই নিয়ম প্রযোজ্য, সুতরাং a, b এবং c ও যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন,

$$abc = (ab) \times c = (ba)c = bac,$$
$$bac = b \times ac = bca,$$
$$bac = (ba) \times c = c \times (ba) = cba \text{ ইত্যাদি ।}$$

ইহা হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, গুণনীয়কগুলির ক্রম যথেচ্ছ পরিবর্তন করা যাইতে পারে।

ইহাকে গুণনের **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) বলে।

উদা. $a \times 2b \times 3c = 2 \times 3 \times a \times b \times c = 6abc.$

50. গুণনের সংযোগ নিয়ম (Associative Law)

$$\begin{aligned} abcd &= a \times b \times c \times d \\ &= (ab) \times (cd) \\ &= a \times (bc) \times d \\ &= a \times (bcd). \end{aligned}$$

ইহাই গুণনের সংযোগ নিয়ম ; এই নিয়ম অনুসারে গুণনীয়কগুলিকে যদৃচ্ছা-ক্রমে সঙ্ঘবদ্ধ করা যায়।

উদা. 1. $3x$ কে $-4y$ দ্বারা গুণ কর।

38 অনুচ্ছেদে বর্ণিত চিহ্ন-সমূহের নিয়মাবলী হইতে দেখা যায় যে, গুণফল একটি ঋণরাশি (negative), এবং আমরা ইহাও জানি যে,

$$3x \times 4y = 3 \times 4 \times x \times y = 12xy ;$$
$$\text{সুতরাং } 3x \times (-4y) = -12xy.$$

উদা. 2. $-5ax$ কে $-6by$ দ্বারা গুণ কর।

এস্থলে গুণফলটি ধনরাশি (positive) হইবে (অনু. 38) ;

সুতরাং $(-5ax) \times (-6by) = 30abxy.$

51. গুণনের সূচক নিয়ম (Index Law)

গুণনের সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, $a^3 = a \times a \times a$ এবং $a^4 = a \times a \times a \times a.$

$$\therefore \quad a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaa.aaaa = a^{3+4}.$$

এইরূপ সাধারণভাবে, m এবং n যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হউক না কেন,

$$a^m \times a^n = (a.a.a \cdots\cdots m\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}) \times (a.a.a \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত})$$
$$= a.a.a \cdots\cdots (m+n)\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}$$
$$= a^{m+n}.$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, গুণনীয়কগুলির a র সূচকসমূহ যোগ করিয়া গুণফলে a র সূচক পাওয়া যায়। ইহাই গুণকের সূচক নিয়ম।

দুইটির অধিক সংখ্যক গুণনীয়কের গুণফল নির্ণয়কালেও উক্ত নিয়ম প্রয়োগ করা চলিবে।

গুণনীয়কসমূহে বিভিন্ন অক্ষরের ঘাত বর্তমান থাকিলেও গুণফলের অন্তর্গত প্রত্যেক অক্ষরের সূচকই উক্ত নিয়মানুসারে নির্ণয় করা হয়, কিন্তু সূচক-নির্ণয়-কালে এক অক্ষরের সূচকের সহিত অন্য অক্ষরের সূচক যেন যোগ করা না হয়, এ বিষয়ে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য। ঋণরাশির যুগ্ম ঘাত ধন এবং অযুগ্ম ঘাত ঋণ হইবে।

উদা. 1. $5x^2$ কে $8x^5$ দ্বারা গুণ কর।

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = 5x^2 \times 8x^5$$
$$= 5 \times 8 \times x^{2+5} = 40x^7.$$

উদা. 2. $2a^2$, $3a^5$ এবং $5a^7$এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = 2a^2 \times 3a^5 \times 5a^7$$
$$= 2 \times 3 \times 5 \times a^{2+5+7}$$
$$= 30a^{14}.$$

উদা. 3. $7a^2x^3y^4$ কে $5ax^5y^6z^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = 7a^2x^3y^4 \times 5ax^5y^6z^2$$
$$= 7 \times 5 \times (a^2 \times a) \times (x^3 \times x^5) \times (y^4 \times y^6) \times z^2$$
$$= 7 \times 5 \times a^{2+1} . x^{3+5} . y^{4+6} . z^2$$
$$= 35a^3x^8y^{10}z^2.$$

দ্রষ্টব্য। $(x^2)^3$ এবং $x^2 \times x^3$ এর প্রভেদ লক্ষ্য করা আবশ্যক।

$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x^{2+2+2} = x^6$; কিন্তু $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$.

প্রশ্নমালা 8

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির দ্বারা গুণ কর :—

1. $3a, b.$ 2. $-xy, 2x.$ 3. $5x^2, xy^2.$
4. $a^3, ab.$ 5. $-a^2b, 3.$ 6. $(x+y), x.$
7. $(x-y), a^2.$ 8. $(x+2y), (-xy).$ 9. $(a+b), ab.$
10. $3abc, (-2a^2b^2c^2).$

সরল কর :—

11. $x^2 \times x.$ 12. $x^3 \times xy^2.$ 13. $a^4 \times a^3.$
14. $2a^2x^3 \times 5bx^2.$ 15. $x^2 \times x^a.$ 16. $x^a \times x^b.$
17. $5x^4y^3 \times (-4y^2z^2).$ 18. $xy^2 \times yz^2 \times zx^2.$
19. $a^2b^3 \times b^4c^3 \times cd^4.$
20. $(3x^3y^2z) \times (-x^2y^3z^4) \times (7xy^3z).$
21. $-ax^2$, x^3y^2 এবং a^2b^6 রাশিগুলির তৃতীয় ঘাত নির্ণয় কর।
22. $(a^4)^5$ এবং $a^4 \times a^5$ এর প্রভেদ কি ?
23. $a=2$, $b=3$, $x=4$ এবং $z=5$ হইলে, $(b^4)^6$, $(-z^2)^5$ এবং $(a^2x^2)^3$ এর মান নির্ণয় কর।
24. $ab+b$, $x+2xy$ এবং x^2+xy এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

52. সরল রাশিসমূহের ভাগ (Division of Simple Expressions)

পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও ভাগক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হইলে এমন একটি রাশি নির্ণয় করিতে হয় যদ্দ্বারা ভাজক রাশিটিকে গুণ করিলে ভাজ্য রাশিটি পাওয়া যায় ; ইহা অনেক সময় ভাজ্য এবং ভাজকের গুণনীয়ক নির্ণয় করিয়াও সম্পন্ন করা যায়।

যথা, $$24 \div 8 = \frac{24}{8} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = 3 ;$$

$$2a^2b \div ab = \frac{2a^2b}{ab} = \frac{2 \times a \times a \times b}{a \times b} = 2a ;$$

$$x^5 \div x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{x \times x \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}} = x^2.$$

ভাগ গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া ; কারণ আমরা জানি, $\frac{a}{b} \times b = a$, অর্থাৎ $(a \div b) \times b = a$;

অর্থাৎ, ভাগফল × ভাজক = ভাজ্য ।

দ্রষ্টব্য 1. $\frac{a}{b}$ অথবা a/b ইহার অর্থ $a \div b$.

দ্রষ্টব্য 2. যেহেতু $1 \times a = a$, সুতরাং $a \div a = 1$.

দ্রষ্টব্য 3. যেহেতু ভাগ গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া, অতএব গুণনের 'বিনিময়' এবং 'সংযোগ' নিয়ম ভাগের পক্ষেও প্রযোজ্য ।

উদা. 1. যেহেতু $3 \times x = 3x$, সুতরাং $3x$ কে 3 দ্বারা ভাগ করিলে x হইবে এবং x দ্বারা ভাগ করিলে 3 হইবে ।

$$\therefore \quad 3x \div 3 = x \text{ ; এবং } \quad 3x \div x = 3.$$

উদা. 2. $45x^3y^4z^2$ কে $9x^2y^3z$ দ্বারা ভাগ কর ।

$$45x^3y^4z^2 \div 9x^2y^3z$$
$$= \frac{5 \times 9 \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times y \times \cancel{z} \times z}{9 \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{z}}$$
$$= 5 \times x \times y \times z = 5xyz.$$

53. অপসারণ-প্রক্রিয়া (Rule of Cancelling)

$4x$ কে $2x$ দ্বারা ভাগ করিলে এবং 4 কে 2 দ্বারা ভাগ করিলে একই ফল 2 পাওয়া যায় ; এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কেই x দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে ; এইরূপ ভাগ করাকে x অপসারণ করা হইয়াছে বলা হয় । সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, ভাজ্য এবং ভাজক উভয় হইতে উহাদের সাধারণ গুণনীয়ক অপসারণ করা যাইতে পারে এবং ইহাতে ভাগফলের কোনরূপ ব্যতিক্রম হয় না ।

দ্রষ্টব্য । অপসারণ-প্রক্রিয়া-প্রয়োগ-সম্বন্ধে বিশেষ সতর্ক হওয়া প্রয়োজন । লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে, কেবলমাত্র সাধারণ গুণনীয়কগুলিই অপসারণ করা

যায়। যথা, $4x \div 2x = 2$, কিন্তু $(4+x) \div (2+x)$, 2 এর সমান নহে; কারণ $4+x$ এবং $2+x$ এর এমন কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই যাহাকে অপসারণ করা যাইতে পারে।

54. ভাগের সূচক-নিয়ম (Index Law)

উপরি উক্ত নিয়মানুসারে $x^5 \div x^3 = x^2 = x^{5-3}$ এবং $x^3 \div x^5 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{5-3}}$; এইরূপ সাধারণভাবে, m এবং n যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হউক না কেন, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, অর্থাৎ ভাগফলের যে-কোন অক্ষরের সূচক ভাজ্য এবং ভাজকস্থ ঐ অক্ষরটির সূচকদ্বয়ের বিয়োগফল সমান হইবে। ইহাই ভাগের সূচক-নিয়ম এবং ইহা গুণনের "সূচক-নিয়ম" হইতে সহজেই অনুমিত হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য 1. যেহেতু $a \div a = 1$, এবং বর্তমান নিয়মানুসারে, $a \div a = a^{1-1} = a^0$; সুতরাং $a^0 = 1$ এবং $x^p \div x^p = x^0 = 1$.

অতএব কোন রাশির সূচক 'শূন্য' হইলে, উহার মান সর্বদাই 'এক' হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. ভাজ্য এবং ভাজক বিভিন্ন অক্ষরের ঘাতের গুণফল হইলে, ভাগফলটিতেও ঐ অক্ষরগুলির ঘাত বর্তমান থাকিবে এবং প্রত্যেক ঘাতের সূচক ভাজ্য এবং ভাজকের অন্তর্গত ঐ অক্ষরটির ঘাতদ্বয়ের সূচকের বিয়োগফলের সমান হইবে। যথা,

$$a^4b^6 \div a^3b^3 = \frac{a^4b^6}{a^3b^3} = a^{4-3}b^{6-3} = ab^3\ ;$$

সাধারণভাবে, $\frac{a^x b^y c^z}{a^p b^q c^r} = a^{x-p} b^{y-q} c^{z-r}$ ইত্যাদি।

উদা. 1. $16y^7$ কে $8y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$16y^7 \div 8y^2 = \frac{16y^7}{8y^2} = \frac{2 \times 8y^2 \times y^5}{8 \times y^2} = 2y^5.$$

উদা. 2. $45abc^3$ কে $5ac$ দ্বারা ভাগ কর।

$$= 45abc^3 \div 5ac = \frac{45abc^3}{5ac} = \frac{9 \times 5 \times a \times b \times c^3}{5 \times a \times c}$$

$$= 9 \times a^{1-1} \times b \times c^{3-1} = 9 \times a^0 \times b \times c^2$$

$$= 9bc^2.$$

55. চিহ্ন-সম্বন্ধীয় নিয়ম (Rule of Signs)

গুণনের চিহ্ন-সম্বন্ধীয় নিয়মগুলি ভাগের পক্ষেও প্রযোজ্য (অনু. 38 ও 39)। সুতরাং,

$$xy \div x = y, \qquad xy \div (-x) = -y,$$
$$-xy \div x = -y, \qquad -xy \div (-x) = y.$$

অতএব গুণনের ন্যায় ভাগেও দুইটি রাশি সদৃশ চিহ্ন-বিশিষ্ট **হইলে, উহাদের** ভাগফল 'ধন', এবং অসদৃশ চিহ্ন-বিশিষ্ট হইলে উহাদের ভাগফল 'ঋণ' হইবে।

56. ভাগের 'বিচ্ছেদ-নিয়ম' (Distributive Law)

$a\times(b+c)=ab+ac$, উভয় পক্ষের সমান রাশি দুইটিকে a দ্বারা ভাগ করিলে,

$$b+c=\frac{ab+ac}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}.$$

সুতরাং $a+b$ কে c দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, a এবং b এর প্রত্যেককে c দ্বারা ভাগ করিয়া আংশিক ভাগফলদ্বয়ের সমষ্টি লইতে হয়।

সাধারণত, একটি মিশ্ররাশিকে একটি একপদ (monomial) রাশি-দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাজ্যের প্রত্যেক পদকে ভাজক-দ্বারা ভাগ করিয়া আংশিক ভাগফলসমূহের সমষ্টি লইতে হয়।

ইহাকে ভাগের **বিচ্ছেদ-নিয়ম** বলে।

দ্রষ্টব্য 1. লক্ষ্য করিতে হইবে যে, $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$,

কিন্তু $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ এর সমান নহে।

দ্রষ্টব্য 2. মনে রাখিতে হইবে যে, ভাজ্যটি মিশ্ররাশি হইলে উহার প্রত্যেকটি পদকে ভাজক-দ্বারা ভাগ করিতে হয়,—কেবল মাত্র একটি পদকে ভাগ করিলে ভুল হইবে, অর্থাৎ $\frac{3xy+x}{x}=3y$ বলিলে ভুল হইবে।

উদা. $3x^2y+15xy^2$ কে $3xy$ দ্বারা ভাগ কর।

$$(3x^2y+15xy^2)\div 3xy=\frac{3x^2y}{3xy}+\frac{15xy^2}{3xy}=x+5y.$$

57. গুণন এবং ভাগের ক্রম (Order of Division and Multiplication)

যোগ এবং বিয়োগের ন্যায় (অনু. 43, দ্রষ্টব্য 2) গুণন এবং ভাগের কার্যও যে-কোন ক্রম অনুসারে সম্পন্ন করা যায়।

যথা, $4 \times 6 \div 2 = 4 \div 2 \times 6 = 6 \div 2 \times 4$;

সেইরূপ, $x \times y \div z = x \div z \times y = y \div z \times x$.

ভাগ গুণনেরই বিপরীত প্রক্রিয়া এবং দুই বা তদধিক গুণনীয়কের ক্রমিক গুণফল নির্ণয়-কালে গুণনীয়কগুলি যে-কোন ক্রমে লেখা যাইতে পারে। সুতরাং দুই বা তদধিক ভাগচিহ্ন পর পর থাকিলে ঐ ভাগের ক্রিয়া-সমূহও যে-কোনও ক্রম অনুসারে সম্পন্ন করা যায়, এবং কোন রাশিকে পর পর কতকগুলি রাশির দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, ঐ রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিগুলির গুণফল-দ্বারা ভাগ করিলেও সেই একই ভাগফল পাওয়া যাইবে।

যথা, $x \div y \div z = x \div z \div y = x \div (yz) = x \div yz$.

কোন বন্ধনীর ভিতরে দুই বা তদধিক গুণ- অথবা ভাগ-চিহ্ন, অথবা উভয় চিহ্ন বর্তমান থাকিলে, বন্ধনী-মধ্যস্থ ক্রিয়াগুলি প্রথমে সম্পন্ন করিতে হয়।

যথা, $a \times (b \times c \div d) = a \times b \times c \div d$;

কিন্তু, $a \div (b \times c \div d) = a \div b \div c \times d$.

কোন বন্ধনীর ভিতরে কেবলমাত্র গুণ অথবা ভাগ অথবা উভয় চিহ্ন বর্তমান থাকিলেও ঐ বন্ধনী অপসারণ করা যাইতে পারে। বন্ধনীর পূর্বে $\times$ চিহ্ন থাকিলে, বন্ধনী অপসারণ-কালে বন্ধনী-মধ্যস্থ কোন চিহ্নের পরিবর্তন করিতে হয় না; কিন্তু বন্ধনীর পূর্বে $\div$ চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী-মধ্যস্থ প্রত্যেক চিহ্নকেই বিপরীত চিহ্নে পরিবর্তিত করিতে হয়, অর্থাৎ $\times$ চিহ্নকে $\div$ চিহ্নে এবং $\div$ চিহ্নকে $\times$ চিহ্নে পরিবর্তিত করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 9

নিম্নলিখিত প্রত্যেক প্রশ্নে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির দ্বারা ভাগ কর :—

1. $5a,\ a$; $3xy,\ x$; $12xy^2, 3xy$.
2. $16a^2b^3.\ 4ab$; $-8ax,\ 4x$; $48pq^2r,\ (-6pq)$.

3. $-x^3,\ \ x^2$; $(-7a^3),\ \ (-7)$; $6m^2,\ \ 3m$.

4. $15a^2x^4z^3,\ \ 5ax^2z^2$; $8a^2b^3c^5,\ \ -4ab^2c^3$.

5. $6x^a,\ \ 3a$; $x^n,\ \ x^3$; $3x^a,\ \ x^6$; $24y^{12},\ \ 8y^5$.

6. $(ab+b),\ b$; $(px^2+py^2),\ \ p$; $(axy+amn),\ a$.

7. $(mpq-mxy),\ \ m$; $(abc-bcd),\ \ bc$; $(ax-a^2x^2),\ \ ax$.

8. $(xy^2z-x^2yz^3),\ \ xyz$; $(p^3q^2r^4+p^2q^3r^4),\ \ p^2q^2r^2$.

9. $(a^2-ax+ay),\ \ a$; $(a-ax+ay),\ (-a)$; $(2x^2-bx-3cx)$, $(-x)$.

10. $(x^4-3x^3+4x^2),\ \ x^2$; $(3a^6-6a^4-9a^3),\ \ (-3a^3)$.

সরল কর :—

11. $ab\times(ab\div b)$; $ab\div(ab\div b)$; $x^2y^2\div(x\times y)$; $x^2y^2\times(x\div y)$.

12. $4ax^2\div(2a^2x\div ax)$; $15x^8\times(x^5\div x^2\div x)$; $18x^6y^8\div(12x^5y^4\div x^3y^3\times xy)$.

13. $-a^2b^3c\div(ab^2c^3\times a^2bc\div abc)$; $a^3x^3y^3\div(x^2y^2\times a^2x\div axy^2)$.

নিম্নলিখিত ভাগ-ক্রিয়াগুলি সম্পন্ন কর :—

14. $\dfrac{32a^4b^3c}{-8abc}$; $\dfrac{-60x^6y^7z^9}{12x^3y^4z^5}$; $\dfrac{25p^8q^8r^8}{5p^2q^2r^2}$.

15. $-3xy^2z^3$ কে কোন্ রাশির দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $6x^2y^4z^5$ হইবে ?

16. ভাজক a এবং ভাগফল b হইলে, ভাজ্য কত হইবে ?

17. $12a^2x^3b^2y^3$ কে কোন্ রাশির দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $3ax^2by^2$ হইবে ?

পঞ্চম অধ্যায়

সাংকেতিক বাক্য- ও সূত্র-গঠন

58. সাংকেতিক বাক্য (Symbolical Expressions)

ইতিপূর্বে বলা হইয়াছে যে, বীজগণিতে পাটীগণিতের নিয়মসমূহ ব্যাপকভাবে প্রযুক্ত হয় এবং ইহাতে পাটীগণিতের জ্ঞান প্রসারতা লাভ করে। ইহার সাহায্যে সাধারণ ভাষায় প্রকাশিত বিভিন্ন রাশির পরস্পর সম্বন্ধ অতি সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায়। ইহাই বীজগণিতের সর্বাপেক্ষা প্রয়োজনীয় ব্যবহার। বীজগণিতীয় প্রতীক, অর্থাৎ অক্ষর- এবং চিহ্ন-সমূহের সাহায্যেই উক্ত সম্বন্ধ সাংকেতিক আকারে প্রকাশ করা হয়। বিভিন্ন রাশির সম্বন্ধের এই সাংকেতিক বর্ণনকেই **সাংকেতিক বাক্য** (Symbolical Expression) বলে।

প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে সাংকেতিক বাক্য রচনা করা কঠিন। তাহাদের সুবিধার জন্য কি প্রকারে যে সংখ্যাসমূহ বীজগণিতীয় অক্ষর-দ্বারা সূচিত হইতে পারে, ইতিপূর্বে বহু সরল দৃষ্টান্ত-দ্বারা তাহা ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। আরও কয়েকটি উদাহরণ এখানে দেওয়া যাইতেছে।

59. সাংকেতিক বাক্যের দৃষ্টান্ত

(1) যেমন 4 অপেক্ষা 3 অধিক সংখ্যাটিকে $4+3$ এইরূপে লিখিতে হয়, সেইরূপ x অপেক্ষা 3 অধিক সংখ্যাটিকে $x+3$ এইরূপে লিখিতে হয়।

(2) যেমন 7 হইতে 5 বাদ দিলে $7-5$ পাওয়া যায়, সেইরূপ a হইতে b বাদ দিলে $a-b$ রাশিটি পাওয়া যায়।

(3) 4 এবং 5 এর গুণফল 4×5, এইরূপ x এবং y এর গুণফল $x\times y$ বা $x.y$ বা xy. [$4\times5=20$, 45 নয়; কিন্তু $x\times y=xy$.]

(4) 18 এর একটি গুণনীয়ক 6 হইলে অন্যটি $18\div6$ হইবে। এইরূপ a র একটি গুণনীয়ক b হইলে, অন্যটি $a\div b$ হইবে।

(5) দুই অঙ্কবিশিষ্ট 36 সংখ্যাটি 3 দশক এবং 6 এককের সমান, অর্থাৎ $3 \times 10+6=36$. এইরূপ দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্ক দুইটি x এবং y হইলে, সংখ্যাটি $10x+y$ এর সমান হইবে,—পাটীগণিতের ন্যায় xy হইবে না। [x এবং y এর স্থানীয় মান যথাক্রমে x দশক এবং y একক।]

(6) 5 টাকা $=(5 \times 16)$ আনা, এইরূপ x টাকা $=(x \times 16)$ আনা $=16x$ আনা। x মন $=40x$ সের ইত্যাদি।

(7) 25 মাইল পথ অতিক্রম করিতে 5 ঘণ্টা লাগিলে, গতির বেগ ঘণ্টায় $25 \div 5$ মাইল। এইরূপ x মাইল পথ অতিক্রম করিতে y ঘণ্টা সময় লাগিলে, গতির বেগ ঘণ্টায় $x \div y$ মাইল।

(8) রামের বর্তমান বয়স 10 বৎসর হইলে, 6 বৎসর পূর্বে তাহার বয়স $(10-6)$ বৎসর ছিল, এবং 6 বৎসর পরে তাহার বয়স $(10+6)$ বৎসর হইবে। এইরূপ, যদুর বর্তমান বয়স x বৎসর হইলে, y বৎসর পূর্বে তাহার বয়স $(x-y)$ বৎসর ছিল, এবং y বৎসর পরে তাহার বয়স $(x+y)$ বৎসর হইবে।

প্রশ্নমালা 10 (মৌখিক)

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি x, এবং তন্মধ্যে লঘুতরটি 6, বৃহত্তরটি কত ?

2. দুইটি সংখ্যার গুণফল 15, সংখ্যাদ্বয়ের একটি p হইলে, অপরটি কত হইবে ?

3. x শিলিংএ কত পেনি হইবে ?

4. y মনে কত ছটাক হইবে ?

5. এক ব্যক্তি x ঘণ্টায় 100 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিলে, ঐ ব্যক্তি প্রতি ঘণ্টায় কত মাইল অতিক্রম করিবে ? x মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিতে 10 দিন লাগিলে ঐ ব্যক্তি দৈনিক কত মাইল চলে ?

6. y মন জল ধরে এইরূপ পিপা হইতে x সের জল ধরে এইরূপ কতগুলি বোতল পূর্ণ করা যায় ?

7. x সংখ্যাটির অব্যবহিত পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী অখণ্ড সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

8. x অযুগ্ম সংখ্যাটির অব্যবহিত পরবর্তী অযুগ্ম সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

9. x যুগ্ম সংখ্যাটির অব্যবহিত পূর্ববর্তী যুগ্ম সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

10. 30 হইতে কোন একটি সংখ্যার আধিক্য, কোন একটি সংখ্যা হইতে 30 এর আধিক্য এবং কোন একটি সংখ্যা অপেক্ষা 30-বড় একটি সংখ্যাকে প্রতীক-দ্বারা প্রকাশ কর।

11. একটি বালকের বর্তমান বয়স x বৎসর। 18 বৎসর পূর্বে উহার বয়স কত ছিল এবং 8 বৎসর পরেই বা উহার বয়স কত হইবে?

12. 24 বর্গগজ ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট কোন আয়তক্ষেত্রের বিস্তার x গজ, উহার দৈর্ঘ্য কত?

13. x^2 বর্গইঞ্চি ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা (perimeter, অর্থাৎ চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য-সমষ্টি) নির্ণয় কর।

14. $3x$ এর মধ্যে a কতবার আছে?

15. একখানি পুস্তকের মূল্য 13 আনা হইলে, $5x$ খানি পুস্তকের মূল্য কত হইবে?

16. m সংখ্যার প্রত্যেকটি x এর সমান, সংখ্যাগুলির সমষ্টি এবং গুণফল নির্ণয় কর।

17. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিলে, x মাইল পথ অতিক্রম করিতে কত ঘণ্টা লাগিবে? ঘণ্টায় y মাইল বেগে চলিলে, x ঘণ্টায় কত মাইল পথ অতিক্রম করা যাইবে?

18. x ফুট দৈর্ঘ্য এবং y ফুট বিস্তার-বিশিষ্ট একটি ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়া ঢাকিয়া দিতে কত বর্গগজ কার্পেট লাগিবে?

19. x টাকা 12 জন লোকের ভিতর সমান ভাগে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল; প্রত্যেকে কত পাইল?

20. 20 কে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল; এক অংশ x হইলে, অন্য অংশ কত হইবে?

60. সংখ্যা- এবং গুণিতক-সমূহের সাংকেতিক পরিচয়

কোন অঙ্ক, সংখ্যা বা উহাদের গুণিতক-সমূহ প্রতীক-দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

I. ক্রমিক সংখ্যা। কোন সংখ্যা x দ্বারা সূচিত হইলে, ইহার পরবর্তী ক্রমিক সংখ্যা-সমূহ যথাক্রমে $x+1$, $x+2$, $x+3, \cdots$ হইবে; এবং ইহার পূর্ববর্তী ক্রমিক সংখ্যা-সমূহ যথাক্রমে $x-1$, $x-2$, $x-3, \cdots$ হইবে।

উদা. 1. যে-কোন পাঁচটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 5 এর গুণিতক হইবে।

ক্রমিক সংখ্যাগুলি $(x-2)$, $(x-1)$, x, $(x+1)$ এবং $(x+2)$ ধরা হইল; ইহাদের সমষ্টি $5x$, অতএব এই সমষ্টি 5 এর গুণিতক।

উদা. 2. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার প্রথমটি x, উহাদের গুণফল নির্ণয় কর।

এস্থলে, সংখ্যা দুইটি x এবং $x+1$;

$\therefore$ গুণফল $= x \times (x+1) = x^2 + x.$

II. যুগ্ম এবং অযুগ্ম সংখ্যা (Odd and Even Numbers)

প্রত্যেক যুগ্ম সংখ্যা দুই-দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং যুগ্ম সংখ্যাকে $2n$ দ্বারা সূচিত করা যায়। এস্থলে, n একটি অখণ্ড সংখ্যা। আবার, একটি অযুগ্ম সংখ্যা একটি যুগ্ম সংখ্যার অব্যবহিত পূর্বে বা পরে অবস্থিত; এবং $2n$ এই যুগ্ম সংখ্যার অব্যবহিত পূর্বে এবং পরে অবস্থিত অখণ্ড সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে $2n-1$ এবং $2n+1$; সুতরাং অযুগ্ম সংখ্যাকে সর্বদা $2n+1$ বা $2n-1$ দ্বারা সূচিত করিতে হইবে (এস্থলে n একটি অখণ্ড সংখ্যা)।

যেমন, 4 একটি যুগ্ম সংখ্যা, সুতরাং ইহাকে $2n$ দ্বারা সূচিত করা যায়। এস্থলে, $n=2$. 9 একটি অযুগ্ম সংখ্যা, সুতরাং ইহাকে $2n+1$ দ্বারা সূচিত করা যায়, এস্থলে $n=4$. 1 কেও $2n+1$ দ্বারা সূচিত করা যায়, এস্থলে $n=0$.

অতএব n কে শূন্য অথবা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা ধরিয়া, $2n+1$ দ্বারা 1 হইতে আরম্ভ করিয়া যে-কোন অযুগ্ম সংখ্যাকে সূচিত করা যায়।

যুগ্ম অথবা অযুগ্ম ঋণসংখ্যাকেও উল্লিখিত প্রতীকসমূহের দ্বারা সূচিত করা যায়; এস্থলে n কে অখণ্ড ঋণসংখ্যা ধরিয়া লইতে হইবে। অতএব, n কে ধন কিংবা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা ধরিয়া, যে-কোন যুগ্ম সংখ্যাকে $2n$ দ্বারা এবং যে-কোন অযুগ্ম সংখ্যাকে $2n-1$ অথবা $2n+1$ দ্বারা সূচিত করা যায়।

দ্রষ্টব্য। উক্ত সাংকেতিক নিয়মানুসারে সহজেই ঋণসংখ্যাগুলির যুগ্ম এবং অযুগ্ম ঘাত নির্ণয় করা যাইতে পারে।

যেহেতু, $(-1)^{2n} = +1$ এবং $(-1)^{2n+1} = -1$;

সুতরাং, $(-a)^{2n} = (-1)^{2n} \times a^{2n} = +a^{2n}$;

এবং, $(-a)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times a^{2n+1} = -a^{2n+1}.$

অর্থাৎ ঋণসংখ্যার যুগ্ম ঘাত **ধন** এবং অযুগ্ম ঘাত **ঋণ** হইবে।

উদা. 1. তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার মধ্যমটি x, অপর দুইটি কত ?

এস্থলে, x একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\therefore$ $x-1$ এবং $x+1$ ইহার সন্নিহিত যুগ্ম সংখ্যাদ্বয় ; সুতরাং পরবর্তী সন্নিহিত সংখ্যাদ্বয় অযুগ্ম হইবে এবং ইহারা $x-2$ এবং $x+2$ দ্বারা সূচিত হইবে। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি $x-2$ এবং $x+2$.

উদা. 2. যে-কোন তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি 3 এর গুণিতক হইবে। মনে কর, $2n+1, 2n+3$ এবং $2n+5$ তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যা।

উহাদের সমষ্টি $=(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$. ইহা $2n+3$ মধ্যম সংখ্যাটির তিনগুণ।

III. সংখ্যাসমূহের গুণিতক

(*i*) কোন সংখ্যা x দ্বারা সূচিত হইলে, উহার যে-কোন গুণিতককে nx দ্বারা সূচিত করা যায় ; এস্থলে n একটি অখণ্ড সংখ্যা।

(*ii*) n একটি অখণ্ড সংখ্যা হইলে, x দ্বারা বিভাজ্য যে-কোন সংখ্যাকে nx দ্বারা সূচিত করা যায়।

যেমন, $5x$, x দ্বারা বিভাজ্য এবং ইহা x এর একটি গুণিতক।

IV. আংশিক বিভাগ (Division into Parts)

একটি অখণ্ড সংখ্যাকে দুই বা তদধিক অংশে ভাগ করা যাইতে পারে। এস্থলে দুইটি বিষয় আলোচনাযোগ্য :—

(*i*) 12 কে দুই অংশে ভাগ করা হইলে, যদি এক অংশ 7 হয় তাহা হইলে অন্য অংশ $12-7=5$ হইবে ; এইরূপ, x এই অখণ্ড সংখ্যার দুই অংশের এক অংশ a হইলে, অন্য অংশ $x-a$ হইবে।

এস্থলে দুই অংশের সমষ্টি প্রদত্ত সংখ্যার সমান।

(*ii*) 15এর এক-তৃতীয়াংশ $15\div 3$, অথবা $15\times\frac{1}{3}$; এইরূপ x সংখ্যার p-তম অংশ $x\div p$, অথবা $x\times\dfrac{1}{p}=\dfrac{x}{p}$.

'21, 28এর কত অংশ ?' এই প্রশ্নের উত্তরে 21, 28 এর $21\div 28$, অথবা $\frac{21}{28}$ অংশ বলা হয়।

এইরূপ, a র $\dfrac{x}{a}$-তম অংশ x, কারণ a এবং $\dfrac{x}{a}$ এর গুণফল x.

উদা. 1. এক ব্যক্তি x দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে; সে ঐ কার্যের কত অংশ এক দিনে সম্পন্ন করিবে?

সম্পূর্ণ কার্যকে একক ধরিলে, ঐ ব্যক্তি এক দিনে কার্যটির $\frac{1}{x}$ অংশ সম্পন্ন করিবে।

উদা. 2. একটি সংখ্যার অর্ধেক ঐ সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা কত অধিক?

সংখ্যাটি x হইলে, $\frac{x}{2}$ ইহার অর্ধেক এবং $\frac{x}{3}$ ইহার এক-তৃতীয়াংশ।

$\therefore$ উহাদের বিয়োগফল $= \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) x = \frac{1}{6} x.$

$\therefore$ সংখ্যাটির অর্ধেক উহার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা ঐ সংখ্যার এক-ষষ্ঠাংশ অধিক।

V. সংখ্যার অঙ্কসমূহ (Digits of a Number)

পাটীগণিতে পূর্ণ সংখ্যা অঙ্ক-সাহায্যে লিখিত হয়; প্রত্যেক অঙ্কের দুই প্রকার মান আছে—'স্থানীয় মান' (local value) এবং 'প্রকৃত মান' (intrinsic value). যেমন, 325 সংখ্যাটি তিনটি অঙ্ক-দ্বারা গঠিত; ইহাদের প্রকৃত মান যথাক্রমে 3, 2 এবং 5; কিন্তু ইহাদের স্থানীয় মান যথাক্রমে 3×100, 2×10 এবং 5.

$$\text{সুতরাং,} \quad 325 = 300 + 20 + 5.$$

পুনরায়, অঙ্কগুলিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে 523 হয়, ইহা $5 \times 100 + 2 \times 10 + 3$ এর সমান।

এইরূপ, বীজগণিতেও 10 এর গুণিতক এবং 10 এর ঘাতসমূহের সাহায্যে যে-কোন সংখ্যাকে উহার অঙ্কসমূহ-দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যেমন, যদি দুইটি অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয় বাম দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে x এবং y হয়, তাহা হইলে সংখ্যাটি $10x + y$ এর সমান হইবে। অঙ্কগুলি বিপরীতক্রমে লিখিলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা $10y + x$ এর সমান।

উদা. তিনটি অঙ্ক-বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক তিনটি বাম দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে x, y এবং z; সংখ্যাটির মান নির্ণয় কর।

শতক স্থানের অঙ্কটি x, সুতরাং ইহার স্থানীয় মান $x \times 100$ বা $100x$. দশক স্থানের অঙ্কটি y, সুতরাং ইহার স্থানীয় মান $y \times 10$ বা $10y$.

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 100x + 10y + z$.

বিপরীতক্রমে লিখিলে, প্রাপ্ত সংখ্যাটি $= 100z + 10y + x$.

VI. মুদ্রাসমূহের সাংকেতিক পরিচয় (Representation of Coins)

5টা. 6আ. 4পা. $= 5 \times (16 \times 12) + 6 \times 12 + 4$, অর্থাৎ 1036 পাই-এর সমান; এইরূপ x টা. y আ. z পা. $= x \times (16 \times 12) + y \times 12 + z$, অথবা $(192x + 12y + z)$ পাই-এর সমান।

এইরূপে যে-কোন মিশ্ররাশিকে সমজাতীয় সরলরাশিতে পরিবর্তিত করা যায়; পক্ষান্তরে, যে-কোন সরলরাশিকে সমজাতীয় মিশ্ররাশিতে পরিবর্তিত করা যায়।

16 আনা $= 1$ টাকা, সুতরাং x আনা $= \frac{x}{16}$ টাকা;

এইরূপ, x পাই $= \frac{x}{12}$ আনা $= \frac{x}{12 \times 16}$ টাকা।

উদা. একটি থলিতে x টাকা এবং y আনা আছে। ইহা হইতে z আনা ব্যয় করা হইল; অবশিষ্ট মুদ্রার পরিমাণ পাই-এ প্রকাশ কর।

x টাকা $= 16x$ আনা;

$\therefore$ x টাকা y আনা $= (16x + y)$ আনা;

$\therefore$ অবশিষ্ট মুদ্রার পরিমাণ $= (16x + y) - z$ আনা

$= \{16x + y) - z\}$ আনা

$= 12 \times (16x + y - z)$ পাই।

প্রশ্নমালা 11

1. এমন চারটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের ক্ষুদ্রতমটি x হইবে।
2. এমন তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের মধ্যমটি a হইবে।

3. x বৎসর পরে এক ব্যক্তির বয়স y বৎসর হইলে তাহার বর্তমান বয়স কত নির্ণয় কর।

4. C সংখ্যক বালক-বালিকার ভিতর 25টি কমলালেবু সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। প্রত্যেকের ভাগে কতগুলি করিয়া পড়িবে?

5. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে হাঁটে; ঐ ব্যক্তি x ঘণ্টায় কত মাইল হাঁটিবে?

6. A র বয়স x বৎসর, B এর বয়স A র বয়স অপেক্ষা y বৎসর এবং C এর বয়স অপেক্ষা x বৎসর অধিক। C এর বয়স কত?

7. 11 বৎসর পূর্বে এক ব্যক্তির বয়স y বৎসর ছিল। তাহার বর্তমান বয়স কত?

8. 35 কে তিন অংশে বিভক্ত করা হইল; প্রথম অংশ x, দ্বিতীয় অংশ প্রথম অপেক্ষা y কম; তৃতীয় অংশ কত নির্ণয় কর।

9. a কে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল; অংশদ্বয়ের একটি b হইলে, অন্যটি অপেক্ষা b কত অধিক হইবে?

10. আমার পকেটে x টাকা আছে; আমি ইহার অর্ধেক হারাইয়া ফেলিলাম এবং পরে 50 টাকা ব্যয় করিলাম। পকেটে কত টাকা অবশিষ্ট রহিল?

11. এক ব্যক্তি কোন কার্যের $\frac{1}{a}$ অংশ এক দিনে সম্পন্ন করে. সমস্ত কার্য করিতে ঐ ব্যক্তির কত দিন লাগিবে?

12. একটি কর্ম সম্পন্ন করিতে এক ব্যক্তির x দিন লাগে; y টি ব্যক্তির ঐ কর্মটি করিতে কত দিন লাগিবে?

13. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় a মাইল করিয়া হাঁটে। x মাইল হাঁটিতে ঐ ব্যক্তির কত সময় লাগিবে?

14. একটি থলিতে x পাউণ্ড এবং y শিলিং আছে; উহা হইতে z পেনি ব্যয় করা হইল। অবশিষ্ট মুদ্রার পরিমাণ পেনিতে প্রকাশ কর।

15. x টি আমের মূল্য 1 টাকা হইলে, y টি আমের মূল্য কত হইবে?

61. সূত্র-গঠন (Construction of Formulæ)

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, বীজগণিত-সাহায্যে বিভিন্ন রাশির সম্বন্ধ যথাসম্ভব সংক্ষিপ্ত এবং সুষ্ঠুরূপে প্রকাশ করা যায়; এবং ইহাতে সময় ও শ্রমের লাঘব হয়। এইরূপ সম্বন্ধপ্রকাশক সংক্ষিপ্ত বাক্যাবলীকে **সূত্র** (formulæ) বলা হয়। সূত্রসমূহের ব্যাপক ব্যবহারের জন্যই বীজগণিত 'নিখিল পাটীগণিত' আখ্যা পাইয়াছে। এক্ষণে দুরূহ বিষয়গুলির সূত্রগঠন-প্রণালী বর্ণিত হইবে।

কেবলমাত্র অভেদ-সমূহই (identities) সূত্র নহে; পরন্তু যে-কোন পাটীগণিতীয় নিয়মের সাংকেতিক বাক্যের রূপকেই 'সূত্র' বলা যাইতে পারে।

উদা. ঘরের দৈর্ঘ্যকে বিস্তার-দ্বারা গুণ কর—ইহাই ঘরের মেঝের কালি নির্ণয় করিবার পাটীগণিতীয় নিয়ম। 'গুণ কর' এই বাক্যাংশের পরিবর্তে '×' চিহ্ন ব্যবহার করিলে নিয়মটি কিঞ্চিৎ সংক্ষিপ্ত হইবে, এবং

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{বিস্তার},$$

এই আকার ধারণ করিবে।

পুনরায়, দৈর্ঘ্য এবং বিস্তারের পরিবর্তে যথাক্রমে a এবং b লিখিলে নিয়মটি

$$\text{ক্ষেত্রফল} = a \times b,$$

এইরূপে লিখিত হইবে।

এখন ক্ষেত্রফল A দ্বারা সূচিত হইলে, নিয়মটি

$$A = a \times b \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই সংক্ষিপ্ত আকার ধারণ করিবে। এস্থলে A দ্বারা ক্ষেত্রফল, a দ্বারা দৈর্ঘ্য এবং b দ্বারা বিস্তার সূচিত হইতেছে।

এস্থলে (1) সূত্রটি A, a এবং b তিনটি রাশির মধ্যস্থ সম্বন্ধ প্রকাশ করিতেছে; রাশিত্রয়ের যে-কোন দুইটির মান প্রদত্ত হইলে তৃতীয়টির মান (1) এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ মনে কর, কোন ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 24 বর্গফুট এবং উহার দৈর্ঘ্য 6 ফুট, তাহা হইলে উক্ত সূত্রানুসারে ঐ মেঝের বিস্তার $A \div a$, অর্থাৎ $24 \div 6 = 4$ ফুট হইবে।

62. সূত্রের ব্যবহার (Use of Formulæ)

মনে হইতে পারে যে, সূত্রাবলী কেবলমাত্র কতকগুলি সাধারণ বাক্যসমূহের সাংকেতিক রূপ, সুতরাং ইহাদের অন্য কোন প্রয়োজনীয়তা নাই। কিন্তু বহু জটিল

প্রশ্নের সমাধান করিতে হইলে ইহাদের সাহায্যে নিরর্থক পুনরাবৃত্তি হইতে রক্ষা পাওয়া যায়। ইহাই সূত্রাবলীর প্রধান ব্যবহার।

উদা. 1. একজন কন্‌ট্রাক্টর দেখিল যে, 5 টি স্তম্ভ গঠন করিতে 15 জন লোকের 3 দিন লাগে। y দিনের মধ্যে x টি স্তম্ভ গঠন করিতে কত লোকের আবশ্যক হইবে, ইহা সে কি প্রকারে নির্ণয় করিবে ?

3 দিনে 5 টি স্তম্ভ গঠন করিতে 15 জন লোকের আবশ্যক,

$\therefore$ 1 দিনে 5 টি " " $15 \times 3 = 45$ " "

$\therefore$ 1 দিনে 1 টি " " $\frac{45}{5}$ বা 9 " "

তাহা হইলে, y দিনে 1 টি " " $\frac{9}{y}$ " "

$\therefore$ y দিনে x টি " " $\frac{9}{y} \times x$ " "

সুতরাং লোকসংখ্যা $= \frac{9x}{y}$; এই সূত্রটিতে x এবং y এর বিভিন্ন মান ধরিলেই বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় লোকসংখ্যা পাওয়া যাইবে। প্রত্যেক বার আর বৃথা পরিশ্রম করিয়া লোকসংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে না।

উদা. 2. কোন সংখ্যা N কে D দ্বারা ভাগ করা হইলে Q ভাগফল হয়, এবং R ভাগশেষ থাকে ; এই তিনটি রাশির মধ্যে সম্বন্ধ-প্রকাশক একটি সূত্র গঠন কর।

পাটীগণিতের নিয়মানুসারে 31 কে 4 দ্বারা ভাগ করিলে 7 ভাগফল হয় এবং 3 ভাগশেষ থাকে এবং

$$31 = 4 \times 7 + 3,$$

অর্থাৎ ভাজ্য = ভাগফল × ভাজক + ভাগশেষ।

সুতরাং ভাজ্য N, ভাজক D, ভাগফল Q এবং ভাগশেষ R হইলে, সহজেই

$$N = Q \times D + R$$

এই সূত্রটি পাওয়া যায়।

63. জ্যামিতিক সূত্র (Geometrical Formulæ)

জ্যামিতিক চিত্রাবলীর ধর্মও অতি সংক্ষেপে সূত্র-সাহায্যে প্রকাশ করা যায় ; এইরূপ সূত্র-সাহায্যে জ্যামিতিক প্রশ্ন-সমাধানেরও বিশেষ সুবিধা হয়।

I. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমির উপর অঙ্কিত সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট সামান্তরিকের (parallelogram) ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

সুতরাং ক্ষেত্রফলের পরিবর্তে A, ভূমির পরিবর্তে b এবং উচ্চতার পরিবর্তে h লিখিলে,

$$A = \frac{1}{2}h \times b$$

এই সূত্রটি পাওয়া যায়।

অতএব, $A = 15$ বর্গ ইঞ্চি এবং $b = 3$ ইঞ্চি হইলে, $h = 10$ ইঞ্চি হইবে।

II. বৃত্তের পরিধি উহার ব্যাসের π (pi) গুণ, π এর মান প্রায় $\frac{22}{7}$.

ব্যাসের পরিবর্তে d এবং পরিধির পরিবর্তে C লিখিলে,

$$C = \frac{22}{7}d$$

এই সূত্রটি পাওয়া যায়।

ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ, সুতরাং ব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করিলে উক্ত সূত্রটি $C = 2\pi r$, অথবা $C = 2 \times \frac{22}{7} \times r$ এই আকার ধারণ করে।

দ্রষ্টব্য। π একটি প্রতীক, ইহার মান যথাযথ নির্ণয় করা যায় না; ইহার আসন্নমান 3·14159⋯, প্রশ্ন-সমাধান-কালে ইহার মান সাধারণত $\frac{22}{7}$ ধরা হয়। অতএব ব্যাসার্ধ জানা থাকিলে পরিধি সহজেই নির্ণয় করা যায়।

III. বৃত্তের ক্ষেত্রফল A হইলে, উহা

$$A = \pi r^2$$

এই সূত্র-সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

IV. পিরামিডের উচ্চতা h এবং ভূমির ক্ষেত্রফল A হইলে, উহার ঘনফল V

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

এই সূত্রটি হইতে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। V কে ঘন এককে, A কে বর্গ এককে এবং h কে দৈর্ঘ্যের এককে প্রকাশ করিতে হইবে।

V. গোলকের পৃষ্ঠের কালি উহার ব্যাসার্ধের বর্গের 4π গুণ; সুতরাং পৃষ্ঠের কালি S হইলে, উহা

$$S = 4\pi r^2$$

এই সূত্রটির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

এইরূপ, গোলকের ঘনফল V

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

এই সূত্রটি হইতে পাওয়া যায়।

উদা. 1. একটি সাইকেলের চাকার ব্যাস 28 ইঞ্চি; 5 বার ঘুরিলে ঐ চাকা কত পথ অতিক্রম করিবে ?

চাকার পরিধি $= \pi d = \frac{22}{7} \times 28$ ইঞ্চি $= 88$ ইঞ্চি ;

সুতরাং, একবার ঘুরিলে চাকাটি 88 ইঞ্চি পথ অতিক্রম করে।

$\therefore$ 5 বার ঘুরিলে চাকাটি $88 \times 5 = 440$ ইঞ্চি, অর্থাৎ 12 গ. 8 ই. পথ অতিক্রম করিবে।

উদা. 2. একটি পিরামিডের উচ্চতা 8 ফুট এবং উহার ভূমির ক্ষেত্রফল 12 বর্গফুট, উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

এস্থলে, $A = 12$ বর্গফুট এবং $h = 8$ ফুট ;

$\therefore$ $V = \frac{1}{3} \times 12 \times 8$ ঘনফুট $= 32$ ঘনফুট।

প্রশ্নমালা 12

1. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র-সাহায্যে 4 ফুট ভূমি এবং 5 ফুট উচ্চতা-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. অনু. 62 এর উদা. 2 এ প্রতিষ্ঠিত সূত্র-সাহায্যে এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 32 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 21 হইবে এবং 13 ভাগশেষ থাকিবে।

3. AB সরল রেখাটিকে O বিন্দুতে দুই ভাগে বিভক্ত করা হইল; বীজগণিত-সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 = AB.\,AO + AB.\,OB.$$

4. a এবং b বাহু-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের (diagonal) দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিবার সূত্র গঠন কর।

5. $v = 40$, $u = 10$ এবং $s = 50$ হইলে, $v^2 - u^2 = 2fs$ এই সূত্র হইতে f এর মান নির্ণয় কর।

6. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য l ফুট, বিস্তার b ফুট এবং উচ্চতা h ফুট হইলে, ইহার (i) মেঝের ক্ষেত্রফল, (ii) পরিসীমা (perimeter) এবং (iii) চারটি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিবার সূত্র গঠন কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা 1

I

1. $3x^2$ এবং $(3x)^2$ এর প্রভেদ কি? $x=4$ হইলে, $(3x)^2-3x^2$ এর মান নির্ণয় কর।

2. সূচক এবং সহগের সংজ্ঞা লিখ। $2x^2+3x$ এবং x^3+5x^2 রাশিমালা দুইটির (*i*) সূচকগুলির সমষ্টি এবং (*ii*) সহগগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

3. সরল কর : (*i*) $2x^2 \times 3x^3$. (*ii*) $3x^2y^3 + 4xy^4$.

4. $2x+3x=15$ হইলে, $2x^3-3x^2$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $\pi = \dfrac{22}{7}$ এবং $r=2$ হইলে, $A = \pi r^2$ এই সূত্র হইতে A র মান নির্ণয় কর।

6. $2x$ ও $3y$ এর যোগফল, এবং $2xy$ ও $3x^2y^2$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

7. $x-(y-z)=x-y+z$ হইবে কেন বিশদরূপে বুঝাইয়া দাও।

8. $x=4$ এবং $y=5$ হইলে, 45 সংখ্যাটিকে x ও y দ্বারা প্রকাশ কর।

II

1. 12 A.D. বৎসরটি x দ্বারা সূচিত হইলে, $-3x$ দ্বারা কোন্ বৎসর সূচিত হইবে?

2. $3x+y$ এবং $3xy$ এর প্রভেদ কি? $x=3, y=6$ হইলে, রাশি দুইটির মান নির্ণয় কর।

3. a টাকা, b আনা এবং c পাই এর সমষ্টি পাই এ প্রকাশ কর। $a=3$, $b=5$ এবং $c=9$ হইলে, উত্তরটি কত হইবে?

4. $a=1, b=12$ এবং $n=12$ হইলে, $S=\dfrac{n}{2}(a+b)$ হইতে S এর মান নির্ণয় কর।

5. সরল কর : (*i*) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}$; (*ii*) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}$; (*iii*) $\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{3}$; (*iv*) $\dfrac{x}{2}\div\dfrac{x}{3}$.

6. $3x^3-5x^2y+y^4$ রাশিমালাটির সর্বোচ্চ ঘাত, সর্বনিম্ন ঘাত, ধনপদসমূহ এবং x^2 এর সহগ নির্দেশ কর।

7. নিম্নলিখিত রাশিগুলির শেষের পদ দুইটি বন্ধনীভুক্ত কর :—

$$x-2y+3z,\quad a^2+2ax-b^2,\quad a-5b-3c.$$

8. $2x+3$ টাকা হইতে $x+2$ টাকা খরচ করিলে, কত টাকা অবশিষ্ট থাকিবে ?

III

1. a এবং b এর সমষ্টি হইতে x এবং y এর সমষ্টির বিয়োগফল প্রকাশ করে, এমন একটি রাশিমালা লিখিয়া দেখাও।

2. $x=5$ এবং $y=3$ হইলে, $(x-y)^2$ এবং x^2-y^2 এর মান নির্ণয় কর।

3. 'সদৃশ' এবং 'অসদৃশ' পদের প্রভেদ কি ? $x^3-2ax+a^2-2x^3-x^2+3a^2+4ax+5x^2$ রাশিমালাটির সদৃশ পদগুলি নির্দেশ কর।

4. x পাউণ্ডকে আউন্সে, y মনকে ছটাকে এবং x টাকাকে পাই-এ প্রকাশ কর।

5. x^3, $3x$ এবং $\frac{x}{3}$ এর অর্থ কি ? $x=6$ হইলে, রাশিগুলির মান নির্ণয় কর।

6. একব্যক্তি x মাইল দূরবর্তী কোন স্থানাভিমুখে যাত্রা করিয়া ঘণ্টায় y মাইল বেগে x ঘণ্টা চলিল। সে গন্তব্য স্থান হইতে কত দূরে গেল ?

7. $a=4, b=6$ এবং $c=3$ হইলে, দেখাও যে $a+b\times c > a+bc$.

8. a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরল রেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর, এবং ঐ চিত্র হইতে প্রমাণ কর যে, উক্ত ক্ষেত্রটি ঐ রেখার অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণ।

IV

1. সরল কর : $3x^2+2x-xy-x^2+x+xy$.

2. রাশিমালার কোন পদের মান (degree) কি ? রাশিমালার মান কাহাকে বলে ? $3x^6-3x^5y^2+y^8$ রাশিমালাটির মান কত ? উক্ত রাশিমালাস্থ ঋণপদটির মান কত ?

3. a হইতে $b+c$ বিয়োগ করা হইয়াছে, এই বাক্য-প্রকাশক রাশিমালাকে (i) বন্ধনীযুক্ত এবং (ii) বন্ধনীহীন অবস্থায় লিখ।

4. $3ax$ কে কত দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $3a^2x^2-6ax^3$ হইবে ?

5. এমন তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের মধ্যপদ $2x$ হইবে। ঐ সংখ্যা তিনটির কোন্‌টি অযুগ্ম এবং কোন্‌টি যুগ্ম হইবে ?

6. পিতা পুত্র অপেক্ষা 25 বৎসর বড়, পিতার বয়স x বৎসর হইলে, পুত্রের বয়স কত হইবে ?

7. একটি বালক $x+y$ টি প্রশ্নের সমাধান করিল ; তাহার মধ্যে $y-x$ টি নির্ভুল হইলে, কতগুলি ভুল হইবে ?

8. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ x এবং y ডিগ্রি হইলে, তৃতীয় কোণটি কত হইবে ? [একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি $= 180°$.]

V

1. $x(y+2)$ হইতে $(x+2)y$ বিয়োগ করিলে কত অবশিষ্ট থাকিবে ?

2. $p=3$ এবং $q=2$ হইলে, p^2+q^2-2pq এর মান নির্ণয় কর।

3. $-x°$ এবং $-(x-2)°$ এর মধ্যে তাপের বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

4. $\sqrt{x}-y$ এবং $\sqrt{x-y}$ এর প্রভেদ কি ? $x=169$, $y=25$ হইলে, রাশি দুইটির বিয়োগফল নির্ণয় কর।

5. 9টা বাজিয়া x মিনিট হইতে 10টা বাজিতে x মিনিট পর্যন্ত কত মিনিট সময় ?

6. সরল কর (i) $x+\frac{x}{2}-2\left(x-\frac{x}{2}\right)$.

(ii) $3(x+2y)-5(y+2x)+2(x-3x)$.

7. 3^x এবং x^3 এর প্রভেদ কি ? $x=2$ হইলে, রাশি দুইটির বিয়োগফল নির্ণয় কর।

8. তিনটি অঙ্ক-বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলি বাম দিক হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে x, 0 এবং x হইলে, সংখ্যাটি কত ?

VI

1. সরল কর $2\{a-3(b-\overline{c+d})\}$.

2. $3a^2b+4ab^2$ কে ab দ্বারা ভাগ কর।

3. $4a^2+8ab-6b^2$ এবং $6a^2-ab-7b^2$ এর সমষ্টি হইতে $2a^2+4ab-5b^2$ বিয়োগ কর।

4. x শিলিং হইতে y শিলিং হারাইয়া গেলে (i) কত পেনি, বা (ii) কত পাউণ্ড অবশিষ্ট থাকিবে ?

5. আমি একখানি কাগজে $2n+1$ সংখ্যক সমান্তরাল সরল রেখা অঙ্কিত করিলাম ; n একটি পূর্ণ সংখ্যা হইলে, মধ্য রেখাটির অবস্থান নির্ণয় কর।

6. সাংকেতিক আকারে প্রকাশ কর : y এবং z এর বিয়োগফলের x গুণ ; z এবং x এর বিয়োগফলের y গুণ ; x এবং y এর বিয়োগফলের z গুণ। দেখাও যে, এইরূপে উৎপন্ন তিনটি রাশির সমষ্টি শূন্য।

7. q অপেক্ষা p বৃহত্তর হইলে, $x-q$ অপেক্ষা $x-p$ বৃহত্তর বা লঘুতর নির্ণয় কর। ইহাদের বিয়োগফল কত ?

8. p ঘণ্টা q মিনিটকে সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

VII

1. $x=4$, $y=-2$ এবং $z=3$ হইলে, $(x+2y)z$, $(x+2)(y+z)$ এবং $x+2(y+z)$ রাশিগুলির মান নির্ণয় কর।

2. $5x=35$ হইলে, x এর মান কত ?

3. $x=2y+3$ এবং $z=3y+4$; প্রমাণ কর যে, $3x-2z=1$.

4. 1, 2, 3,⋯ ⋯10 সংখ্যাগুলির মধ্যে কোন্‌গুলি x এর পরিবর্তে লিখিলে $\frac{3x+2}{4}$ ভগ্নাংশ হইবে ?

5. $x=3$ এবং $y=4$ হইলে, x-দশক ও y-একক-বিশিষ্ট সংখ্যা এবং 34 এর বিয়োগফল কত হইবে ?

6. $3x+5$ হইতে কোন্ সংখ্যাটি বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $3x$ হইবে ? $3x+5=26$ হইলে, x এর মান কত ?

7. একটি বিদ্যালয়ের 500 বালককে উচ্চ, মধ্য এবং নিম্ন—এই তিন শ্রেণীতে বিভক্ত করা হইল ; শ্রেণীগুলিতে যথাক্রমে $3(x-4)$, $4(x+5)$ এবং $(3x-8)$ টি বালক আছে। x এর মান এবং প্রত্যেক শ্রেণীর বালকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

8. x এর মান যথাক্রমে 1, 2, 3 হইলে, $3x^2-5x+2$ রাশিটির মানগুলি নির্ণয় কর।

VIII

1. $x=5$ হইলে, $4x+3=5x-a$ হইতে a র মান নির্ণয় কর।

2. $5x-3y-10z+9a$ এবং $5x-3y+10z-9a$ রাশিদ্বয়ের মধ্যে 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য পদগুলিকে বিভিন্ন বন্ধনীভুক্ত কর।

3. y টি এঞ্জিনে x টন কয়লা লাগিলে, z টি এঞ্জিনে কত কয়লা লাগিবে ?

4. তিনটি অঙ্ক-বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলি x, y এবং 0 হইলে, ঐ তিনটি অঙ্ক-দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

5. নিম্নলিখিত গুণফলগুলি যোগ কর :—

$$(x+1)(x-2),\quad (x+2)(x+3) \quad \text{এবং} \quad (x+3)(x+4).$$

6. সরল কর: $3(a^2-x^2)-2[x^2-\{a^2+ax+a(a-\overline{x-a})\}]$.

7. প্রত্যেকটি $5a$ পেনি মূল্যে 25 টি বস্তু ক্রয় করা হইল; উহাদিগকে মোট b পাউণ্ড মূল্যে বিক্রয় করিলে কত লাভ বা ক্ষতি হইবে তাহা পাউণ্ডে প্রকাশ কর।

8. $A=\pi r^2$ এই সূত্র-সাহায্যে 3 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\left[\pi=\frac{22}{7}\right]$.

IX

1. $x=10, a=3$ এবং $b=2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x-3a\div a+b$ এবং $(x-3a)\div(a+b)$ এর মান বিভিন্ন হইবে।

2. $1-2x^2+x$ হইতে কত বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল $2x-3x^2$ হইবে ?

3. $9x^2y-24xy^2$ কে $3xy$ দ্বারা ভাগ কর।

4. বন্ধনীগুলি অপসারণ করিয়া নিম্নলিখিত রাশিমালাটি সরল কর, এবং পরে x এর সদৃশ ঘাতসমূহের সহগগুলি বন্ধনীভুক্ত কর :—

$$ax^3-x\{b(x^2-x)-c(x-2)+a\}+x(x^2-2x-1).$$

5. একখানি বিদেশী চিঠির ডাকমাশুল প্রথম আউন্সের জন্য $2\frac{1}{2}$ পেনি এবং অতিরিক্ত প্রতি আউন্সের জন্য $1\frac{1}{2}$ পেনি দিতে হয়। x আউন্স ওজনের একখানি চিঠির জন্য মোট কত মাশুল দিতে হইবে ?

6. $P\equiv4a^2b^2c$, $Q\equiv5b^2c^2a$, $R\equiv6c^2a^2b$ এবং $a=4b=2c$ হইলে,

$$\frac{P}{Q}+\frac{Q}{R}+\frac{R}{P} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

7. একজন সাইকেল-চালক ঘণ্টায় y মাইল বেগে x মাইল যাইবার পর সাইকেল-দুর্ঘটনা-বশত ঘণ্টায় z মাইল বেগে হাঁটিয়া বাড়ী ফিরিল। বাড়ী হইতে সে কত সময় বাহিরে ছিল ?

8. একজন চা-ব্যবসায়ী 3 টাকা পাউণ্ড দরের x পাউণ্ড চা-এর সহিত 2 টাকা পাউণ্ড দরের y পাউণ্ড চা মিশ্রিত করিল। মিশ্রিত চা-এর প্রতি পাউণ্ডের মূল্য কত হইবে ?

X

1. $a=12, b=4, c=11, d=9$ হইলে,

$\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt[3]{a+b+c}+\sqrt[4]{a+b}$ এর মান কত হইবে ?

2. $3x^4-4x^2+6x^3-2$ এর সহিত কত যোগ করিলে সমষ্টি শূন্য হইবে ?

3. $-6x^2yz$ কে $-4xy^2z^2$ দ্বারা গুণ কর।

4. $A\equiv x^2-2x+3$, $B\equiv x^2+7x-2$ এবং $C\equiv x^2+9x-3$ হইলে, $2A-3B+2C$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $(x+2y)$ গজ দৈর্ঘ্যের একখণ্ড কাঠ হইতে $2(x-3y)$ ফুট কাটিয়া লইলে কত গজ অবশিষ্ট থাকিবে ?

6. $x+z=6$ হইলে, $xy+yz=24$ হইতে y এর মান নির্ণয় কর।

7. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A বর্গ ইঞ্চি এবং ইহার দৈর্ঘ্য l ইঞ্চি। ক্ষেত্রটির বিস্তার কত ? s দ্বারা পরিসীমা সূচিত হইলে, A, l এবং s এর মধ্যে সম্বন্ধ-প্রকাশক একটি সূত্র নির্ণয় কর।

8. একটি বালক সেকেণ্ডে x খানা হিসাবে এক প্যাকেট তাসের সংখ্যা গণনা করিতে পারে। অপর একটি অলস বালক প্রতি সেকেণ্ডে মাত্র y খানা করিয়া গণিতে পারে। z খানা তাস গণনা করিতে দ্বিতীয় বালকের প্রথম বালক অপেক্ষা কত অধিক সময় লাগিবে ? [$x>y$.]

ষষ্ঠ অধ্যায়

বিশেষ গুণফলের সূত্রাবলী

64. বিশেষ সূত্র (Formulæ)

সূত্র-গঠন-প্রণালী, কি প্রকারে সূত্র-সাহায্যে একই বিষয়ের পুনঃপুন উল্লেখ হইতে নিষ্কৃতি পাওয়া যায় এবং অনাবশ্যক পরিশ্রম বহু পরিমাণে হ্রাস পায়, তাহা পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে। এ পর্যন্ত বিশেষ বিশেষ পাটীগণিতীয় এবং জ্যামিতিক নিয়মাদিই সাংকেতিক-রূপে সূত্রাকারে প্রকাশ করা হইয়াছে; সাধারণত এই সকল সূত্রের রাশিসমূহের মধ্যে পরস্পর কোন সম্বন্ধ নাই। বর্তমান অধ্যায়ে রাশিসমূহের সাধারণ-ধর্ম-প্রকাশক বিশেষ এক জাতীয় সূত্র আলোচিত হইবে। প্রকৃতপক্ষে ইহারা কতকগুলি গুণনের ফল মাত্র; তবে এই সকল স্থলে সংশ্লিষ্ট রাশিগুলি যে-কোন মান-বিশিষ্ট হইলেও উহাদের সত্যতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে। এই ফলগুলি অতি প্রয়োজনীয়।

65. দ্বিপদের বর্গ $(a+b)^2$

দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ উহাদের বর্গের যোগফল এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান। যে-কোন দুইটি সংখ্যা-সম্বন্ধেই এই ধর্মটি সত্য; ইহা নিম্নলিখিত সূত্র-সাহায্যে প্রকাশিত হয় :—

সূত্র $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) &= a\times(a+b)+b\times(a+b)\\ &= (a^2+ab)+(ab+b^2)\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

এই সূত্র-সাহায্যে যে-কোন দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ নির্ণয় করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত $$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (a^2+2ab+b^2)-2ab\\ &= (a+b)^2-2ab.\end{aligned}$$

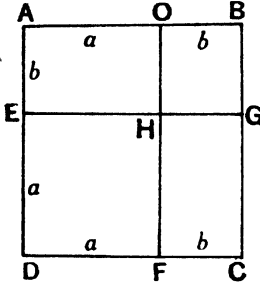
এই সূত্র-দ্বারা পাটীগণিতীয় সংখ্যার বর্গ-নির্ণয়ের বিশেষ সুবিধা হয়।

উদা. 325 এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$325^2=(300+25)^2=300^2+2.300.25+25^2$$
$$=90000+15000+625$$
$$=105625.$$

66. জ্যামিতিক পরিচয় (Geometrical Representation)

মনে কর, AB সরল রেখাকে যে-কোন অন্তঃস্থ বিন্দু O তে AO এবং OB এই দুই অংশে বিভক্ত করা হইয়াছে। AO এর দৈর্ঘ্যকে a দ্বারা এবং OB এর দৈর্ঘ্যকে b দ্বারা সূচিত করিলে, AB এর দৈর্ঘ্য $a+b$ দ্বারা সূচিত হইবে।

AB এবং OB এর উপর যথাক্রমে ABCD এবং OBGH বর্গক্ষেত্রদ্বয় অঙ্কিত কর। OH এবং GH কে বর্ধিত কর এবং মনে কর, বর্ধিত OH, DC কে F বিন্দুতে এবং বর্ধিত GH, AD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, সমগ্র ABCD বর্গক্ষেত্রটি EDFH ও OBGH এই দুই বর্গক্ষেত্র এবং AOHE ও HFCG এই দুই আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান। এক্ষণে, EDFH ও OBGH বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে a^2 ও b^2, এবং AOHE ও HFCG দুইটি আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল ab.

$$\text{সুতরাং,}\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

উদা. 1. $2x+3y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

মনে কর, $a=2x$ এবং $b=3y$.

$$\therefore\ (2x+3y)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=4x^2+12xy+9y^2.$$

উদা. 2. যদি $x=2$ হয়, তাহা হইলে $25x^2+10x+1$ এর মান কত ?

$$\text{প্রদত্ত রাশিটি} = (5x)^2+2.5x.1+1^2=(5x+1)^2$$
$$=(5\times2+1)^2$$
$$=11^2=121.$$

67. দ্বিপদের বর্গ $(a-b)^2$

দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ, প্রথমটির বর্গ—হইতে উভয় রাশির দ্বিগুণিত গুণফল বিয়োগ করিয়া লব্ধ বিয়োগফলের সহিত দ্বিতীয়টির বর্গ যোগ করিলে যে ফল পাওয়া যায় তাহার সমান ; এই ধর্ম পাটীগণিতীয় সংখ্যাসমূহেও বর্তমান। এই সাধারণ সত্য বাক্যটি নিম্নলিখিত সূত্র-দ্বারা প্রকাশিত হয় :—

সূত্র $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad \cdots \qquad (2)$$

সাধারণ গুণনক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$$
$$=(a^2-ab)-(ab-b^2)=a^2-2ab+b^2.$$

a এবং b এর মান যাহাই হউক না কেন, এই সূত্রটি সর্বদাই সত্য হইবে। সুতরাং এই সূত্র-সাহায্যে যে-কোন দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য 1. b এর পরিবর্তে $-b$ লিখিয়া, পূর্ব সূত্র হইতেও এই সূত্রটি পাওয়া যায়। ফলত, ইহা $(a+b)^2$এর সূত্রেরই অন্তর্ভুক্ত, কারণ

$$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2$$
$$=a^2+2.a.(-b)+(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

দ্রষ্টব্য 2. $(a-b)^2$ এবং $(b-a)^2$ বর্গদ্বয় পরস্পর সমান, কারণ উহাদের প্রত্যেকটি a^2+b^2-2ab এর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab=(a-b)^2+2ab.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-4ab=(a+b)^2-4ab.$

এবং $(a+b)^2=(a^2-2ab+b^2)+4ab=(a-b)^2+4ab.$

উদা. 1. 99 এর বর্গ নির্ণয় কর।

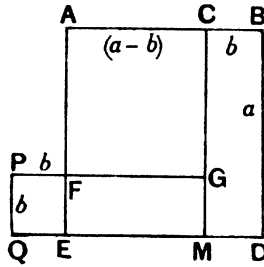
$$99^2=(100-1)^2=100^2-2.100.1+1^2$$
$$=10000-200+1=9801.$$

উদা. 2. $ax-by$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(ax-by)^2=(ax)^2-2(ax)(by)+(by)^2$$
$$=a^2x^2-2abxy+b^2y^2.$$

68. জ্যামিতিক পরিচয়

AB সরল রেখার উপর C একটি বিন্দু লও এবং AB ও BC এর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a ও b দ্বারা সূচিত কর; তাহা হইলে AC এর দৈর্ঘ্য $a-b$ দ্বারা সূচিত হইবে।

AB এর উপর অঙ্কিত ABDE বর্গক্ষেত্রের সহিত b ভুজ-বিশিষ্ট PQEF বর্গক্ষেত্রটি যুক্ত করিলে ABDEQPF চিত্রটি গঠিত হয়; ইহার ক্ষেত্রফল স্পষ্টই a^2+b^2.

এই চিত্র হইতে PM এবং CD আয়তক্ষেত্র-দ্বয় অপসারণ করিলে ACGF ক্ষেত্রটি অবশিষ্ট থাকিবে। ACGF ক্ষেত্রটি AC এর উপর একটি বর্গক্ষেত্র, সুতরাং ইহার ক্ষেত্রফল $(a-b)^2$, এবং PM ও CD আয়তক্ষেত্র-দ্বয়ের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল ab, সুতরাং

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

উদা. 1. $x=4$, $y=3$ হইলে, $9x^2-12xy+4y^2$ এর মান কত?

প্রদত্ত রাশিটি $=(3x)^2-2.(3x).(2y)+(2y)^2$
$$=(3x-2y)^2=(3\times4-2\times3)^2=6^2=36.$$

উদা. 2. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান কত ?

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2.x.\frac{1}{x}-2.x.\frac{1}{x}$$

$$=\left(x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=3^2-2=7.$$

প্রশ্নমালা 13

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :—

1. $x+2$. 2. $4x-1$. 3. $5x+9y$. 4. $2x-y$.

5. $px+qy$. 6. $2a+5b$. 7. $ax-3b$. 8. $2ab+c^2$.

9. x^2-y^2. 10. $2a-x^2$.

11. $2x+x^2$ কে $2x+x^2$ দ্বারা এবং x^2+xy কে x^2+xy দ্বারা গুণ কর।

12. p^2-2pq কে p^2-2pq দ্বারা এবং p^2-3p কে p^2-3p দ্বারা গুণ কর।

13. প্রকৃত গুণন ভিন্ন অন্য কি প্রকারে $9x^2-7y^2$ এর বর্গ নির্ণয় করা যায় ?

14. সূত্র-সাহায্যে $2x-3y$ এবং $3y-2x$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

15. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গ নির্ণয় কর :—

(*i*) 11. (*ii*) 105. (*iii*) 1025. (*iv*) 89. (*v*) 998.

$x=2$, $y=3$, $a=4$ এবং $b=5$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

16. x^2-6x+9. 17. $a^4-2a^2bx+b^2x^2$. 18. $9+12a+4a^2$.

19. $x^2y^2-16xy+64$. 20. $(a+x)^2+(b+y)^2$.

সরল কর :—

21. $(x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

22. $(3a-5b)^2+2(3a-5b)(x-2y)+(x-2y)^2$.

23. $(px+qy)^2+(px-qy)^2$ 24. $(ax+by)^2-2abxy$.

25. $p+\frac{1}{p}=4$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $p^2+\left(\frac{1}{p}\right)^2=14$.

26. $x-\frac{1}{x}=4$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^2+\frac{1}{x^2}=18$.

27. প্রমাণ কর যে, $(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2=2(x^4+y^4)$.

28. $a+\frac{1}{a}=x$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$ এর মান x এর দ্বারা প্রকাশ কর।

29. $x-y=3$ এবং $xy=4$ হইলে, $x+y$ এর মান কত ?

30. $x+y=7$ এবং $xy=10$ হইলে, $x-y$ এর মান কত ?

69. দুইটি রাশির বর্গের অন্তর (Difference of Two Squares)

দুইটি রাশির সমষ্টি এবং বিয়োগফলের গুণফল ঐ রাশিদ্বয়ের বর্গের বিয়োগফলের সমান। এই সত্যটি নিম্নলিখিত সূত্র-দ্বারা প্রকাশিত হয় :—

সূত্র $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (3)$$

সাধারণ গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায়—

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, উক্ত সূত্রটি সত্য হইবে. সুতরাং যে রাশিটিকে a^2-b^2 রূপে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাকেই সেই দুইটি রাশির সমষ্টি এবং বিয়োগফলের সমান দুইটি দ্বিপদ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য। অনেক ক্ষেত্রে সোজাসুজি গণনা (calculation) না করিয়া গুণনীয়কের বিশ্লেষণ-দ্বারা দুইটি সংখ্যার বর্গের অন্তর নির্ণয় করা অধিকতর সুবিধাজনক।

উদা. 1. 428^2-427^2 এর মান কত ?

$$428^2-427^2=(428+427)(428-427)$$
$$=855\times1=855.$$

উদা. 2. $4x^2-25$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x+5)(2x-5).$$

সুতরাং নির্ণেয় গুণনীয়ক দুইটি $2x+5$ এবং $2x-5$.

70. জ্যামিতিক পরিচয় *

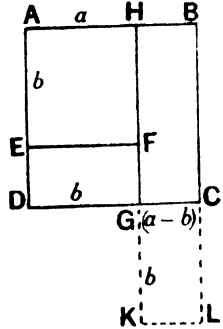
AB সরল রেখার উপর H একটি বিন্দু লও, এবং AB ও AH এর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a ও b দ্বারা সূচিত কর। সুতরাং AB সরল রেখার উপর অঙ্কিত ABCD বর্গ-ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল a^2 এবং AH এর উপর অঙ্কিত AHFE বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল b^2 হইবে।

$\therefore a^2-b^2=$ বর্গক্ষেত্র ABCD $-$ বর্গক্ষেত্র AHFE

$=$ আয়তক্ষেত্র FD $+$ আয়তক্ষেত্র HC

$=$ আয়তক্ষেত্র CK $+$ আয়তক্ষেত্র HC

$=$ আয়তক্ষেত্র HBLK $=$ HB. BL

$=(a-b)(a+b).$

দ্রষ্টব্য। $a+b$ এবং $a-b$ আকার-বিশিষ্ট যে-কোন দুইটি গুণনীয়কের গুণফল-নির্ণয়কালে এই সূত্রটি প্রয়োগ করা চলে।

উদা. 1. $(2x+3)$ কে $(2x-3)$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2$$
$$=4x^2-9.$$

উদা. 2. x^2+ax+a^2 কে x^2-ax+a^2 দ্বারা গুণ কর।

মনে কর, $x^2+a^2=\mathrm{A}$ এবং $ax=\mathrm{B}$;

$$\therefore (x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)=(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$
$$=\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2 \quad [\text{সূত্র } (3)]$$
$$=(x^2+a^2)^2-(ax)^2$$
$$=(x^4+2a^2x^2+a^4)-a^2x^2 \quad [\text{সূত্র } (1)]$$
$$=x^4+a^2x^2+a^4.$$

* 'লীলাবতী' অনু 185 এও ইহা প্রদত্ত হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 14

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

1. 28^2-15^2. 2. 98^2-88^2. 3. 647^2-627^2.
4. $(12643)^2-(12640)^2$.

গুণফল নির্ণয় কর :—

5. $(x+y)$, $(x-y)$. 6. $(x+1)$, $(x-1)$.
7. $(5x+7)$, $(5x-7)$. 8. $(6x-a^2)$, $(6x+a^2)$.
9. $(a+2b)$, $(2b-a)$. 10. x^2-y^2, x^2+y^2.
11. $(1-a^mb^m)$, (a^mb^m+1). 12. $(a+b+c)$, $(a+b-c)$.

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

13. x^2-4y^2. 14. $16a^2-1$. 15. $9x^2-49$.
16. $a^2x^2-b^2y^2$. 17. $1-x^2y^2z^2$.
18. $x^{2m}-y^{2m}$. 19. $(a-b)^2-c^2$. 20. $(a+b)^2-(c+d)^2$.

গুণফল নির্ণয় কর :—

21. $(4+x)\times(4-x)$. 22. $(2x+y-3z)\times(2x+y+3z)$.

71. দুইটি দ্বিপদের গুণফল (Product of Two Binomials)

একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট দুইটি দ্বিপদ রাশির গুণফল—(1) সাধারণ পদটির বর্গ, (2) সাধারণ পদটি এবং বাকি দুইটি পদের সমষ্টির গুণফল এবং (3) বাকি দুইটি পদের গুণফল, এই তিনটি রাশির সমষ্টির সমান।

এই সাধারণ সত্যটি নিম্নলিখিত সূত্র-দ্বারা প্রকাশিত হয় :—

সূত্র $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ ... ... (4)

সাধারণ গুণন-ক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$\begin{array}{l} x+a \\ \underline{x+b} \\ x^2+ax \\ \underline{\quad +bx+ab} \\ x^2+ax+bx+ab \end{array}$$

গুণফলটিকে $x^2+(a+b)x+ab$ আকারে লেখা যায়, এবং ইহাকে একটি x-ঘটিত দ্বিঘাত রাশিমালা (quadratic expression in x) বলা হয়।

একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট দুইটি দ্বিপদ রাশির গুণফল এবং দ্বিঘাত রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়কালে সূত্রটি বিশেষ উপযোগী।

দ্রষ্টব্য 1. x-ঘটিত কোন দ্বিঘাত রাশিমালায় x^2-ঘটিত একটি পদ, x-ঘটিত একটি পদ এবং একটি ধ্রুবক (constant) বিদ্যমান থাকে, সুতরাং সাধারণত পর্যবেক্ষণ-দ্বারাই এইরূপ রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে পারা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. a এবং b ধন কিংবা ঋণ যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, উক্ত সূত্রটি সত্য হইবে। অতএব, এই সূত্রানুসারে $(x+a)$ এবং $(x-b)$, $(x-a)$ এবং $(x-b)$ এই সকল দ্বিপদ রাশি-দ্বয়ের গুণফল নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab.$$

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$$

উদা. 1. $(x+3)$ এবং $(x+5)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\times5$$
$$=x^2+8x+15.$$

উদা. 2. $x+7$ কে $x-4$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x+7)(x-4)=x^2+(7-4)x+7\times(-4)$$
$$=x^2+3x-28.$$

উদা. 3. x^2+5x+6 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

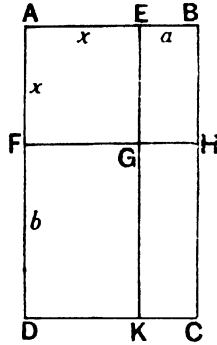
গুণনীয়কদ্বয় স্পষ্টই $(x+a)(x+b)$ আকার-বিশিষ্ট হইবে; এস্থলে a এবং b এর মান এরূপ হইবে যে, উহাদের সমষ্টি 5 এবং গুণফল 6 হয়। পরীক্ষা-দ্বারা দেখা যায় যে, $3\times2=6$ এবং $3+2=5$, সুতরাং $a=2$ এবং $b=3$ ধরা যাইতে পারে।

$$\therefore \quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3);$$

অতএব, নির্ণেয় গুণনীয়কদ্বয় $x+2$ এবং $x+3$.

72. জ্যামিতিক পরিচয়

দুইটি সরল রেখা AE এবং EB এরূপভাবে অঙ্কিত কর, যেন উহাদিগকে একই সরল রেখা মনে করা যায়। মনে কর, AE এবং EB এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x এবং a, তাহা হইলে $AB = x + a$.

AE এর উপর AFGE বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর; ইহার ক্ষেত্রফল x^2 হইবে। AF কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং মনে কর $FD = b$. ABCD আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর; ইহার ক্ষেত্রফল স্পষ্টই $(x+a)(x+b)$.

এক্ষণে, ABCD আয়তক্ষেত্র = বর্গক্ষেত্র AG + আয়তক্ষেত্র EH + আয়তক্ষেত্র GD + আয়তক্ষেত্র CG

$$= x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\therefore \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

প্রশ্নমালা 15

নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি-দ্বারা গুণ কর :—

1. $x+2, x+4.$
2. $3x+2y, 3x+5y.$
3. $a-2, a+7.$
4. $a+4, a-5.$
5. $x-6a, x+2a.$
6. $2m+n, 2m+3n.$
7. $a+bx, a+cx.$
8. $3x+2, 5x-2.$
9. $4-x, 5-x.$
10. $x^m+16, x^m-10.$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

11. $x^2+3x+2.$
12. $x^2-3x+2.$
13. $15-8x+x^2.$
14. $a^2+a-2.$
15. $x^2-x-6.$

73. দ্বিপদের ঘন $(a+b)^3$

$a+b$ এর তৃতীয় ঘাত $(a+b)^3$, ইহা $(a+b)(a+b)^2$, অর্থাৎ $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ এর সমান।

সাধারণ গুণন-ক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \qquad\qquad \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

অতএব, নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায় :—

সূত্র $$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$= a^3+3ab(a+b)+b^3 \quad \ldots \quad \ldots \qquad (5)$$

a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, সূত্রটি সত্য হইবে, সুতরাং ইহার সাহায্যে যে-কোন দুইটি রাশির সমষ্টির ঘন নির্ণয় করা যাইতে পারে।

এখানে লক্ষ্য করিতে হইবে যে, ডান দিকের রাশির আকারে পরিবর্তনীয় যে-কোন রাশিমালাকে একটি পূর্ণ ঘনরূপে, অর্থাৎ তিনটি সমান গুণনীয়কের গুণফলরূপে, প্রকাশ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত উক্ত সূত্র হইতে নিম্নলিখিত ফল দুইটি অনায়াসেই পাওয়া যায় :—

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b).$$
$$(a+b)^3 - (a^3+b^3) = 3ab(a+b).$$

উদা. 1. $x+2y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(x+2y)^3 = x^3+3.x.(2y)(x+2y)+(2y)^3$$
$$= x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3.$$

উদা. 2. $x=2$ হইলে, $8x^3+60x^2+150x+125$ এর মান কত?

প্রদত্ত রাশিমালা $= (2x)^3+3.(2x).5.(2x+5)+5^3$

$$= (2x+5)^3 = (2\times 2+5)^3$$
$$= 9^3 = 729.$$

দ্রষ্টব্য। দ্বিপদ রাশিটির পদদ্বয় নির্ণয় করিতে হইলে, প্রদত্ত রাশিমালাস্থ তৃতীয় ঘাতের পদদ্বয় যে দুই রাশির ঘন তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 3. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান p এর দ্বারা প্রকাশ কর।

সূত্রানুসারে :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3.x.\frac{1}{x}.\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^3$$
$$=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}.$$

এই ফলে, $x+\frac{1}{x}$ এর পরিবর্তে p লিখিয়া,

$$p^3=x^3+3p+\frac{1}{x^3}.$$

উভয় পার্শ্ব হইতে $3p$ বিয়োগ করিয়া,

$$x^3+\frac{1}{x^3}=p^3-3p.$$

74. দ্বিপদের ঘন $(a-b)^3$

a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন,

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2).$$

সাধারণ গুণনক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

সুতরাং, নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায় :—

সূত্র $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$=a^3-3ab(a-b)-b^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

a এবং b এর সকল মানের পক্ষেই সূত্রটি সত্য, সুতরাং ইহার সাহায্যে যে-কোন দুইটি রাশির বিয়োগফলের ঘন নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য। ফলত, এই সূত্রটি $(a+b)^3$এর সূত্রের অন্তর্ভুক্ত, কারণ পূর্বে

বলা হইয়াছে যে, a এবং b এর সকল মানের পক্ষেই $(a+b)^3$ এর সূত্রটি সত্য, সুতরাং এই সূত্রে b স্থলে $-b$ লিখিলেও সূত্রটি সত্য হইবে ; অতএব

$$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3=a^3+3a(-b)(a-b)+(-b)^3$$
$$=a^3-3ab(a-b)-b^3.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $(a-b)^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b)$

$\therefore\ a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a^3-b^3)-(a-b)^3=3ab(a-b)$

উদা. 1. $2x-y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(2x-y)^3=(2x)^3-3.2x.y.(2x-y)-y^3$$
$$=8x^3-6xy\,(2x-y)-y^3$$
$$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3.$$

উদা. 2. সরল কর : $(2x+3y)^3-3(2x+3y)^2(2x-3y)$
$+3(2x+3y)(2x-3y)^2-(2x-3y)^3.$

মনে কর, $a=2x+3y,\ b=2x-3y$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$=(a-b)^3=(2x+3y-2x+3y)^3$$
$$=(6y)^3=216y^3.$$

উদা. 3. $a-\frac{1}{a}=2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3-\frac{1}{a^3}=14.$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^3=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-3a.\frac{1}{a}.\left(a-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-3.\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

এক্ষণে, $a-\frac{1}{a}=2$ লিখিয়া,

$$2^3=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-6.$$

উভয় পার্শ্বে 6 যোগ করিয়া,

$$a^3-\frac{1}{a^3}=2^3+6=8+6=14.$$

উদা. 4. $x-y=6$ এবং $xy=16$ হইলে, x^3-y^3 এর মান কত ?

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=6^3+3.16.6=216+288$$
$$=504.$$

প্রশ্নমালা 16

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :—

1. $1+x$. 2. $3-a$. 3. $2x+1$. 4. x^2-1.
5. $ax-by$. 6. x^2+2y. 7. $-3m+2n^2$. 8. $3ax+2by$.

সরল কর :—

9. $(a+b)^3\ (a-b)^3$. 10. $(x+y)^3+(x-y)^3$.
11. $(p+q)^3-(p-q)^3$. 12. $(x+y)^3+(x-y)^3+6x(x^2-y^2)$.
13. $(x+a)^3-(x+b)^3-3(a-b)(x+a)(x+b)$.
14. $(x-a)^3-(y-a)^3-3(x-y)(x-a)(y-a)$.
15. $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x-y)(x+y)^2$.
16. $x+y=5$ এবং $xy=6$ হইলে, x^3+y^3 এর মান কত ?
17. $x-y=4$ এবং $xy=21$ হইলে, x^3-y^3 এর মান নির্ণয় কর।
18. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$.
19. $p+\frac{1}{p}=4$ হইলে, $p^3+\frac{1}{p^3}$ এর মান কত ?
20. $x-\frac{1}{x}=5$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-\frac{1}{x^3}=140$.
21. $x+y=4$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+12xy=64$.
22. $x-y=2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-y^3-6xy=8$.
23. $a+b=c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+3abc=c^3$.

75. $(a+b)$ এবং (a^2-ab+b^2) এর গুণফল

সাধারণ গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

সুতরাং যে-কোন দুইটি ঘনরাশির সমষ্টির গুণনীয়ক নির্ণয় করিবার নিমিত্ত নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায় :—

সূত্র $a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$ ... (7)

a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, সূত্রটি সর্বদাই সত্য হইবে, সুতরাং দুইটি ঘনরাশির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায় এইরূপ যে-কোন রাশিমালার গুণনীয়ক, এই সূত্র-সাহায্যে অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য। এই সূত্রটি (5) সূত্র হইতেও পাওয়া যায়, কারণ

$$(a+b)^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b).$$

$$a^3+b^3+3ab(a+b)-3ab(a+b)=(a+b)^3-3ab(a+b);$$

অর্থাৎ $$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$$
$$=(a+b)\ (a^2-ab+b^2).$$

উদা. 1. $4x^2-6x+9$ কে $2x+3$ দ্বারা গুণ কর।

$2x$ এর পরিবর্তে a এবং 3 এর পরিবর্তে b লিখিয়া, নির্ণেয় গুণফল

$$(2x+3)\ (4x^2-6x+9)=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3+b^3=(2x)^3+3^3$$
$$=8x^3+27.$$

উদা. 2. $x^3y^3+27x^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $xy=a$ এবং $3x=b$; তাহা হইলে

$$x^3y^3+27x^3=a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$$
$$=(xy+3x)\{(xy)^2-xy.\ 3x+(3x)^2\}$$
$$=(xy+3x)\ (x^2y^2-3xyx+9x^2).$$

∴ নির্ণেয় গুণনীয়ক দুইটি $(xy+3x)$ এবং $(x^2y^2-3xyx+9x^2)$.

উদা. 3. সরল কর : $(x+y)\ (x^2-xy+y^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)$.

$$(x+y)\ (x^2-xy+y^2)=x^3+y^3\ ;$$

এবং $$(y+z)\ (y^2-yz+z^2)=y^3+z^3\ ;$$

∴ প্রদত্ত রাশিমালাটি $=(x^3+y^3)-(y^3+z^3)=x^3-z^3.$

76. $(a-b)$ এবং (a^2+ab+b^2) এর গুণফল

সাধারণ গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 ;$$

সুতরাং, যে-কোন দুইটি ঘনরাশির বিয়োগফলের গুণনীয়ক নির্ণয় করিবার নিমিত্ত নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায় :—

সূত্র $$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, সূত্রটি সর্বদাই সত্য হইবে ; সুতরাং দুইটি ঘনরাশির অন্তররূপে প্রকাশ করা যায় এইরূপ যে-কোন রাশি-মালার গুণনীয়ক এই সূত্র-সাহায্যে অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য। এই সূত্রটি (6) সূত্র হইতেও পাওয়া যায় ; কারণ

$$(a-b)^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b) ;$$

$$\therefore \quad a^3-b^3-3ab(a-b)+3ab(a-b)=(a-b)^3+3ab(a-b) ;$$

অর্থাৎ $$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

উদা. 1. $x^2+2ax+4a^2$ কে $x-2a$ দ্বারা গুণ কর।

$x=\mathrm{A}$ এবং $2a=\mathrm{B}$ লিখিয়া, নির্ণেয় গুণফল

$$(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)=(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)$$
$$=\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3$$
$$=x^3-(2a)^3=x^3-8a^3.$$

উদা. 2. $125x^3-64y^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $5x=a$ এবং $4y=b$; তাহা হইলে,

$$125x^3-64y^3=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(5x-4y)\{(5x)^2+5x.\,4y+(4y)^2\}$$
$$=(5x-4y)(25x^2+20xy+16y^2).$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)$
$+(z-x)(z^2+zx+x^2)=0.$

যেহেতু, $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3,$
$(y-z)(y^2+yz+z^2)=y^3-z^3,$
এবং $(z-x)(z^2+zx+x^2)=z^3-x^3$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটি $=(x^3-y^3)+(y^3-z^3)+(z^3-x^3)=0.$

প্রশ্নমালা 17

গুণ কর :—

1. $1-x+x^2$ কে $1+x$ দ্বারা। 2. x^4+x^2+1 কে x^2-1 দ্বারা।

3. $4a^2-2a+1$ কে $2a+1$ দ্বারা।

4. $x^2+3xy+9y^2$ কে $x-3y$ দ্বারা।

5. $a^4+a^2bc+b^2c^2$ কে a^2-bc দ্বারা।

6. $a^2x^2-5abx+25b^2$ কে $ax+5b$ দ্বারা।

7. $a^{2m}+a^mb^n+b^{2n}$ কে a^m-b^n দ্বারা।

8. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^3+a^3)$ এই গুণফলটি নির্ণয় কর।

9. $(a+b), (a-b), (a^2+ab+b^2)$ এবং (a^2-ab+b^2) এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

10. সরল কর : $(x-3)(x^2+3x+9)-(x-2)(x^2+2x+4).$

11. প্রমাণ কর যে, $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$-(c-a)(c^2+ca+a^2)=2(a^3+b^3).$

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

12. $x^3+27.$ 13. $8a^3-125.$ 14. $m^3+64n^3.$

15. $343a^3b^6-1.$ 16. $x^3+(y+z)^3.$ 17. $(x+y)^3-(x-y)^3.$

18. প্রমাণ কর যে,

(i) $ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)\equiv a(x^3+a^3).$

(ii) $(x+y)^4-3xy(x+y)^2\equiv(x+y)(x^3+y^3).$

19. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0.$

20. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^3-\frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

21. প্রমাণ কর যে, $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=x^6-y^6$ এই ফলের সাহায্যে $64x^6-y^6$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

22. $f(x)\equiv x^3$ হইলে, $f(a+b)+f(a-b)-2f(a)$ এর মান কত ?

সপ্তম অধ্যায়

সহজ সরল সমীকরণ (Easy Simple Equations)

77. সমীকরণ (Equation) এবং অভেদ (Identity)

দুইটি বীজগণিতীয় রাশি পরস্পর সমান হইলে, রাশিদ্বয়ের মধ্যে '=' চিহ্ন স্থাপন করিয়া উহাদের সমতা জ্ঞাপন করিতে হয়। = চিহ্নের সহিত রাশিদ্বয়ের সাধারণ নাম **সমীকরণ**।

সমতা-প্রকাশক চিহ্নের উভয়পার্শ্বস্থিত রাশিদ্বয়কে সমীকরণের **পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলে। উক্ত চিহ্নের বাম পার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **প্রথম** বা **বাম পক্ষ** (left-hand side), এবং দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **দ্বিতীয়** বা **দক্ষিণ পক্ষ** (right-hand side) বলা হয়।

এ সম্পর্কে নিম্নলিখিত দুইটি অবস্থা বিবেচনা করিতে হইবে :—

(1) অক্ষরগুলি যে-কোন মান-বিশিষ্ট হইলে ঐ সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়,

(2) সংশ্লিষ্ট অক্ষরগুলি কেবলমাত্র বিশেষ মান-বিশিষ্ট হইলেই উভয় পক্ষ সমান হয়।

প্রথম প্রকারের সমীকরণ-সমূহকে **অভেদ সমীকরণ** বা সংক্ষেপে **অভেদ** (identity) এবং দ্বিতীয় প্রকারের সমীকরণ-সমূহকে **সাপেক্ষ** (conditional) **সমীকরণ** বা সংক্ষেপে **সমীকরণ** (equation) বলা হয়।

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্রটি একটি 'অভেদ'; কারণ a এবং b যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, উহার উভয় পক্ষের মান (value) সর্বদাই সমান হইবে। কিন্তু $x+7=2x+2$ একটি 'সমীকরণ'; কারণ এস্থলে x এর মান কেবলমাত্র 5 হইলেই, উভয় পক্ষ সমান হয়; 5 ভিন্ন অন্য কোনও মান ধরিলে উহাদের সমতা রক্ষিত হয় না।

সমীকরণস্থিত যে অক্ষরটির এক বা একাধিক মান নির্দিষ্ট হইলেই উহার পক্ষ দুইটি সমান হয়, তাহাকে **অজ্ঞাত রাশি** (unknown quantity) বলে।

অজ্ঞাত রাশি সাধারণত বর্ণমালার শেষ অক্ষর-সমূহ-দ্বারা সূচিত হয়. যথা, x, y, z ইত্যাদি।

অনেক সময় সমীকরণস্থিত একাধিক অক্ষরের বিশেষ মান-নির্দেশ-দ্বারা উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয়। এইরূপ সকল অক্ষরকেই 'অজ্ঞাত রাশি' বলা হয়।

অজ্ঞাত রাশি ভিন্ন সমীকরণস্থিত অন্যান্য রাশিসমূহকে জ্ঞাত মান-বিশিষ্ট মনে করা হয় এবং উহাদিগকে 1, 2, 3 প্রভৃতি পাটীগণিতীয় সংখ্যা, অথবা a, b, c প্রভৃতি বর্ণমালার আদ্য অক্ষর-দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সংজ্ঞা যে সমীকরণে জ্ঞাত রাশিগুলি পাটীগণিতীয় সংখ্যা-দ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহাকে 'সংখ্যাত্মক' (numerical) সমীকরণ বলে; জ্ঞাত রাশিগুলি অক্ষর-দ্বারা সূচিত হইলে, সমীকরণটিকে 'আক্ষরিক' (literal) সমীকরণ বলা হয়।

78. বীজ (Root)

অজ্ঞাত রাশির যে মান-দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয়, তাহাকে ঐ সমীকরণের **বীজ** (root অথবা solution) বলে, এবং সমীকরণটি ঐ মান-দ্বারা **সিদ্ধ** হয়—এরূপ বলা হইয়া থাকে।

যথা, $x=3$ হইলে, $2x+3=x+6$ এই সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষের মান 9 হয়। সুতরাং x এর এই বিশেষ মান-দ্বারা সমীকরণটি 'সিদ্ধ' হইল। এজন্য, উক্ত সমীকরণটির 'বীজ' (root) 3.

দ্রষ্টব্য। কোনও সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, উহার বীজ নির্ণয় করিতে হয়, এরূপ বুঝিবে।

79. সরল সমীকরণ (Simple Equation)

যে সমীকরণের মধ্যে মাত্র একটি অজ্ঞাত রাশি থাকে, এবং উহা প্রথম ঘাতযুক্ত হয়, তাহাকে **সরল সমীকরণ** বলে।

যেমন, $2x+5=12$ একটি 'সরল সমীকরণ'; কারণ ইহার মধ্যে মাত্র একটি অজ্ঞাত রাশি (x) বিদ্যমান আছে, এবং উহা প্রথম ঘাতযুক্ত।

দ্রষ্টব্য। একটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট সমীকরণের মান অজ্ঞাত রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক-দ্বারা নিরূপিত হয়। যথা, $2x+3=3x+4$ একটি

প্রথম মানের সমীকরণ (equation of the first degree) ; কারণ এস্থলে অজ্ঞাত রাশি x এর সর্বোচ্চ ঘাত 'x' এর সূচক 1.

$x^2 = 2x + 5$, এইটি সরল সমীকরণ নহে। ইহা একটি **দ্বিতীয় মানের** সমীকরণ (equation of the second degree), এবং ইহাকে **দ্বিঘাত** (quadratic) সমীকরণ বলা হয়।

80. পরিবর্ত (Substitution)

কোন একটি সংখ্যা কোন সমীকরণের বীজ (root) কিনা তাহা নিরূপণ করিতে হইলে, উক্ত সংখ্যাটিকে অজ্ঞাত রাশিটির মান ধরিয়া সমীকরণের দুই পক্ষের মান নির্ণয় করিতে হয়। যদি এইরূপে নির্ণীত উভয় পক্ষের মান পরস্পর সমান হয়, কেবলমাত্র তখনই উক্ত সংখ্যাটিকে ঐ সমীকরণের 'বীজ' বলা হয়। এই প্রক্রিয়াটিকে **পরিবর্ত** (substitution) বলে। যথা, $5x + 6 = 3x + 12$ সমীকরণটিতে x এর মান 3 ধরিলে, প্রত্যেক পক্ষের মান 21 হয়, সুতরাং এই সমীকরণটির বীজ 3। কিন্তু 4 ঐ সমীকরণের বীজ নহে ; কারণ x এর মান 4 ধরিলে উভয় পক্ষের মান পরস্পর সমান হয় না। তখন $5x + 6 = 26$, কিন্তু $3x + 12 = 24$.

দ্রষ্টব্য। প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিয়া, নির্ণীত বীজ-দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকে কিনা দেখা আবশ্যক।

81. সমীকরণ-সমাধান (Solving an Equation)

কোন সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, বিভিন্ন প্রক্রিয়া-সাহায্যে সমীকরণটির রূপ ক্রমশ পরিবর্তন করিয়া "$x =$ কোন জ্ঞাত রাশি" এইরূপ আকারে পরিণত করিতে হয়।

যে-কোন প্রকারের সরল সমীকরণ হউক না কেন, উহার সমাধান করিতে হইলে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ (axiom) দুইটি প্রয়োগ করিতে হয় :—

(1) সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান অথবা একই রাশি যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান হয় এবং বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান হয়। ইহাকে **পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া** (principle of transposition) বলে।

(2) সমান সমান রাশিকে সমান সমান, অথবা একই রাশির দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলি পরস্পর সমান হয়; এবং ভাগ করিলে ভাগফলগুলিও পরস্পর সমান হয়। ইহাকে **সরলীকরণ-প্রক্রিয়া** (principle of simplification) বলে।

উল্লিখিত প্রক্রিয়াদ্বয়ের যে-কোন একটির অথবা উভয়ের প্রয়োগ-দ্বারা যে-কোন সরল সমীকরণ সমাধান করা যায়। তোমরা উপরি উক্ত প্রক্রিয়া দুইটির ব্যবহার অভ্যাস করিবে।

82. তুল্য সমীকরণ (Equivalent Equations)

যদি দুইটি সমীকরণ থাকে এবং যদি অজ্ঞাত রাশির কোন নির্দিষ্ট মান-দ্বারা একটি সিদ্ধ হইলে অন্যটিও সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে উহাদিগকে **তুল্য সমীকরণ** বলে।

যেমন, $x+3=15$ এবং $2x+1=25$ দুইটি 'তুল্য সমীকরণ'; কারণ প্রথমটি কেবলমাত্র $x=12$ দ্বারা সিদ্ধ হয় এবং দ্বিতীয়টিও কেবলমাত্র $x=12$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

কিন্তু, $x^2=144$ সমীকরণটি উক্ত সমীকরণদ্বয়ের তুল্য নহে; কারণ এই সমীকরণটি $x=12$ দ্বারা সিদ্ধ এবং $x=-12$ দ্বারাও সিদ্ধ হয়; কিন্তু পূর্বোক্ত সমীকরণদ্বয় $x=-12$ দ্বারা সিদ্ধ হয় না।

সুতরাং একই বীজ-বিশিষ্ট দুইটি সমীকরণকে 'তুল্য সমীকরণ' বলা যাইতে পারে।

83. পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া (Principle of Transposition)

উদা. তুলাদণ্ডের একটি পাল্লায় একটি 5 সের ওজনের বাটখারা এবং অজ্ঞাত ওজনের একটি বস্তু রাখা হইল; অন্য পাল্লায় একটি 12 সের ওজনের বাটখারা রাখিয়া দেখা গেল যে, উহাদের ওজন সমান। বস্তুটির ওজন কত হইবে?

মনে কর, বস্তুটির ওজন x সের। তাহা হইলে, প্রশ্নের সর্ত অনুসারে,

$$x \text{ সের} + 5 \text{ সের} = 12 \text{ সের}$$

$$\text{অর্থাৎ } x+5 = 12 \qquad \cdots \qquad \cdots(1)$$

এক্ষণে, উভয় পাল্লা হইতে 5 সের ওজনের বাটখারা অপসারিত করিলে,

প্রথম পাল্লায় শুধু অজ্ঞাত ওজনের বস্তুটি এবং অপর পাল্লায় মাত্র 7 সের বাটপারা অবশিষ্ট রহিল, এবং দুই পাল্লার ওজনও সমান রহিল।

$$\therefore \quad x=7 \text{ সের।}$$

এস্থলে, কার্যত উভয় পাল্লা হইতে 5 সের অপসারিত করা হইয়াছে। অতএব,

$$x+5-5=12-5, \text{ অর্থাৎ } x=7 \quad \cdots \qquad \cdots(2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে দেখা যায় যে, 5 কে এক পার্শ্ব হইতে অপর পার্শ্বে চিহ্ন-পরিবর্তন-পূর্বক স্থানান্তরিত করা হইয়াছে।

ইহাই 'পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া'; এই প্রক্রিয়া-সাহায্যে সমীকরণের কোন পদকে এক পার্শ্ব হইতে অপর পার্শ্বে চিহ্ন-পরিবর্তন-পূর্বক স্থানান্তরিত করা যাইতে পারে।

84. সরলীকরণ (Simplification)

অজ্ঞাত ওজনের কোন বস্তুর ওজন-নির্ণয়কালে দেখা গেল যে, তুলার এক পাল্লায় বস্তুটি স্থাপন করিলে, তুলার সাম্য আনয়ন করিবার জন্য অন্য পাল্লায় 12 সের ওজনের বাটখারা স্থাপন করিবার প্রয়োজন হয়। সুতরাং বস্তুটির ওজন x ধরিলে, বুঝা গেল যে, $x=12$.

পুনরায়, যে পাল্লায় বস্তুটি স্থাপন করা হইয়াছে সেই পাল্লায় যদি সমান ওজনের অন্য একটি বস্তু স্থাপন করা হয়, তবে দেখা যাইবে যে, তুলার সাম্য আনয়ন করিতে অন্য পাল্লায় 12 সের ওজনের আর একটি বাটখারা স্থাপন করিতে হইবে, অর্থাৎ উভয় পার্শ্বস্থিত ওজন দ্বিগুণ করিয়াও তুলার সাম্য অক্ষুণ্ণ রহিল। সুতরাং $x\times 2=12\times 2$ লেখা যাইতে পারে।

এইরূপ, উভয় পার্শ্বস্থিত ওজন তিনগুণ করিলেও তুলার সাম্য অক্ষুণ্ণ থাকিবে। বস্তুত উভয় পার্শ্বে ওজনের সমান সমান গুণিতক স্থাপন করিলেও তুলার সাম্যের কোনরূপ ব্যতিক্রম হইবে না। অতএব, $x\times 3=12\times 3$, $x\times 4=12\times 4$ এবং সাধারণভাবে, $x\times a=12\times a$.

ঠিক এইরূপ উপায়ে দেখা যায় যে, উক্ত ওজনের অর্ধেক, এক-তৃতীয়াংশ, এক-চতুর্থাংশ প্রভৃতি যে-কোন ভগ্নাংশ ব্যবহার করিলেও তুলার সাম্য বজায় থাকিবে।

সুতরাং, যদি $x=12$ হয়, তাহা হইলে $x+2=12+2$, $x+3=12+3$ এবং সাধারণত, $x+a=12+a$.

ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, সমীকরণের পদসমূহকে একই রাশি-দ্বারা গুণ কিংবা ভাগ করিলেও উহার সমতা অক্ষুণ্ন থাকে।

85. সরল সমীকরণের বিভিন্ন রূপ (Types of Simple Equations)

সরল সমীকরণ-সমাধানের সাধারণ প্রক্রিয়া আলোচনা করিবার পূর্বে উক্ত সমীকরণসমূহের বিভিন্ন আকার এবং তাহাদের সমাধানপ্রণালী আলোচনা করা হইবে।

সরল সমীকরণের রূপ প্রধানত নিম্নলিখিত তিন প্রকারের হইয়া থাকে :

1. **প্রথম প্রকার।** $ax=b$, ইহাই সরল সমীকরণের সরলতম আকার। ইহার এক পক্ষে যে-কোন সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশিটি এবং অপর পক্ষে কেবলমাত্র জ্ঞাত রাশিটি বিদ্যমান থাকে।

2. **দ্বিতীয় প্রকার।** $ax+b=c$, ইহা সরল সমীকরণের অন্য একটি আকার। ইহার এক পার্শ্বে অজ্ঞাত রাশি x এর যে-কোন গুণিতক ও একটি জ্ঞাত রাশি এবং অপর পার্শ্বে কেবলমাত্র জ্ঞাত রাশি বিদ্যমান থাকে।

3. **তৃতীয় প্রকার।** পূর্বোক্ত দুই প্রকারের সরল সমীকরণ ব্যতীত আর এক আকারের সমীকরণও (যথা, $ax+b=cx+d$) দেখা যায়। এই আকারের সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি উভয় পক্ষেই বিদ্যমান থাকে।

উল্লিখিত a, b, c, d রাশিগুলি ধন অথবা ঋণ, পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ—যে-কোন মানবিশিষ্ট হইতে পারে।

মনে রাখিতে হইবে যে, সর্বপ্রকারের সমীকরণ-সমাধানকালেই প্রথমে পক্ষান্তর-করণ-প্রক্রিয়া-সাহায্যে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত পদগুলিকে বাম পার্শ্বে এবং অন্যান্য জ্ঞাত রাশিগুলিকে দক্ষিণ পার্শ্বে স্থানান্তরিত করিয়া পরে সরলীকরণ-প্রক্রিয়া প্রয়োগ করিতে হয়।

86. সরল সমীকরণ (প্রথম প্রকার) : $ax=b$

উভয় পক্ষকে x এর সহগ, অর্থাৎ a দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}, \text{ অর্থাৎ } x=\frac{b}{a};$$

সুতরাং, $\frac{b}{a}$ ঐ সমীকরণের বীজ।

a এবং b পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইলেও সর্বত্রই এই প্রক্রিয়া অবলম্বন করা যায়। a এবং b এর যে-কোন একটি অথবা দুইটিই ভগ্নাংশ হইলে উক্ত ভগ্নাংশের হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া সমীকরণটিকে ভগ্নাংশ-মুক্ত করিয়া লইতে হয়।

সমীকরণে একই পক্ষের এক বা একাধিক পদে অজ্ঞাত রাশিটি অবস্থিত হইলেও এই প্রক্রিয়া-দ্বারা ঐ সমীকরণটির সমাধান করা যাইতে পারে।

যেমন, $ax+bx+cx=d$ হইলে, $(a+b+c)x=d$;

উভয় পক্ষকে $(a+b+c)$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=d\div(a+b+c)$.

এইরূপ, $ax+bx+cx=d+e+f$ হইলে,

$$x(a+b+c)=d+e+f, \text{ অথবা } x=\frac{d+e+f}{a+b+c}.$$

উদা. 1. $5x=15$ সমীকরণটি সমাধান কর।

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=15\div5=3$;

$\therefore$ উক্ত সমীকরণের বীজ 3.

উদা. 2. $\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}$ সমাধান কর।

এ স্থলে, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$; সুতরাং দুইটিই ভগ্নাংশ। ভগ্নাংশদ্বয়ের হর 2 এবং 3 এর ল. সা. গু. 6 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিলে, প্রদত্ত সমীকরণটি $3x=4$ এই আকার ধারণ করে।

এখন ইহার দুই পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=\frac{4}{3}$ অথবা $1\frac{1}{3}$;

সুতরাং, সমীকরণের বীজ $1\frac{1}{3}$.

উদা. 3. একটি সংখ্যার তিনগুণের সহিত ঐ সংখ্যার চারগুণ যোগ করিলে 84 হয়। সংখ্যাটি কত?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x; সুতরাং সংখ্যাটির 3 গুণ $=3x$, এবং সংখ্যাটির 4 গুণ $=4x$.

প্রশ্নের সর্ত অনুসারে, $3x+4x=84$, অথবা $7x=84$;

উভয় পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=12$.

উদা. 4. $5{\cdot}2x=15{\cdot}6$ সমাধান কর।

দুই পক্ষকে 5·2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=15{\cdot}6\div5{\cdot}2$

অথবা, $x=3$; সুতরাং নির্ণেয় বীজ 3.

দশমিকগুলিকে তুল্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন করিয়া সাধারণ নিয়মানুসারে কার্য করা যায়।

উদা. 5. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$ সমাধান কর।

ভগ্নাংশগুলির হর 2, 3 এবং 4 এর ল. সা. গু. 12 দ্বারা দুই পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$6x+4x+3x=13\times12,$$

অর্থাৎ, $13x=13\times12$;

$\therefore$ $x=12$; সুতরাং নির্ণেয় বীজ 12.

প্রশ্নমালা 18

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $2x=4$.
2. $7x=28$.
3. $-17x=51$.
4. $\frac{1}{2}x=3$.
5. $-\frac{1}{3}x=\frac{3}{4}$.
6. $\frac{3}{4}x=12$.
7. $\frac{1}{6}x=\frac{1}{5}$.
8. $\frac{x}{4}=\frac{3}{8}$.
9. $2{\cdot}5x=10$.
10. $-8{\cdot}1x=24{\cdot}3$.
11. $4\frac{2}{3}x=9\frac{1}{3}$.
12. $x+3x=12$.
13. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x=17$.
14. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=1+\frac{1}{6}$.
15. $1{\cdot}5x+2{\cdot}6x=2{\cdot}05$.
16. একটি সংখ্যাকে 5 দ্বারা গুণ করিলে 30 হয়; সংখ্যাটি কত?

17. একটি সংখ্যাকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 9 হয়; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. কোন্ সংখ্যাকে 7 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 35 হয়?

19. কোন্ সংখ্যাকে 32 দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{1}{8}$ হয়?

20. কোন সংখ্যার 3 গুণকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে 9 হয়; সংখ্যাটি কত?

87. সরল সমীকরণ (দ্বিতীয় প্রকার): $ax+b=c$

পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া-দ্বারা b কে বাম পক্ষ হইতে দক্ষিণ পক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া, $ax=c-b$ পাওয়া যায়; ইহা একটি প্রথম প্রকারের সমীকরণ।

ইহার দুই পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{ax}{a}=\frac{c-b}{a}, \text{ অথবা } x=\frac{c-b}{a};$$

$$\text{সুতরাং ইহার বীজ } \frac{c-b}{a}.$$

বিকল্প রূপ (Alternative Form): এই প্রকারের সমীকরণ $d(ax+b)=c$ আকার-বিশিষ্টও হইতে পারে। এ স্থলে দুই পক্ষকে d দ্বারা ভাগ করিলেই ইহা পূর্ব আকারে পরিবর্তিত হয়।

উদা. 1. $2x+5=11$ সমীকরণটি সমাধান কর।

উভয় পক্ষ হইতে 5 বিয়োগ করিয়া, অর্থাৎ পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া-দ্বারা 5 কে বাম পক্ষ হইতে দক্ষিণ পক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া,

$$2x=11-5=6.$$

এখন দুই পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=3$.

উদা. 2. সমাধান কর: $-3x+4=10$.

উভয় পক্ষে $3x$ যোগ করিয়া, $-3x+4+3x=10+3x$,

অর্থাৎ, $4=10+3x$.

এখন উভয় পক্ষ হইতে 10 বিয়োগ করিয়া, $4-10=10+3x-10$,

অর্থাৎ, $-6=3x$;

অবশেষে উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=-2$.

উদা. 3. সমাধান কর : $5(3x+7)=50$.

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া, $3x+7=50\div5=10$;

7 কে দক্ষিণ পার্শ্বে পক্ষান্তর করিয়া, $3x=10-7=3$;

এখন উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=1$.

উদা. 4. এমন তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের যোগফল 42 হইবে।

মনে কর, তিনটি সংখ্যার লঘুতমটি x ; তাহা হইলে অব্যবহিত পরবর্তী ক্রমিক সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে $x+1$ এবং $x+2$.

প্রশ্নের সর্ত অনুসারে, $x+(x+1)+(x+2)=42$,

অর্থাৎ, $3x+3=42$.

3 কে দক্ষিণ পার্শ্বে পক্ষান্তর করিয়া, $3x=42-3=39$;

এখন উভয় পক্ষ 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=13$,

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি 13, 13+1, 13+2,

অর্থাৎ, 13, 14 এবং 15.

প্রশ্নমালা 19

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x এর মান নির্ণয় কর :—

1. $x-2=5$.
2. $2x+3=7$.
3. $7x-4=10$.
4. $x+5=12$.
5. $\frac{3}{4}x-8=7$.
6. $3(2x+6)=126$.
7. $\frac{x+3}{2}=1.3$.
8. $7(9x+3)=84$.
9. $28=4(5x-3)$.

সমাধান কর :—

10. $6(11x-\frac{1}{2})=9$.
11. $\frac{2}{3}(12-4.8x)=1.6$.
12. $5-1.6x=\frac{1}{5}$.
13. $\frac{2}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{2}$.

14. কোন সংখ্যার তিন গুণের সহিত 6 যোগ করিলে 21 হয় ; সংখ্যাটি কত ?

15. কোন্ সংখ্যার অর্ধেক হইতে 9 বিয়োগ করিলে 33 হয় ?

16. একটি সংখ্যার সহিত 4 যোগ করিয়া যোগফলকে 3 দ্বারা গুণ করিলে 51 হয়; সংখ্যাটি কত?

17. কোন সংখ্যা হইতে 3 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 8 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 112 হয়; সংখ্যাটি কত?

18. কোন্ সংখ্যার 5 গুণের সহিত 6 যোগ করিলে 41 হয়?

88. সরল সমীকরণ (তৃতীয় প্রকার): $ax+b=cx+d$

এ স্থলে, পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া-সাহায্যে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত পদগুলিকে বাম পক্ষে এবং অন্যান্য রাশিগুলিকে দক্ষিণ পক্ষে স্থানান্তরিত করা হইল। অতএব,

$$ax-cx=d-b, \text{ অথবা } (a-c)x=d-b;$$

এখন উভয় পক্ষ $a-c$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $\dfrac{(a-c)x}{a-c}=\dfrac{d-b}{a-c}$,

অথবা, $x=\dfrac{d-b}{a-c}$.

a, b, c, d রাশিসমূহের এক বা একাধিক ভগ্নাংশ হইলে, পদগুলিকে পক্ষান্তর করিবার পূর্বে সমীকরণটিকে ভগ্নাংশ-মুক্ত করিয়া লইতে হয়।

সমীকরণের উভয় পক্ষে একই পদ বর্তমান থাকিলে, অন্য পদগুলিকে পক্ষান্তর করিবার পূর্বে এই পদগুলি অপসারণ করা কর্তব্য।

উদা. 1. সমাধান কর: $5x+3=2x+6$.

পক্ষান্তর করিয়া, $5x-2x=6-3$,

অর্থাৎ, $3x=3$,

এখন 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=1$.

উদা. 2. সমাধান কর: $7(x-18)=3(x-14)$.

উভয় পক্ষের বন্ধনী অপসারণ করিয়া,

$$7x-126=3x-42,$$

পক্ষান্তর করিয়া, $7x-3x=-42+126$, অথবা, $4x=84$,

এখন 4 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=21$.

উদা. 3. 45 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন বৃহত্তর অংশের 4 গুণ লঘুতর অংশের 5 গুণের সমান হয়।

মনে কর, বৃহত্তর অংশটি x ; তাহা হইলে লঘুতর অংশটি $45-x$.

এক্ষণে বৃহত্তর অংশের 4 গুণ $=4x$; এবং লঘুতর অংশের 5 গুণ $=5(45-x)$.

সুতরাং, প্রদত্ত সর্ত অনুসারে,

$$4x=5(45-x),$$

অর্থাৎ, $\quad 4x=225-5x.$

পক্ষান্তর করিয়া, $\quad 9x=225, \quad \therefore \quad x=25.$

$\therefore$ বৃহত্তর অংশটি $x=25$ এবং লঘুতর অংশটি $45-x=45-25=20$.

প্রশ্নমালা 20

সমাধান কর :—

1. $5x+2=2x+23$.
2. $2x-7=x+11$.
3. $4x-13=2-x$.
4. $3x=2x+15$.
5. $15x+28=48+5x$.
6. $56-21x=36x-1$.
7. $72x-48=65x+1$.
8. $3(x-2)=x+4$.
9. $2x+3=5(x-3)$.
10. $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{x+11}{5}$.
11. $\frac{1}{6}(x+2)=5(14{\cdot}3-2x)$.
12. $\dfrac{x-2}{2}-2=\dfrac{x-3}{3}$.
13. ${\cdot}8(2-4x)={\cdot}32(3-5x)$.
14. $2(x+3)+7=3(x+5)+4$.
15. $(2x+5)=7+(x+3)$.

16. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার তিনগুণের সহিত 4 যোগ করিলে এবং দ্বিগুণের সহিত 6 যোগ করিলে একই ফল হয়।

17. 48 হইতে কোন একটি সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল উক্ত সংখ্যাটির 5 গুণ হয় ; সংখ্যাটি কত ?

18. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার 3 গুণের সহিত 13 যোগ করিলে এবং 8 গুণ হইতে 12 বিয়োগ করিলে একই ফল হয়।

89. সরল সমীকরণের বিশিষ্ট রূপ (Special Type)

অনেক সময়ে অজ্ঞাত রাশির উচ্চতর ঘাতসমূহ বিদ্যমান থাকিলেও সমীকরণটি প্রকৃতপক্ষে সরল সমীকরণেরই রূপান্তর মাত্র ; কারণ উচ্চতর ঘাতগুলি সমচিহ্ন- এবং একই সহগ-যুক্ত অবস্থায় উভয় পক্ষেই বিদ্যমান থাকে ; সুতরাং উহাদিগকে সমীকরণ হইতে অপসারণ করিলে, উভয় পক্ষের সমতার কোনরূপ ব্যতিক্রম হয় না।

উদা. 1. সমাধান কর : $(x+1)(x+2)=(x-1)(x+6)$.

সমীকরণটিতে অজ্ঞাত রাশি x এর দ্বিতীয় ঘাত x^2 বিদ্যমান থাকায়, আপাত-দৃষ্টিতে ইহাকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ (quadratic equation) বলিয়া মনে হয় ; কিন্তু উভয় পক্ষ হইতে x^2 অপসারণ করিলেই দেখা যায় যে, ইহা একটি সরল সমীকরণ।

উভয় পক্ষের গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করিয়া,

$$x^2+3x+2=x^2+5x-6\ ;$$

উভয় পক্ষ হইতে x^2 অপসারণ করিয়া,

$$3x+2=5x-6\ ;$$

এখন পক্ষান্তর করিয়া, $2x=8$; $\therefore\ x=4$.

উদা. 2. সমাধান কর : $(x+1)^2=x^2+3$.

বাম পক্ষের বন্ধনী অপসারণ করিয়া,

$$x^2+2x+1=x^2+3\ ;$$

এখন উভয় পক্ষ হইতে x^2 অপসারণ করিয়া,

$$2x+1=3\ ;\quad \text{অতএব,}\quad x=1.$$

প্রশ্নমালা 21

সমাধান কর :—

1. $x^2+2=x^2+x$. 2. $x^2+3=(x-1)(x+2)$.
3. $(x+1)(x+2)=x(x+4)$. 4. $x^2-36=x(x-4)$.
5. $(x+5)(x-2)=x(x+2)+1$.
6. $(x^2-3x-7)(x-1)=x^2(x-4)-5(x-2)$.

7. $(x^2-2x-5)(x+1)=x^2(x-1)-8(x+1)$.

8. $(x+1)(x-4)=x^2-11$.

9. $3x(2x+1)=6(x+7)(x-3)$.

10. $(x+1)^2+(x-2)^2=2x^2-x+1$.

11. x এর মান কত হইলে $15-x(8-x)$ এবং $(x-5)^2$ এই দুইটি রাশি পরস্পর সমান হইবে ?

12. প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি অভেদ :—

(i) $(x+3)(2x-7)+3=2x(x-5)+9(x-2)$.

(ii) $6-4(x-3)=2(9-2x)$.

13. প্রমাণ কর যে, $(x-5)^2-4(3-x)=(x+2)^2-10(x-1)-1$ সমীকরণটি x এর যে-কোন মান-দ্বারাই সিদ্ধ।

14. x এর মান কত হইলে, $\frac{7(x-3)}{4}-\frac{3(x-2)}{2}$ এর মান 8 হইবে ?

15. কোন সংখ্যার সহিত 1 যোগ করিয়া যোগফলকে ঐ সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিলে, গুণফলটি ঐ সংখ্যার বর্গ হইতে 3 অধিক হয় ; সংখ্যাটি কত ?

16. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে সেই সংখ্যাটি অপেক্ষা 3-বড় সংখ্যার দ্বারা গুণ করিলে গুণফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 15 অধিক হয়।

17. কোন সংখ্যার সহিত 1 যোগ করিয়া যোগফলকে ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 2-বড় সংখ্যার দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ঐ সংখ্যার বর্গ অপেক্ষা 23 অধিক হয়। সংখ্যাটি কত ?

18. $a=3$ এবং $b=2$ হইলে, x এর এমন কোন মান আছে কিনা যাহার দ্বারা $x-3a+a+b$ এবং $(x-3a)\div(a+b)$ রাশি দুইটি পরস্পর সমান হয় ?

অষ্টম অধ্যায়

বিন্দু-অঙ্কন (Plotting of Points) ও লেখাবলী (Graphs)

90. জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ (Application of Algebra to Geometry)

এ পর্যন্ত সংখ্যা এবং সংখ্যাসম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াগুলিই ব্যাপকভাবে আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে কি প্রকারে বীজগণিতীয় রাশি এবং রাশিমালা জ্যামিতিক বিন্দু এবং চিত্র-দ্বারা সূচিত হইতে পারে, তাহাই আলোচিত হইবে। বহু ক্ষেত্রে এই সকল চিত্র-সাহায্যে বীজগণিতীয় সমীকরণসমূহের সমাধান পূর্ববর্ণিত বীজ-গণিতীয় প্রক্রিয়া অপেক্ষা আরও সহজে নির্ণয় করা যায়। এইরূপ চিত্র-সাহায্যে প্রশ্ন-সমাধানের প্রক্রিয়াকে **লৈখিক প্রক্রিয়া** (graphical method) বলা হয়। লৈখিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে প্রশ্নসমূহের সমাধান, অনেক ক্ষেত্রে, বেশি সহজ হইলেও বীজগণিতীয় প্রক্রিয়াই অধিকতর নিয়ম-সঙ্গত এবং বৈজ্ঞানিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। কিন্তু লৈখিক চিত্র-সাহায্যে আমরা প্রদত্ত প্রশ্নের একটি অস্পষ্ট ছবি প্রত্যক্ষ করিতে পারি, এই নিমিত্তই বৈজ্ঞানিক জগতে ইহার ব্যবহার অতি দ্রুত বৃদ্ধি পাইতেছে।

91. সংখ্যার দ্বারা বিন্দুর পরিচয় (Representation of Points by Numbers)

পার্শ্ববর্তী স্থানের পরিচয় জানা থাকিলেই যে-কোন স্থানের অবস্থান নির্দেশ করা যায়। উক্ত পরিচিত স্থান-সমূহের সাহায্যে যে-কোন অপরিচিত ব্যক্তিও ঐ স্থানে পৌছিতে পারে। কাগজের উপর কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইলেও এই একই প্রক্রিয়া অবলম্বন করা হয়। এ স্থলে, পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুইটি সরলরেখাকে অক্ষ-স্বরূপ লওয়া হয়; সুতরাং এই দুই রেখা হইতে উক্ত সমতলস্থ যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব জানা থাকিলেই বিন্দুটির অবস্থান নির্ধারিত হইতে পারে।

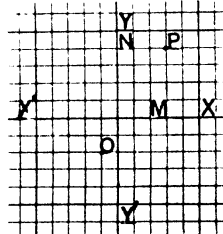
92. অক্ষদ্বয় (Axes of Reference) ; স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)

উপরি উক্ত যে দুইটি নির্দিষ্ট (এবং সাধারণত পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত) সরলরেখা-সাহায্যে কোন সমতলের বিন্দুসমূহের অবস্থান নিরূপিত হয়, তাহাদের প্রত্যেককে **অক্ষ** (Axis) বলে। এই অক্ষদ্বয় ঐ সমতলের উপর অবস্থিত এবং অসীম দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট দুইটি স্থির, নির্দিষ্ট সরলরেখা।

স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) : মনে কর, কাগজের সমতলের উপর XOX′ এবং YOY′ দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুটিকে **মূলবিন্দু** (origin) বলা হয় এবং XOX′ ও YOY′ রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে 'x-অক্ষ' এবং 'y-অক্ষ' বলা হয়।

উক্ত রেখাদ্বয় হইতে ঐ সমতলে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর দূরত্ব জানা থাকিলেই ঐ বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশ করা যাইতে পারে। এই দূরত্বের প্রত্যেকটির সাংখ্যমানকে (measure) P বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** বলা হয় এবং ইহাদিগকে যথাক্রমে x ও y দ্বারা সূচিত করা হয়।

P বিন্দু হইতে XOX′ এবং YOY′ রেখা দুইটির উপর যথাক্রমে PM এবং PN দুইটি লম্ব অঙ্কিত কর। মনে কর, PM এবং PN এর দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সাংখ্যমান (যে-কোন একক অনুসারে পরিমিত) যথাক্রমে x এবং y. এই x এবং y এর প্রত্যেকটিকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়; x কে P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা **ভুজ** (abscissa) এবং y কে উহার y-স্থানাঙ্ক বা **কোটি** (ordinate) বলে; এবং P বিন্দুটিকে P (x, y) এইরূপ লেখা হয়।

চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, PN = OM = x ; সুতরাং OM এবং PM, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

অতএব কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইলে, ঐ বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্বটি অঙ্কিত করিতে হয়। মূলবিন্দু হইতে এই লম্বের পাদদেশের দূরত্ব OM ঐ বিন্দুর ভুজ এবং এই লম্বের দৈর্ঘ্য PM ঐ বিন্দুর কোটি।

পক্ষান্তরে, স্থানাঙ্ক জানা থাকিলেও বিন্দুটির অবস্থান নির্ধারণ করা যায়। এ স্থলে প্রথমেই x-অক্ষ হইতে প্রদত্ত x-স্থানাঙ্কের সমান করিয়া OM অংশ কাটিয়া লইয়া পরে M বিন্দুতে, x-অক্ষের উপর, প্রদত্ত y-স্থানাঙ্কের সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি লম্ব PM অঙ্কিত করিতে হয়।

এখন $OM = a$ এবং $PM = b$ হইলে বিন্দুটিকে $P(a, b)$ এইরূপ নির্দেশ করা যায়। অতএব, '(a, b) বিন্দু' অথবা কেবলমাত্র (a, b) দ্বারা এমন একটি বিন্দু নির্দিষ্ট হয় যাহার ভুজের দৈর্ঘ্য a একক এবং কোটির দৈর্ঘ্য b একক।

যথা, $P(3, 4)$ দ্বারা এইরূপ একটি বিন্দু সূচিত হয় যাহার ভুজ $= 3$ একক এবং কোটি $= 4$ একক, অর্থাৎ যাহার $x = 3$ এবং $y = 4$.

দ্রষ্টব্য 1. কোন বিন্দুর "x এবং y" বলিলে উহার ভুজ এবং কোটিকেই বুঝিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে কাগজের সমতলে বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশ করাকেই "বিন্দু-অঙ্কন" বলে।

93. চিহ্ন-সম্বন্ধীয় নিয়ম (Convention of Signs)

OX এবং OY কে অক্ষদ্বয়ের পজিটিভ দিক্ গণ্য করিলে, উহাদের বিপরীত দিকে অঙ্কিত OX′ এবং OY′ কে নেগেটিভ দিক্ গণ্য করিতে হয়, ইহাই প্রচলিত রীতি; এবং ইহা স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে যে, মূলবিন্দুর দক্ষিণ দিক্ x-অক্ষের পজিটিভ দিক্ এবং উহার ঊর্ধ্ব দিক্ y-অক্ষের পজিটিভ দিক্ গণ্য হইবে।

OX এর সমান্তরাল করিয়া (অর্থাৎ YOY′ এর দক্ষিণ দিকে) অঙ্কিত রেখা-সমূহের দৈর্ঘ্যকে ধন এবং OX′ এর সমান্তরাল করিয়া (অর্থাৎ YOY′ এর বাম দিকে) অঙ্কিত রেখা-সমূহের দৈর্ঘ্যকে ঋণ গণ্য করা হয়; এইরূপ OY এর সমান্তরাল করিয়া (অর্থাৎ XOX′ এর ঊর্ধ্ব দিকে) অঙ্কিত রেখা-সমূহের দৈর্ঘ্যকে ধন এবং OY′ এর সমান্তরাল করিয়া (অর্থাৎ XOX′ এর নিম্ন দিকে) অঙ্কিত রেখা-সমূহের দৈর্ঘ্যকে ঋণ গণ্য করা হয়।

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিতে হইবে যে, দক্ষিণ এবং ঊর্ধ্ব দিক্‌কে সর্বদাই পজিটিভ দিক্ গণ্য করিতে হয়।

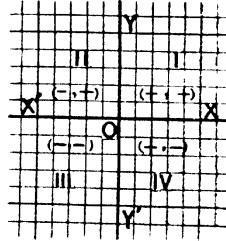
অক্ষ দুইটির দ্বারা কাগজের সমতল I, II, III এবং IV চারটি চিহ্নিত অংশে বিভক্ত হইয়াছে। উহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পাদ (Quadrant) বলা হয়।

প্রথম পাদস্থিত বিন্দু-সমূহের ভুজ এবং কোটি উভয়েই ধন; কারণ উহারা y-অক্ষের দক্ষিণে এবং x-অক্ষের উর্ধ্বে অবস্থিত।

দ্বিতীয় পাদস্থিত বিন্দু-সমূহের ভুজ ঋণ; কারণ উহারা y-অক্ষের বাম পার্শ্বে অবস্থিত; কিন্তু x-অক্ষের উর্ধ্বে অবস্থিত বলিয়া উহাদের কোটি ধন।

তৃতীয় পাদস্থিত বিন্দু-সমূহের ভুজ এবং কোটি উভয়েই ঋণ, কারণ উহারা y-অক্ষের বাম পার্শ্বে এবং x-অক্ষের নিম্নে অবস্থিত।

চতুর্থ পাদস্থিত বিন্দু-সমূহ Y-অক্ষের দক্ষিণে অবস্থিত বলিয়া, উহাদের ভুজ ধন; কিন্তু x-অক্ষের নিম্নে অবস্থিত বলিয়া উহাদের কোটি ঋণ।

Y
II
I
(−, +)
(+ , +)
X'
X
O
(−, −)
(+ , −)
III
IV
Y'

নিম্নে প্রদত্ত তালিকা হইতে স্থানাঙ্কের চিহ্ন সহজেই নির্ণীত হইতে পারে :—

পাদ ...	I	II	III	IV
ভুজ ...	+	−	−	+
কোটি ...	+	+	−	−

94. ছক কাগজ (Squared Paper)

কাগজের উপর সমদূরবর্তী কতগুলি অনুভূমিক (horizontal) এবং উল্লম্ব (vertical) সরলরেখা (অনেক সময়ে কাগজের নিম্ন প্রান্তের সমান্তরাল রেখা-সমূহকে অনুভূমিক রেখা এবং উহাদের লম্বভাবে অঙ্কিত রেখা-সমূহকে উল্লম্ব রেখা বলা হয়) অঙ্কিত করিলে, কাগজখানি কতগুলি সমান বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। এইরূপ বর্গাঙ্কিত কাগজকে **ছক কাগজ** বলে। উক্ত সমান্তরাল রেখাগুলির পরস্পরের মধ্যস্থ দূরত্ব 1 ইঞ্চির $\frac{1}{10}$ এবং উহাদের প্রত্যেক পঞ্চমটিকে অথবা দশমটিকে অন্যান্য রেখা-সমূহ অপেক্ষা কিঞ্চিৎ স্থূলতর করিয়া অঙ্কিত করা হয়।

এইরূপে ছক কাগজখানি উক্ত রেখাগুলির দ্বারা (1) এক ইঞ্চির দশমাংশ দীর্ঘ বাহু-বিশিষ্ট বহুসংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে এবং (2) অর্ধ ইঞ্চি বা এক ইঞ্চি দীর্ঘ বাহু-এবং স্থূলতর পরিসীমা-বিশিষ্ট কতকগুলি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। ছক কাগজ-দ্বারা বিন্দু-অঙ্কন-কার্যের বিশেষ সুবিধা হয়, কারণ ইহার উপর বিন্দুসমূহের কোটি অঙ্কিত করিবার এবং অঙ্কিত কোটির দৈর্ঘ্য মাপিবার কোনও প্রয়োজন হয় না।

দ্রষ্টব্য। যদি দৈর্ঘ্যের একক ফুট বা ইঞ্চি না ধরিয়া সেন্টিমিটার বা মিলিমিটার ধরা হয়, তাহা হইলে তদনুসারে ভিন্নপ্রকার বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত ছক কাগজ ব্যবহৃত হয়।

95. বিন্দু-অঙ্কন (Plotting of Points)

ইতিপূর্বে অক্ষ, পাদ, স্থানাঙ্কের চিহ্ন প্রভৃতি বিষয়-সম্বন্ধীয় যাবতীয় জ্ঞাতব্য আলোচিত হইয়াছে; সুতরাং স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে, অতি সহজেই বিন্দুর অবস্থান নিরূপণ করা যাইতে পারে। বিন্দুর অবস্থান-নিরূপক-প্রক্রিয়াকে **বিন্দু-অঙ্কন** প্রক্রিয়া বলা হয়। বিন্দু অঙ্কনকালে নিম্নলিখিত নিয়মসমূহ বিশেষ-ভাবে মনে রাখিতে হইবে :—

1. অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া উহাদের পজিটিভ এবং নেগেটিভ দিক্ নির্দেশ কর। পরস্পর ছেদকারী দুইটি স্থূল রেখাকে x-অক্ষ- এবং y-অক্ষ-রূপে গ্রহণ করা সুবিধাজনক।

2. সুবিধাজনক এবং সুষ্ঠু এককসমূহ নির্বাচন কর।

3. অক্ষদ্বয়ের উপর উক্ত এককসমূহ চিহ্নিত করিয়া সূচিত রাশিসমূহের স্পষ্ট উল্লেখ কর। ভুজ ও কোটির পরিমাণ সাধারণত একই একক অনুসারে করিতে হইবে।

4. মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর প্রদত্ত ভুজের সমান দৈর্ঘ্য মাপিয়া উহার প্রান্ত-বিন্দুটি নির্দেশ কর। ভুজ ধন হইলে মূলবিন্দু হইতে ডান দিকে এবং ঋণ হইলে বাঁ দিকে উক্ত দৈর্ঘ্য মাপিতে হইবে।

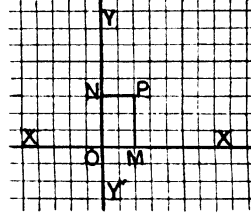
5. পরে, ঐ প্রান্ত-বিন্দু হইতে অঙ্কিত (কোটি ধন হইলে ঊর্ধ্ব দিকে এবং ঋণ হইলে নিম্ন দিকে) একটি উল্লম্ব-রেখার উপর কোটির সমান দৈর্ঘ্য মাপিয়া লও। ইহার প্রান্ত-বিন্দুটিই নির্ণেয় অবস্থান।

6. বিন্দুটির অবস্থান নিরূপিত হইলে, ঐ স্থানে একটি × বা ∘ চিহ্ন স্থাপন কর।

দ্রষ্টব্য। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), y-অক্ষরেখার উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ $=0$; এবং x-অক্ষরেখার উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি $=0$.

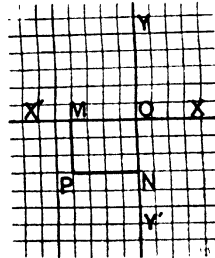
উদা. 1. (2, 3) স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট বিন্দুটি অঙ্কিত কর।

একখানি ছক কাগজের উপর XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধর।

এ স্থলে, উভয় স্থানাঙ্কই ধন, সুতরাং বিন্দুটি প্রথমপাদে অবস্থিত হইবে। মূলবিন্দু হইতে OX এর উপর 2 এককের সমান করিয়া OM দৈর্ঘ্য কাটিয়া লও, এবং M বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত উল্লম্ব (vertical) রেখার উপর 3 এককের সমান করিয়া MP দৈর্ঘ্য মাপিয়া লও। তাহা হইলে P ই নির্ণেয় বিন্দু।

বিকল্প প্রক্রিয়া: OX এর উপর OM $=2$ (দৈর্ঘ্যের) একক মাপিয়া লও, এবং OY এর উপর ON $=3$ (দৈর্ঘ্যের) একক মাপিয়া লও। এখন, M এবং N এর মধ্য দিয়া যথাক্রমে OY এবং OX এর সমান্তরাল করিয়া MP এবং NP রেখাদ্বয় অঙ্কিত কর। এই দুই রেখার ছেদবিন্দু P ই নির্ণেয় বিন্দু।

উদা. 2. $x=-4$, $y=-3$ স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট বিন্দুটি অঙ্কিত কর।

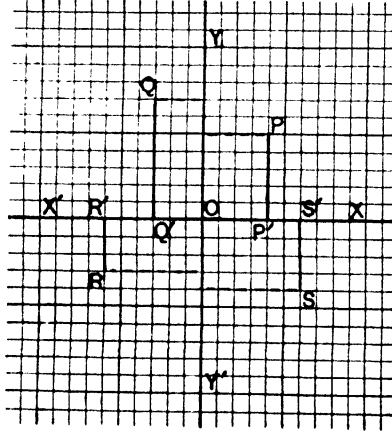
এ স্থলে, উভয় স্থানাঙ্কই ঋণ, সুতরাং বিন্দুটি তৃতীয়পাদে অবস্থিত হইবে।

OX′ এর উপর OM $=4$ (দৈর্ঘ্যের) একক মাপিয়া লও, এবং OY′ এর উপর ON $=3$ (দৈর্ঘ্যের) একক মাপিয়া লও। M এবং N এর মধ্য দিয়া যথাক্রমে OY′ এবং OX′ এর সমান্তরাল করিয়া MP এবং NP রেখাদ্বয় অঙ্কিত করিলে, এই দুই রেখার ছেদবিন্দু P ই নির্ণেয় বিন্দু।

96. স্থানাঙ্ক-নির্ণয় (Determination of Co-ordinates)

কোন বিন্দুর অবস্থান জানা থাকিলে, নিম্নলিখিত প্রণালীতে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায় :—

উদা. নিম্নের চিত্রস্থিত P, Q, R এবং S বিন্দুচতুষ্টয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধর।

(*i*) P বিন্দুটি প্রথমপাদে অবস্থিত, সুতরাং ইহার উভয় স্থানাঙ্কই ধন হইবে। P হইতে OX এর উপর একটি লম্ব PP′ অঙ্কিত কর; মনে কর, ইহা OX কে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, P বিন্দুর ভুজ = OP′ এবং উহার কোটি = P′P. চিত্র হইতে দেখা যায়, OP′ = 4 একক এবং PP′ = 5 একক; সুতরাং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x=4$ এবং $y=5$.

(*ii*) Q বিন্দুটি দ্বিতীয়পাদে অবস্থিত; সুতরাং ইহার ভুজ ঋণ, কিন্তু কোটি ধন হইবে। Q হইতে OX′ এর উপর একটি লম্ব QQ′ অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, Q এর ভুজ $= OQ'$ এবং কোটি $= Q'Q$.

চিত্র হইতে দেখা যায়, $OQ' = 3$ একক এবং $Q'Q = 7$ একক।

অতএব, Q বিন্দুটি $(-3, 7)$.

(*iii*) R বিন্দুটি তৃতীয়পাদে অবস্থিত ; সুতরাং ইহার ভুজ এবং কোটি উভয়ই ঋণ হইবে। RR' লম্বটি অঙ্কিত করিলে দেখা যায় যে, R বিন্দুর ভুজ $= OR'$ এবং কোটি $= R'R$; কিন্তু $OR' = 6$ একক এবং $R'R = 3$ একক। অতএব R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-6, -3)$.

(*iv*) S চতুর্থপাদে অবস্থিত বলিয়া, ইহার ভুজ ধন, কিন্তু কোটি ঋণ হইবে। পূর্ববৎ লম্ব অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, ইহার ভুজ $OS' = 6$ একক এবং কোটি $S'S = 4$ একক।

$$\therefore \text{ S বিন্দুটি } (6, -4).$$

97. ছক কাগজের ব্যবহার-সংক্রান্ত কয়েকটি দৃষ্টান্ত

উদা. 1. (*i*) ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া এবং (*ii*) স্থূল পরিসীমা-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া, অনু. 95, উদা. 1 এর চিত্রস্থিত P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

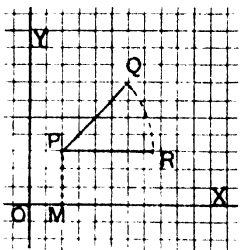
(*i*) চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক OM এবং PM, এবং $OM = 2$ একক ও $PM = 3$ একক। P প্রথমপাদে অবস্থিত বলিয়া, উহার উভয় স্থানাঙ্কই ধন হইবে। অতএব, উহার স্থানাঙ্ক $x = 2$, $y = 3$; অর্থাৎ এটি (2, 3) বিন্দু।

(*ii*) স্থূল পরিসীমাবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরা হইলে, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য এই এককের এক-পঞ্চমাংশ হইবে।

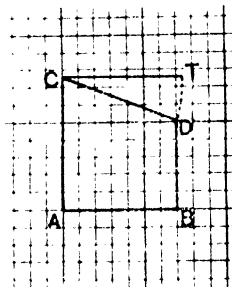
এক্ষণে, $OM =$ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দ্বিগুণ $=$ নূতন এককের $\frac{2}{5}$ গুণ ;
এবং $PM =$ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর 3 গুণ $=$ নূতন এককের $\frac{3}{5}$ গুণ।

$\therefore$ নূতন একক অনুসারে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x = \frac{2}{5}$ বা $\cdot 4$ এবং $y = \frac{3}{5}$ বা $\cdot 6$ হইবে।

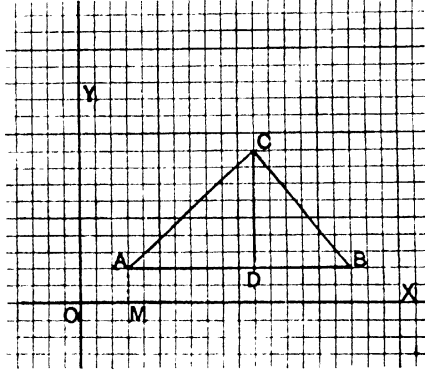
উদা. 2. P (2, 3) এবং Q (6, 7) বিন্দুদ্বয় অঙ্কিত করিয়া উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

ছক কাগজে OX এবং OY অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিলে দেখা যায় যে, P এবং Q উভয়ই প্রথমপাদে অবস্থিত। এখন পূর্ব-প্রক্রিয়া-অনুসারে ঐ বিন্দুদ্বয় অঙ্কিত কর। মনে কর, পার্শ্ববর্তী চিত্রে P এবং Q দ্বারা উহাদের অবস্থান সূচিত হইতেছে। P এর মধ্য দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া PR সরল রেখাটি টান এবং P কে কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর, এই বৃত্ত PR কে R বিন্দুতে ছেদ করিল; সুতরাং PQ = PR. এখন PR এর দৈর্ঘ্য মাপিয়া দেখা গেল যে, ইহা উক্ত এককের 5·6 গুণ। অতএব PQ = 5·6 (দৈর্ঘ্যের) একক।

পরীক্ষা-প্রণালী: একটি স্কেলের সাহায্যে PQ এর দৈর্ঘ্য মাপিয়াও দেখা যায় যে, নির্দিষ্ট এককানুসারে PQ = 5·6 একক।

উদা. 3. 15 ফুট এবং 10 ফুট উচ্চ দুইটি স্তম্ভের দূরত্ব 14 ফুট। স্তম্ভ দুইটির শীর্ষদ্বয়ের ব্যবধান কত নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 2 ফুটের সমান ধরা হইল। তাহা হইলে, AC দ্বারা 15 ফুট উচ্চ স্তম্ভটি এবং BD দ্বারা 10 ফুট উচ্চ স্তম্ভটি সূচিত হয়। A এবং B একই অনুভূমিক (horizontal) রেখার উপর অবস্থিত এবং AB = 14 ফুট = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 7টি বাহু।

এখন CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। C কে কেন্দ্র করিয়া CD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ (arc) অঙ্কিত কর। মনে কর, এই চাপটি C এর মধ্য দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটিকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে, CD = CT; এক্ষণে, CT এর দৈর্ঘ্য মাপিয়া দেখা গেল যে, CT = এককের প্রায় 7·4 গুণ।

∴ নির্ণেয় দূরত্ব CD = CT = 14·8 ফুট (স্থূলত, approximately).

উদা. 4. A (3, 2), B (17, 2) এবং C (11, 9) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর, এবং ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া A, B, C বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। অঙ্কিত বিন্দুত্রয়কে পরস্পর সংযুক্ত করিয়া ABC ত্রিভুজটি পাওয়া যায়। C বিন্দু হইতে AB সরল রেখার উপর CD একটি লম্ব অঙ্কিত কর। A এবং B এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $=14$ (দৈর্ঘ্যের) একক, এবং লম্ব $CD=7$ (দৈর্ঘ্যের) একক।

$\therefore$ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.AB.\ CD$

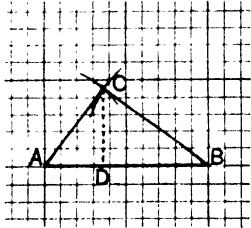
$=\frac{1}{2}\times 14\times 7$ বর্গ একক

$=49$ বর্গ একক।

পরীক্ষা-প্রণালী : ABC ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা কর। যে সকল বর্গক্ষেত্রের উপর দিয়া ত্রিভুজের বাহু তিনটি অঙ্কিত হইয়াছে, অর্থাৎ যে বর্গক্ষেত্রসমূহ আংশিকভাবে ত্রিভুজটির মধ্যে অবস্থিত আছে, তাহাদিগের মধ্যে যেগুলির অর্ধেক কিংবা অর্ধেকের অধিক অংশ ত্রিভুজটির অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে তাহাদিগকে এক একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র মনে করিয়া তাহাদের সংখ্যা নিরূপণ কর, এবং যেগুলির অর্ধেকের অধিকাংশ ত্রিভুজের বাহিরে অবস্থিত তাহাদিগকে গণনা না করিয়া পরিত্যাগ কর। এইরূপ গণনার

দ্বারা সর্বশুদ্ধ যতগুলি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র পাওয়া যায় তাহাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলসূচক বর্গ এককের সংখ্যার প্রায় সমান হইবে।

উদা. 5. 5 ইঞ্চি ভূমির উপর 3 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার উচ্চতার আসন্ন পরিমাণ ইঞ্চির এক-দশমাংশ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুকে এক ইঞ্চির সমান ধরিয়া ছক কাগজে একটি অনুভূমিক রেখার উপর A এবং B এইরূপ দুইটি বিন্দু লও, যেন উহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 10 টি বাহুর সমান হয়। এখন A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 6 টি বাহুর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ (arc) অঙ্কিত কর। এইরূপ B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 8 টি বাহুর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অন্য একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই চাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, BC এবং AB কে সংযুক্ত করিলেই নির্ণেয় ABC ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইবে। C বিন্দু হইতে AB সরল রেখার উপর CD লম্ব অঙ্কিত কর। এখন CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

D বিন্দু হইতে ঊর্ধ্বদিকে গণিলে দেখা যাইবে যে DC রেখাটির দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর প্রায় 4·8 গুণ। সুতরাং DC এর আসন্ন পরিমাণ $4{\cdot}8 \div 2$ ইঞ্চি $= 2{\cdot}4$ ইঞ্চি।

এখানে AC এবং BC রেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে।

প্রশ্নমালা 22

1. নিম্নলিখিত বিন্দুসমূহ কোন্ কোন্ পাদে অবস্থিত বল :—

(i) $x=1, \quad y=-5.$ (ii) $x=-3, \quad y=-8.$

(*iii*) $x = -2,\ y = 5.$ (*iv*) $x = -5,\ y = 7.$

(*v*) $x = 12,\ y = -20.$ (*vi*) $x = -13,\ y = -24.$

2. নিম্নলিখিত স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট বিন্দুসমূহ অঙ্কিত কর :—

(*i*) $x = 3$ ইঞ্চি, $y = 5$ ইঞ্চি। (*ii*) $x = 4$ হাত, $y = 9$ হাত।

(*iii*) $x = 2$ ফুট, $y = 7$ ইঞ্চি। (*iv*) $x = 7$ গজ, $y = 8$ হাত।

3. ছক কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর :—

(0, 8), (5, 18), (−8, 9), (−11, −19), (18, −21).

4. (8, −12), (8, 12), (8, −6), (8, 6) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা সকলে y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখার উপর অবস্থিত।

5. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর :—

(*i*) (5, 0), (5, 5), (5, −1) এবং (5, −4).

(*ii*) (−4, 7), (0, 7), (3, 7) এবং (6, 7).

দেখাও যে, উহারা যথাক্রমে y-অক্ষ এবং x-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরল রেখার উপর অবস্থিত। ঐ দুই রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. এক ইঞ্চিকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর :—

(1·5, 2·5) ; (−3·5, 4·8) ; (−2·3, −3·1) ; (7·2, −6·4).

7. (−1, 2) ; (0, 3) ; (2, 5) ; (3, 6) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর, এবং দেখাও যে, অক্ষদ্বয়ের সহিত $45°$ কোণ করিয়াছে এইরূপ একটি সরল রেখার উপর উহারা অবস্থিত।

8. A (12, 11), B (17, −1), C (4, −7), D (−7, −4), E (−5, 6) বিন্দুগুলি পর পর সংযুক্ত করিয়া ABCDE ক্ষেত্রের নক্সা প্রস্তুত করা হইল। BD এবং AC সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে একটি গাছ আছে। গাছটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয়পূর্বক উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর :—

(*i*) (2, 3) এবং (5, 7). (*ii*) (3, −7) এবং (−1, 4).

(*iii*) (−3, −5) এবং (−5, 6).

10. $(-4, -4)$; $(7, 7)$; $(13, 13)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একই সরল রেখার উপর অবস্থিত।

11. 8 একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল রেখার এক প্রান্ত $(2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। অন্য প্রান্তের ভুজ 10 হইলে, উহার কোটি কত হইবে?

[A $(2, 3)$ বিন্দুটি অঙ্কিত কর। OX এর উপর অন্য প্রান্তের ভুজ 10 এর সমান করিয়া OP অংশ কাটিয়া লও। P হইতে OX এর উপর একটি লম্ব অঙ্কিত কর। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং 8 একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, মনে কর, এই বৃত্ত পূর্বোক্ত লম্বকে P_1 এবং P_2 বিন্দুতে ছেদ করিল। PP_1 এবং PP_2 ই নির্ণেয় কোটি। বর্তমান উদাহরণে P_1, P_2 বিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিয়া গিয়াছে।]

12. নিম্নলিখিত কৌণিকবিন্দু-বিশিষ্ট ক্ষেত্রগুলির পার্থক্য নির্দেশ কর :—

(*i*) $(-2, -1)$; $(1, 0)$; $(4, 3)$ এবং $(1, 2)$.

(*ii*) $(2, -2)$; $(8, 4)$; $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$.

13. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির সংযোগদ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রের কালি বর্গ-এককে প্রকাশ কর :—

(*i*) $(0, 0)$; $(0, 8)$; $(12, 0)$.

(*ii*) $(2, 5)$; $(2, 12)$, $(9, 14)$.

14. $(0, 0)$ এবং $(6, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগে উৎপন্ন সরল রেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। ঐ রেখার উপর অবস্থিত 9 ভুজ-বিশিষ্ট বিন্দুটির কোটি এবং -12 কোটি-বিশিষ্ট বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

15. নিম্নস্থ প্রত্যেক উদাহরণে বিন্দু তিনটি অঙ্কিত করিয়া পরস্পর সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের প্রত্যেকটির কালি নির্ণয় কর :—

(*i*) $(1, 3)$; $(-5, 6)$ এবং $(-2, -4)$.

(*ii*) $(0, 2)$; $(3, 6)$ এবং $(-7, -3)$.

(*iii*) $(4, 2)$; $(-8, -3)$ এবং $(-3, 5)$.

16. $(15, 0)$; $(18, 6)$; $(10, 14)$ এবং $(-14, 8)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া যথাক্রমে সংযুক্ত করিলে যে চতুর্ভুজটি উৎপন্ন হইবে, তাহার কালি নির্ণয় কর।

17. প্রমাণ কর যে, $(2, 4)$; $(2, 6)$ এবং $(2+\sqrt{3}, 5)$ বিন্দুগুলি 2 একক দীর্ঘ বাহু-বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু; ঐ ত্রিভুজটির কালি মোটামুটি কত ?

18. $(-1, -2)$ এবং $(1, 8)$ বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। এই সরল রেখার উপর অবস্থিত যে বিন্দুর কোটি -17, তাহার ভুজ, এবং যে বিন্দুর ভুজ -3, তাহার কোটি নির্ণয় কর।

19. প্রমাণ কর যে, $(3, 1)$, $(6, -2)$; $(5, -7)$ এবং $(2, -4)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। এই সামান্তরিকটির কালি কত ?

20. প্রমাণ কর যে, $(4, -4)$; $(16, 8)$; $(10, 14)$ এবং $(-2, 2)$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে একটি আয়তক্ষেত্রের (rectangle) শীর্ষবিন্দু। আয়তক্ষেত্রটির কালি নির্ণয় কর।

21. যে বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুসমূহ যথাক্রমে $(3, 0)$; $(0, 3)$; $(-3, 0)$ এবং $(0, -3)$, তাহার কর্ণ-দ্বয়ের (diagonals) ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

22. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 7·5 ফুট এবং বিস্তার 4·3 ফুট. ঐ ঘরের বিপরীত কোণদ্বয়ের দূরত্ব যথাসম্ভব সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় কর।

23. একব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া একস্থান হইতে যাত্রা করিয়া প্রথমে 5·6 মাইল পূর্ব দিকে এবং পরে 3·4 মাইল উত্তর দিকে গেল; যাত্রার স্থান হইতে এখন ঐ ব্যক্তি কত দূরে আছে ?

24. একটা খুঁটিতে একটি গরু বাঁধা আছে। গরুটি 60 ফুট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তের সর্বত্র চরিতে পারে। ঐ খুঁটি হইতে একখানি বেড়ার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব 30 ফুট হইলে, ঐ বেড়াখানির কি পরিমাণ অংশের ধারে ধারে গরুটি চরিতে পারিবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা II

I

1. সরল কর : $(2x+y)^2-(2x-y)^2-(2x)^2$.

2. যদি $P \equiv (a+b)^2$, $Q \equiv (a-b)^2$ এবং $R \equiv (a^2-b^2)$ হয়, তাহা হইলে $PQ-R^2$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $(6p^2-5pq-6q^2)$ টি ডিম $2p-3q$ টি বাক্সের মধ্যে সমান সংখ্যায় রাখিতে হইলে, প্রত্যেক বাক্সে কয়টি করিয়া রাখিতে হইবে ?

4. সমাধান কর: (i) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=2+\frac{x}{4}$.

(ii) $3(x+2)=x+16$.

5. আমার নিকট a টাকা আছে, তাহা হইতে b টাকা রামকে দিলাম ; অবশিষ্ট টাকা c সংখ্যক ভিক্ষুকের ভিতর সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে, উহাদের প্রত্যেকে কত পয়সা পাইবে ?

6. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির অর্ধেক। এই শেষোক্ত দুই কোণের অন্তর $12°$ হইলে, প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত নির্ণয় কর।

II

1. $(3x+4y)(3x-4y)$ হইতে $(2x-3y)$ এবং $(2x+3y)$ এর বর্গদ্বয়ের সমষ্টি বিয়োগ কর। $x=6y$ হইলে, লব্ধ ফলের মান কত হইবে ?

2. সমাধান কর :

(i) $x-2=\frac{2}{3}(x+2)$. (ii) $2x+\frac{3}{4}=3(x-\frac{1}{12})$.

3. $a=5, b=2$ হইলে, a^3-b^3 এবং $(a-b)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

4. নিম্নলিখিত গুণফলগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :—

$(x+1)(x-2)$, $(x+2)(x-3)$ এবং $(x+3)(x-4)$.

5. কোন একটি সংখ্যার বর্গ এবং ঐ সংখ্যাটির দ্বিগুণের বর্গের অন্তরকে ঐ সংখ্যা-দ্বারা প্রকাশ কর।

6. যদি $x=3$ দ্বারা $3x^2-ax+9=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে a র মান কত হইবে ?

III

1. $x=5$ এবং $y=3$ হইলে, x^2+y^2, $(x-y)^2$ এবং $(x+y)(x-y)$ এর মান কত ?

2. সরল কর : $5x-[3y-\{4x-(5y-\overline{4x+6y})\}]$.

3. 35 টাকা A, B এবং C এর মধ্যে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও, যেন A অপেক্ষা B 3 টাকা এবং B অপেক্ষা C 2 টাকা অধিক পায়।

4. সমাধান কর :

(i) $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x=5+\frac{x}{3}$. (ii) $5(2x-7)=12-3(4x-19)$.

5. এমন তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 129।

6. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ সূত্রটির সাহায্যে $(49)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

IV

1. সরল কর :

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-\frac{x}{6}\right)\div\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right).$$

2. যদি $p=8$, $q=4$, $r=3$ এবং $t=1$ হয়, তাহা হইলে $(p-q)r-t$ এবং $p-q(r-t)$ এর মান কত? বন্ধনী অপসারণ করিয়া রাশিমালা দুইটিকে লিখ।

3. $2x=y^2$ এবং $xy=a$ হইলে, a র মান y দ্বারা প্রকাশ কর, এবং y এর মান a দ্বারা প্রকাশ কর।

4. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ সমাধান কর :—

(i) $3(x-1{\cdot}2)-\frac{1}{5}(3x-4{\cdot}4)=4$.

(ii) $\cdot4x+\cdot7x-1{\cdot}4=\cdot35x+\cdot85$.

5. x এবং $3y$ এর সমষ্টিকে $3y$টি x অপেক্ষা যত বড় তাহার দ্বারা গুণ কর এবং গুণ্য, গুণক ও গুণফলে, $x=3$ ও $y=1$ ধরিয়া লইয়া গুণফলটি প্রমাণ কর।

6. 45 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন প্রথম অংশকে 2 দিয়া ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল, দ্বিতীয় অংশকে 4 দ্বারা গুণ করিলে লব্ধ গুণফলের সমান হইবে।

V

1. নিম্নলিখিত রাশিমালা-সমূহকে সরল আকারে পরিবর্তিত কর :—

(i) $a-\{2a+(3a-4a)\}-5a-[6a-\{(7a+8a)-9a\}]$.

(ii) $\frac{2x+5y}{4}-\left(\frac{3x-y}{6}+\frac{x+2y}{8}\right)$.

2. $t = x+1$ হইলে, $2t^2 - 3t + 1$ এর মান সরল আকারে প্রকাশ কর। $x = 3$ ধরিয়া লব্ধ ফল যে নির্ভুল হইয়াছে তাহা প্রমাণ কর।

3. সমাধান কর :

(i) $1{\cdot}7x - 2{\cdot}3x + 4{\cdot}9 = 8{\cdot}4 - 1{\cdot}1x.$

(ii) $5 - 3(1-2x) = 11 - 4(6-x).$

4. A $(-4, 3)$ এবং B $(8, -6)$ দুইটি বিন্দু, উহাদের সংযোজক সরল রেখার মধ্য-বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। এই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং 5 একক ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহা AB সরল রেখাটিকে কোন্ কোন্ বিন্দুতে ছেদ করিবে—নির্ণয় কর।

5. $12x^2y^5 - 8x^5y^2$ কে $4x^2y^2$ দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফলের সহিত $x+y$ এবং $x^2 - xy + y^2$ এর গুণফল যোগ কর।

6. যদি $x = 3a^2p^3$ এবং $y = 2ap^2$ হয়, তবে a এবং p এর সহিত $\dfrac{ay^3}{x^2}$ এর মানের কোন সম্বন্ধ নাই—প্রমাণ কর।

VI

1. $(5, 2)$ এবং $(x, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্র অঙ্কিত করিয়া x এর মান নির্ণয় কর, এবং সর্বসম (congruent) ত্রিভুজের সাহায্যে লব্ধ ফলটি প্রমাণ কর।

2. $a = 3$, $b = 2$ হইলে, $(3a+2b)^2$ এবং $9a^2 - 4b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

3. সমাধান কর :

(i) ${\cdot}3({\cdot}4x - {\cdot}9) = {\cdot}5({\cdot}2x + {\cdot}7).$

(ii) $\frac{1}{4}(2x+5) - \frac{1}{6}(x + 4\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(x + 3\frac{1}{2}).$

4. A $(3, 4)$, B $(5, -1)$, C $(-2, -4)$ এবং D $(-6, 2)$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে সংযুক্ত করিয়া একটি উদ্যানের নক্সা প্রস্তুত করা যাইতে পারে। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 5 টি বাহুর সমান দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া একখানি ছক কাগজে নক্সাটি অঙ্কিত কর। AC এবং BD এর ছেদবিন্দুতে একটি কৃত্রিম উৎস আছে ; ঐ উৎসের অবস্থানবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. $x-y=2$ এবং $xy=15$ হইলে, x^3-y^3 এর মান কত ?

6. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে ; B, C এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 5)$, $(6, -1)$ এবং $(2, -2)$ হইলে, A এবং D এর অবস্থান-বিন্দু নির্ণয় কর।

VII

1. $x^{2n}+x^n+1$ কে x^n-1 দ্বারা গুণ কর।

2. সরল কর : $(x+2)(x+8)-(x+4)^2$.

3. $(3, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -4)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দু চারটিকে যথাক্রমে সংযুক্ত করিলে যে ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হয়, এক ইঞ্চির দশমাংশকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উহার কালি নির্ণয় কর।

4. সমাধান কর :

(i) $2(x-2)-\frac{1}{6}(5-x)=8\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}x$.

(ii) $\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$.

5. বীজগণিতের সূত্র সাহায্যে 125×75 কে দুইটি বর্গের অন্তর-রূপে প্রকাশ কর.

6. প্রমাণ কর যে,

$$(a+1)(a-1)-(b+1)(b-1)-(a+b)(a-b)=0.$$

নবম অধ্যায়

দুরূহ যোগ ও বিয়োগ

98. অনু. 42 এবং 43 এ প্রদত্ত নিয়মাবলী শুধু পূর্ণ সহগ-সম্বন্ধে প্রতিষ্ঠিত হইয়াছে; কিন্তু ভগ্নাংশ এবং আক্ষরিক সহগ-সম্বন্ধেও ঐ সমস্ত নিয়মাবলী প্রযোজ্য।

ভগ্নাংশ সহগ-বিশিষ্ট (fractional co-efficients) মিশ্র রাশিসমূহের যোগ-প্রক্রিয়া আলোচনা করিবার পূর্বে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা আবশ্যক :—

1. পাটীগণিতে যেরূপ $\frac{3+4}{5}$ কে $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ রূপে লেখা যায়, বীজগণিতেও সেইরূপ $\frac{x+y}{3}$ কে $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$ রূপে লেখা যাইতে পারে।

সুতরাং, $\frac{1}{3}(x+y)$, $\frac{x+y}{3}$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$, $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y$ একই রাশির বিভিন্ন রূপ।

2. এক একটি ভগ্নাংশকে এক একটি রাশির ন্যায় জ্ঞান করিতে হয়; সুতরাং কোন ভগ্নাংশের লব এবং হরের মধ্যস্থ রেখাটিকে বন্ধনীর ন্যায় মনে করা যাইতে পারে।

যথা, $-\frac{2-x}{5}=-\frac{1}{5}(2-x)=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}x$;

এবং $-\frac{x+5}{9}=-\frac{1}{9}(x+5)=-\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}$.

উদা. 1. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$, $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y$ এবং $-x+y$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

রাশিমালা তিনটিকে একটির নীচে আর একটি এরূপভাবে সাজান হইল যে, বিভিন্ন রাশিমালাস্থ x-ঘটিত পদগুলি এক পাটিতে পড়ে এবং y-ঘটিত পদগুলি এক পাটিতে পড়ে; তারপর যোগ-ক্রিয়া সম্পন্ন করা হইল।

অতএব,

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y \\ -x+\ y \\ \hline -\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y \end{array}$$

যোগফলে, x এর সহগ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ এবং -1 এর বীজগণিতীয় যোগফল, অর্থাৎ $-\frac{1}{4}$; এবং y এর সহগ $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1$, অর্থাৎ $\frac{2}{3}$.

সুতরাং নির্ণেয় যোগফল $=-\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y$.

উদা. 2. যোগ কর :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c \\ \frac{1}{3}b-\frac{5}{6}c \\ \frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b+\frac{5}{12}c \\ -\frac{1}{6}a\qquad+\frac{3}{4}c \\ \hline \frac{5}{6}a+\frac{1}{12}b+\frac{1}{12}c \end{array}$$

দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় রাশিমালায় a-ঘটিত কোন পদ নাই এবং চতুর্থ রাশিমালায় b-ঘটিত কোন পদ নাই। এইজন্য তাহাদের স্থান খালি রাখা হইয়াছে ; কিন্তু বিভিন্ন পাটির সাম্য অক্ষুন্ন রাখিবার জন্য উক্ত শূন্য-স্থান দুইটি 0 সহগযুক্ত a এবং b দ্বারাও পূর্ণ করা যায়, কারণ এইরূপ করিলে রাশিমালাদ্বয়ের মানের কোনরূপ ব্যতিক্রম হয় না।

উদা. 3. $\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}ax$, $\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{8}ax-\frac{3}{5}x^2$, $\frac{2}{5}x^2+\frac{5}{6}ax-\frac{2}{9}a^2$ রাশিমালা তিনটি যোগ কর ; এবং $a=3$, $x=2$ হইলে, নির্ণীত যোগফলের মান কত হইবে নির্ণয় কর।

রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে আর একটি লিখিলে বিভিন্ন রাশিমালাস্থ সদৃশ পদগুলি যাহাতে একই পাটিতে পড়ে, রাশিমালাগুলির প্রত্যেকটির পদগুলি এরূপভাবে সাজাইয়া নিম্নলিখিতরূপে যোগ-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা হইল :—

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}a^2-\ \frac{3}{8}ax-\ \frac{3}{4}x^2 \\ \frac{1}{2}a^2+\ \frac{5}{8}ax-\ \frac{3}{5}x^2 \\ -\frac{2}{9}a^2+\ \frac{5}{6}ax+\ \frac{2}{5}x^2 \\ \hline \frac{17}{18}a^2+\frac{13}{12}ax-\frac{19}{20}x^2 \end{array}$$

যোগফলের সংখ্যাত্মক (numerical) মান

$$\begin{aligned} &=\tfrac{17}{18}\times 3^2+\tfrac{13}{12}\,.\,3\,.\,2-\tfrac{19}{20}\times 2^2 \\ &=\tfrac{17}{18}\times 9+\tfrac{13}{12}\times 6-\tfrac{19}{20}\times 4 \\ &=\tfrac{17}{2}+\tfrac{13}{2}-\tfrac{19}{5}=11\tfrac{1}{5}. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 23

যোগ কর :—

1. $x-\frac{1}{3}y$, $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y$, $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y$.
2. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$, $\frac{2}{3}b-a$, $\frac{3}{4}a-b$, $\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b$.

3. $p-\frac{1}{2}q+\frac{1}{3}r,\quad q-\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}p,\quad r-\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}q.$

4. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}xy-\frac{2}{3}y^2,\quad \frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}xy,\quad \frac{1}{2}xy-\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}y^2,$
$-\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}xy.$

5. $\frac{3}{5}ab-\frac{4}{21}ab^2-\frac{3}{2}a^2b,\quad \frac{3}{2}ab^2+\frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{7}ab,$
$\frac{5}{6}a^2b-\frac{7}{10}ab+\frac{5}{14}ab^2.$

6. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z+1,\quad 7-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z,\quad \frac{3}{4}z-9-\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y,$
$y+2x+1-2z,\quad \frac{1}{6}x-y+3.$

7. $x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}w^2,\quad y^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}w^2,$
$z^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}w^2,\quad w^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2.$

8. $3z^3-\frac{1}{3}yz+\frac{1}{2}xy,\ 2x^3+3y^3-z^3,\ -2y^3-x^3-\frac{3}{4}zx+\frac{5}{6}xy,$
$\frac{2}{3}yz-x^3-\frac{7}{8}zx,\quad \frac{13}{8}zx-\frac{1}{3}yz-\frac{4}{3}xy.$

9. $\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{7}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{5}x,\quad -\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x^3+\frac{3}{7}x-\frac{4}{5}x^4,$
$\frac{3}{10}x+\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{5}x^3+\frac{4}{5}x^4,\quad -\frac{4}{5}x-\frac{3}{7}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3.$

10. $a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c-\frac{1}{4}d,\quad b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}c-\frac{1}{4}d,\quad c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}d,$
$d-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c.$

11. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d,\quad -\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+d,\quad \frac{1}{4}d-\frac{1}{6}b+c-a$ ও $\frac{1}{6}a-\frac{3}{5}d+b-\frac{5}{8}c$ যোগ কর, এবং $a=2,\ b=4\frac{8}{13},\ c=8,\ d=2\frac{2}{5}$ হইলে, যোগফলটির মান কত হইবে নির্ণয় কর।

12. সরল কর: $\frac{1}{4}(3x+2y)-\frac{1}{3}(2x-3y)+\frac{1}{12}(7x-y).$

99. নিম্নে আরও কয়েকটি বিভিন্ন প্রকারের উদাহরণ দেওয়া হইল। প্রক্রিয়াগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য করিলে সমাধানের প্রণালী ভাল করিয়া বুঝা যাইবে।

উদা. 1. $\frac{3}{4}(x+y)-\frac{7}{8}(x-y),\quad -\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{8}(x-y)$ এবং $\frac{5}{8}(x-y)+\frac{3}{8}(x+y)$ এর যোগফল, নির্ণয় কর, এবং লব্ধ ফলটি সরল কর।

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}(x+y)-\frac{7}{8}(x-y) \\ -\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{8}(x-y) \\ \underline{\frac{3}{8}(x+y)+\frac{5}{8}(x-y)} \\ \frac{5}{8}(x+y)+\frac{1}{8}(x-y) \end{array}$$

এ স্থলে $(x+y)$ এবং $(x-y)$ সমন্বিত পদদ্বয়কে দুইটি অসদৃশ পদ মনে করা হইয়াছে।

$$\text{যোগফল} = \tfrac{5}{8}(x+y)+\tfrac{1}{8}(x-y)$$
$$= \tfrac{5}{8}x+\tfrac{5}{8}y+\tfrac{1}{8}x-\tfrac{1}{8}y$$
$$= \tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{2}y.$$

দ্রষ্টব্য। যোগক্রিয়া সম্পন্ন করিবার পূর্বে বন্ধনীগুলিকে অপসারণ করিলে, প্রত্যেক রাশিমালাস্থ x এবং y এর সহগগুলিকে একত্র করিয়া পৃথক্ ভাবে রাখিতে হয়; ইহা অপেক্ষা উপরি উক্ত নিয়মানুসারে কার্য করাই অধিকতর সুবিধাজনক।

উদা. 2. যোগ কর: $px+ay$, $qx+by$ এবং $rx+cy$.

রাশিগুলিকে প্রথমে একটির নীচে আর একটি এইরূপভাবে সাজাও, যাহাতে বিভিন্নরাশিস্থ সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে পড়ে; তারপর যোগক্রিয়া সম্পন্ন কর।

$$\begin{array}{r} px+ay \\ qx+by \\ rx+cy \\ \hline (p+q+r)x+(a+b+c)y \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=(p+q+r)x+(a+b+c)y$.

উদা. 3. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$, $4a^3b-10a^2b^2+6ab^3+4b^4$, $4a^2b^2-4ab^3-3b^4$ এবং $2ab^3-6b^4$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

এ স্থলে রাশিমালাগুলিকে প্রথমে a অক্ষরটির ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া, পরে নিম্নলিখিতরূপে একটির নীচে আর একটি লিখিয়া যোগক্রিয়া সম্পন্ন করা হইল :—

$$\begin{array}{rrrrr} a^4-4a^3b & +\ 6a^2b^2 & -4ab^3 & +\ b^4 \\ +4a^3b & -10a^2b^2 & +6ab^3 & +4b^4 \\ & +\ 4a^2b^2 & -4ab^3 & -3b^4 \\ & & 2ab^3 & -6b^4 \\ \hline a^4 & & & -4b^4 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=a^4-4b^4$.

উদা. 4. $a^2x+b^2y+c^2z$, $ax+by+cz$, $x+y+z$ এবং $ayz+bzx+cxy$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

এ স্থলে দেখা যায় যে, প্রথম তিনটি রাশিমালায় x, y এবং z এর মাত্র প্রথম ঘাত বর্তমান আছে এবং পদগুলি পরস্পর সদৃশ ; চতুর্থ রাশিমালাটিতে x, y এবং z তিনটি রাশিই বর্তমান আছে বটে, কিন্তু ইহার একটি পদও প্রথম তিনটি রাশিমালার কোন পদের সদৃশ নহে। নিম্নপ্রদর্শিতরূপে যোগফল নির্ণয় করা হইল :—

$$\begin{array}{r} a^2x+b^2y+c^2z \\ ax+\ by+\ cz \\ x+\ \ y+\ \ z \\ +ayz+bzx+cxy \\ \hline (a^2+a+1)x+(b^2+b+1)y+(c^2+c+1)z+(ayz+bzx+cxy) \end{array}$$

উদা. 5. $2(a+b)x-3(a-b)y$, $-3(a+b)x+5(a-b)y$ এবং $8(a+b)x-6(a-b)y$ যোগ কর। $a=2$ এবং $b=3$ হইলে, এই যোগফলের মান কত হইবে নির্ণয় কর।

এ স্থলে আক্ষরিক সহগগুলি মিশ্র পদ ; বন্ধনীগুলি অপসারণ না করিয়াই সহজে যোগফল নির্ণয় করা যাইতে পারে :—

$$\begin{array}{r} 2(a+b)x-3(a-b)y \\ -3(a+b)x+5(a-b)y \\ 8(a+b)x-6(a-b)y \\ \hline 7(a+b)x-4(a-b)y \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=7(a+b)x-4(a-b)y.$

যোগফলের নির্ণেয় মান $=7(2+3)x-4(2-3)y$

$=35x+4y.$

উদা. 6. $(p+q)x^2+(q+r)xy+(r+p)y^2, 3(p+q)x^2-2(q+r)xy+4(r+p)y^2$ এবং $(2q+3r-p)xy-(4r+3p+q)y^2-(3p+2q+r)x^2$ যোগ কর।

পদগুলিকে সাজাইয়া, নিম্নলিখিত প্রকারে যোগফল নির্ণয় করা যায় :—

$$\begin{array}{rrr} (p+q)x^2 & +(q+r)xy & +(r+p)y^2 \\ 3(p+q)x^2 & -2(q+r)xy & +4(r+p)y^2 \\ -(3p+2q+r)x^2 & +(2q+3r-p)xy & -(4r+3p+q)y^2 \\ \hline (p+2q-r)x^2 & +(q+2r-p)xy & +(r+2p-q)y^2 \end{array}$$

এ স্থলে x^2 এর সহগ $=(p+q)+3(p+q)-(3p+2q+r)$

$=p+2q-r$;

xy এর সহগ $=(q+r)-2(q+r)+(2q+3r-p)$

$=q+2r-p$;

y^2 এর সহগ $=(r+p)+4(r+p)-(4r+3p+q)$

$=r+2p-q$;

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=(p+2q-r)x^2+(q+2r-p)xy$
$+(r+2p-q)y^2.$

উদা. 7. সরল কর : $\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{5-x}{6}+\dfrac{3x-1}{12}$.

প্রদত্ত রাশিমালাটি $=\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}(5-x)+\frac{1}{12}(3x-1)$

$=\frac{1}{3}x+1+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}$

$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4})x+(1+\frac{5}{6}-\frac{1}{12})$

$=\frac{5}{12}x+\frac{7}{4}.$

বিকল্প প্রক্রিয়া : রাশিমালাটিকে তিনটি সাধারণ ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে ধরিয়া লইয়া সাধারণ ভগ্নাংশের যোগক্রিয়াও করা যাইতে পারে : 3, 6 এবং 12 হর তিনটির ল. সা. গু. 12 দ্বারা গুণ করিয়া দেখা যায়, প্রদত্ত রাশিমালাটি

$$=\frac{4(x+3)+2(5-x)+(3x-1)}{12}$$

$$=\frac{(4x-2x+3x)+(12+10-1)}{12}$$

$$=\frac{5x+21}{12}=\frac{5}{12}x+\frac{21}{12}.$$

$$=\frac{5}{12}x+\frac{7}{4}.$$

দ্রষ্টব্য। প্রথম শিক্ষার্থিগণের উপরি উক্ত প্রকারে বন্ধনী ব্যবহার করা উচিত, অন্যথা $-\dfrac{x-5}{6}$ প্রভৃতি স্থলে ভুল হওয়া সম্ভব।

প্রশ্নমালা 24

যোগ কর :—

1. $3(a+x)-4(a-x),\ -2(a+x)+3(a-x),\ 5(a+x)-2(a-x).$
2. $4(x+y)-5(x-y),\ -(x+y)+6(x-y),\ 8(x+y)-3(x-y).$
3. $\frac{4}{5}(a-2b)+\frac{3}{4}(a+b), -(a-2b)-\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{5}(a-2b)+\frac{1}{4}(a+b).$
4. $\frac{1}{2}(2y+\frac{3}{4}x)+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}y-x),\ \ \frac{3}{8}(2y+\frac{3}{4}x)-\frac{3}{5}(\frac{1}{3}y-x),$
   $\frac{1}{6}(2y+\frac{3}{4}x)-\frac{5}{12}(\frac{1}{3}y-x).$
5. $\frac{2}{3}(p+q)-\frac{1}{3}(p-q),\ -(p+q)+\frac{1}{6}(p-q),\ \frac{1}{3}(p+q)+\frac{2}{3}(p-q).$
6. $px-qy,\ (p-q)x+ry,\ (p-2q)x-(r-q)y.$
7. $px^2+ax+qx^2-bx, qx^2+bx+rx^2-cx,$
   $rx^2+cx+px^2-ax.$
8. $(y+z-2x)a+(q+r-2p)b, (z+x-2y)a+(r+p-2q)b,$
   $(x+y-2z)a+(p+q-2r)b.$
9. $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z, (b-c)x+(c-d)y+(d-b)z,$
   $(c-d)x+(d-e)y+(e-c)z.$
10. $ax^3+bx^2+cx+d, bx^3+cx^2+dx+a,\ cx^3+dx^2+ax+b.$
11. $3(a+b)x-2(a-b)y,\ -2(a+b)x+6(a-b)y,$
    $7(a+b)x-5(a-b)y.$
12. $4(x^2+y^2)+2ab(x^2-y^2)-3,\ -2(x^2+y^2)-5ab(x^2-y^2)$
$+9, 3(x^2+y^2)-2ab(x^2-y^2)-5, 6(x^2+y^2)+7ab(x^2-y^2)-11.$
13. $3a-2(x-y)a^2+4a^3, 5a+3(x-y)a^2-6a^3,$
    $-2a+8(x-y)a^2+7a^3, 7a+12(x-y)a^2-9a^3,$
    $-10a+4(x-y)a^2+8a^3.$
14. $9x^2y^2+\frac{2}{3}(x^2-y^2)+\frac{5}{8}x-xy, \frac{1}{6}x^2y^2+\frac{3}{4}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}xy,$
    $-4x^2y^2-\frac{5}{6}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x+2xy$ এবং
    $-5x^2y^2-\frac{7}{12}(x^2-y^2)+\frac{2}{11}xy.$
15. $(5a^3+3b^3)x^3+(3a^2-4b^2)x^2+(4a-5b)x+2,$
    $(3a^3-4b^3)x^3+(5a^2-6b^2)x^2+(6a-7b)x+3$ এবং
    $(2a^3-7b^3)x^3+(8b^2-7a^2)x^2+(13b-9a)x+4.$

সরল কর :—

16. $\frac{x-5}{3}+\frac{x+7}{5}$.

17. $\frac{x-6}{7}+\frac{x-3}{3}$.

18. $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-3}{4}-\frac{3}{8}$.

19. $\frac{1}{6}(y+4)-\frac{y}{3}+\frac{1}{12}(y-4)$.

20. $\frac{2a-3}{9}-\frac{a+3}{6}+\frac{5a+8}{12}$.

21. $\frac{a-b}{2}-\frac{2a+b}{3}+\frac{a+2b}{4}$.

22. $\frac{3x-1}{8}-\frac{2x-3}{5}+\frac{x-6}{4}+\frac{1}{2}$.

100. বিয়োগের স্বরূপ

পূর্বে বলা হইয়াছে যে, বিয়োগ যোগেরই একটি বিপরীত প্রক্রিয়া, এবং কোন একটি ধনরাশি বিয়োগ করিতে হইলে ইহার পরম (absolute) মানটি বিয়োগ করিতে হয় এবং কোন একটি ঋণরাশি বিয়োগ করিতে হইলে ইহার পরম মানটি যোগ করিতে হয়; সুতরাং ইহা হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিতে হইলে শেষোক্ত রাশিটির চিহ্ন পরিবর্তন-পূর্বক পূর্বোক্ত রাশিটির সহিত যোগ করিলেই হয়।

যথা, $a-(+b)=a-b.$

$a-(-b)=a+b.$

দ্রষ্টব্য 1. বৃহত্তর সংখ্যাটির পর একটি বিয়োগ-চিহ্ন বসাইলে এবং তৎপরে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটিকে লিখিলে দুইটি পাটীগণিতীয় অঙ্কের বিয়োগফল প্রকাশিত হয়। কিন্তু দুইটি প্রতীকের মান অজ্ঞাত হইলে উহাদের অন্তর (difference) ঐ দুই প্রতীকের মধ্যে একটি '$\sim$' চিহ্ন স্থাপন করিয়া প্রকাশ করা হয়। যেমন, $a\sim b$র দ্বারা a এবং b এর অন্তর বুঝা যায়, কিন্তু a এবং b এর কোন্‌টি বৃহত্তর তাহা নির্দিষ্ট হয় না।

a এবং b এর যে-কোন মানই হউক না কেন, বীজগণিতে $a-b$ দ্বারা সর্বদাই a এবং b এর বিয়োগফল প্রকাশিত হয়।

দ্রষ্টব্য 2. ধনরাশি অথবা ঋণরাশি উভয়ের পরিবর্তেই যে-কোন অক্ষর ব্যবহৃত হইতে পারে বলিয়া কোন পদের পূর্বে + চিহ্ন থাকিলে উহা

ধনরাশি এবং − চিহ্ন থাকিলে উহা ঋণরাশি নাও হইতে পারে। যে রাশির পরিবর্তে অক্ষর ব্যবহৃত হইয়াছে সেই রাশিটি ধন কিংবা ঋণ জানা না থাকিলে পদটি ধন কিংবা ঋণ তাহা নিশ্চিতরূপে বলা যায় না।

দ্রষ্টব্য 3. a এবং b রাশি দুইটির বীজগণিতীয় বিয়োগফল $a-b$ ধন হইলে a কে b অপেক্ষা বৃহত্তর বলা হয়, এবং $a-b$ ঋণ হইলে a কে b অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলা হয়। বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে যে, বিয়োগ-চিহ্নযুক্ত রাশির অক্ষরসমূহের ক্রম পরিবর্তন করা যায় না; কারণ $a-b$ এবং $b-a$ দ্বারা একই রাশি প্রকাশিত হয় না।

101. মিশ্র রাশির বিয়োগ (Subtraction of Compound Expressions)

মনে কর, x হইতে $y+z$ বিয়োগ করিতে হইবে। $y+z$ কে একবারে বিয়োগ না করিয়া প্রথমে y বিয়োগ করিয়া পরে লব্ধ বিয়োগফল হইতে z বিয়োগ করিলেও একই ফল পাওয়া যায়; সুতরাং নির্ণেয় বিয়োগফলটি $x-y-z$. কিন্তু $y-z$ কে x হইতে বিয়োগ করিতে হইলে, যদি প্রথমে x হইতে y বিয়োগ করা হয় তাহা হইলে দেখা যায় যে, বিয়োজ্য রাশি $y-z$ অপেক্ষা z টি বেশি বিয়োগ করা হইয়াছে, কারণ $y-z$ অপেক্ষা y বড় এবং উহাদের বিয়োগফল z. সুতরাং নির্ণেয় বিয়োগফলটি x হইতে y এর বিয়োগফল, অর্থাৎ $x-y$ অপেক্ষা z বেশি; অতএব ইহা $x-y+z$.

এক্ষণে দেখা যাইতেছে যে, একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশিমালা বিয়োগ করিতে হইলে রাশিমালার প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া প্রথমোক্ত রাশির সহিত যোগ করিতে হয়।

নিম্নলিখিত নিয়মটি শিক্ষণীয় :—

নিয়ম। দুইটি মিশ্র রাশির বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে, বিয়োজ্য রাশিটিকে বিয়োজন রাশির নিম্নে এরূপভাবে স্থাপন করিতে হইবে, যেন উভয়রাশিস্থ সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে পড়ে। তারপর, বিয়োজ্য রাশির প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া উপরিস্থিত সদৃশ পদটির সহিত যোগ করিতে হয়।

দ্রষ্টব্য 1. বীজগণিতের মিশ্ররাশিসমূহের বিয়োগ পাটীগণিতের মিশ্র বিয়োগেব অনুরূপ।

দ্রষ্টব্য 2. উল্লিখিত বিয়োজ্য রাশিমালার চিহ্নপরিবর্তন-ক্রিয়া মনে মনে সম্পাদন করিলেও চলে।

উদা. 1. $3a+4b+6c$ হইতে $2a-3b+5c$ বিয়োগ কর।

সদৃশ পদগুলি পাটিক্রমে সাজাইয়া দেখা যায় যে,

$$\begin{array}{r} 3a+4b+6c \\ 2a-3b+5c \\ \hline a+7b+c \end{array}$$

বিকল্প প্রক্রিয়া : নির্ণেয় বিয়োগফল

$$\begin{aligned} &=(3a+4b+6c)-(2a-3b+5c) \\ &=3a+4b+6c-2a+3b-5c \\ &=(3a-2a)+(4b+3b)+(6c-5c) \\ &=a+7b+c. \end{aligned}$$

উদা. 2. $3x^2-2xy+7y^2$ হইতে $2x^2-5xy+6y^2+z^2$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{r} 3x^2-2xy+7y^2 \\ 2x^2-5xy+6y^2+z^2 \\ \hline x^2+3xy+y^2-z^2 \end{array}$$

প্রথম পাটিতে $3x^2$ এর সহিত $-2x^2$ মনে মনে যোগ করিয়া উহাদের যোগফল x^2 লেখা হইল। দ্বিতীয় পাটিতে $-2xy$ এবং $+5xy$ এর যোগফল $+3xy$ এবং তৃতীয় পাটিতে $7y^2$ এবং $-6y^2$ এর যোগফল y^2 লেখা হইল। শেষের পাটিতে উপরে কোন পদ না থাকায় z^2 কেই চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া নিম্নে রাখা হইল।

প্রশ্নমালা 25

বিয়োগ কর :—

1. $a+b$ হইতে $a-b$, a^2-b^2 হইতে a^2+b^2, x^3+y^3 হইতে $-x^3-y^3$ এবং $x-y$ হইতে $-x+y$.
2. $8a-9b$ এবং $12a-15b$ এর প্রত্যেকটি হইতে $4a-3b$.

3. $a+b-c$ হইতে $a-b+c$ এবং $x-4y+2z$ হইতে $2x+3y-z$.

4. $xy-2yz+3zx$ হইতে $5xy-3zx$ এবং $a^2-2ax+x^2+3$ হইতে a^2+x^2.

5. $a^4+a^3+a^2+a$ হইতে a^3+a^2+a+1.

6. $ax+2by-3cz$ হইতে $ax+cz-by$.

7. $2+3x^2-4x^3+3x^5-x$ হইতে $x+1-x^2-x^3+3x^4-4x^5$.

8. $-x^3-2y^3+5z^3$ হইতে $3xyz-2x^3-3y^3+4z^3$.

9. $a+b-c$ হইতে $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c$.

10. $-x^2+\frac{1}{3}xy-2y^2+yz-z^2$ হইতে $x^2+xy-y^2+yz-2z^2$.

11. সরল কর : $x+(x-y)-(-x+y)$.

12. সরল কর : $(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}xy-\frac{1}{3}y^2)-(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলিব প্রথমটিব সহিত কত যোগ করিলে দ্বিতীয়টি পাওয়া যাইবে ?

13. $a-b,\ a$.

14. $x+y,\ y$.

15. $p^2-q^2+2pq-q^3,\quad p^2-4pq+2q^3$.

16. $2x^2-6x^2y+4x^2y^2-2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $x^2-7x^2y-4x^2y^2$ অবশিষ্ট থাকিবে ?

17. $4a-5b+6c$ হইতে $a-b+c$, $2a+3b-c$, $-a-b-c$ এবং $-2a+3b+4c$ এর সমষ্টি বিয়োগ কর ।

18. 1 হইতে $3x^2-4x-5$ এবং 0 হইতে $3x-2x^2+4$ বিয়োগ কর, এবং লব্ধ ফল দুইটি যোগ কর ।

19. $F(x)\equiv x^3+x^2-7$ এবং $K(x)\equiv 3x^3-x^2+x$ হইলে, $F(x)-K(x)$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর ।

20. $A\equiv 2a^2+3ab-b^2$ এবং $B\equiv a^2-3ab+b^2$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

(*i*) $A+B$. (*ii*) $A-B$. (*iii*) $A-2B$.

যদি $f(x) = 5 - x$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

21. $f(5)$ 22. $f(x-5)$ 23. $f(5+x)$.

102. নিম্নে আরও কয়েকটি ভিন্ন প্রকারের উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. $(c+a)x+(a+b)y+(b+c)z$ হইতে $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} (c+a)x+(a+b)y+(b+c)z \\ \underline{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z} \\ (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z \end{array}$$

উদা. 2. ax^3+bx^2+cx+d হইতে bx^3+cx^2+dx+e বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} ax^3+bx^2+cx+d \\ \underline{bx^3+cx^2+dx+e} \\ (a-b)x^3+(b-c)x^2+(c-d)x+(d-e) \end{array}$$

উদা. 3. $\frac{5}{6}(x+y)a - \frac{3}{8}(x-y)b - \frac{2}{3}c$ হইতে $\frac{2}{3}(x+y)a + \frac{3}{4}(x-y)b + \frac{1}{6}c$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} \frac{5}{6}(x+y)a - \frac{3}{8}(x-y)b - \frac{2}{3}c \\ \underline{\frac{2}{3}(x+y)a + \frac{3}{4}(x-y)b + \frac{1}{6}c} \\ \frac{1}{6}(x+y)a - \frac{9}{8}(x-y)b - \frac{5}{6}c \end{array}$$

এই সকল ক্ষেত্রে, বিয়োগক্রিয়া-সম্পাদনের পূর্বে বন্ধনীগুলি অপসারণ করিলে, বিয়োগক্রিয়া জটিলতর হইয়া পড়ে।

প্রশ্নমালা 26

1. $4x(a-b)+3(a^2-b^2)$ হইতে $3(a^2-b^2)+2x(a-b)$ বিয়োগ কর।

2. $x(a+b)-3(b+c)y+4(c-2a)z$ হইতে $5(a+b)x-4(b+c)y-2(c-2a)z$ বিয়োগ কর।

3. $\frac{5}{6}(2a+3b) - \frac{4}{5}(6a+b)$ হইতে $\frac{1}{3}(2a+3b) - \frac{5}{18}(6a+b)$ বিয়োগ কর।

4. $6(x^2+y^2)+3(x+y)+2$ হইতে $4(x^2+y^2)-5(x+y)-2$ বিয়োগ কর।

5. $11a^2b^2(a-b)-10x^2y^2(a^2+b^2)+7ab(a^3-b^3)$ হইতে $5a^2b^2(a-b)+6x^2y^2(a^2+b^2)-2ab(a^3-b^3)$ বিয়োগ কর।

6. $(p+q-r)xy+(q+r-p)yz+(r+p-q)zx$ হইতে $(p-q+r)xy+(q-r+p)yz+(r-p+q)zx$ বিয়োগ কর।

7. $(2a^2-3ab+2b^2)x^2-(2b^2-3bc+2c^2)y^2+(2c^2-3ca+2a^2)z^2$ হইতে $(a^2-3ab+2b^2)x^2-(b^2-3bc+2c^2)y^2+(c^2-3ca+2a^2)z^2$ বিয়োগ কর।

8. সরল কর: $\frac{1}{12}(5x-6)+\frac{1}{9}(3x+8)-\frac{1}{3}(x-7)+\frac{5}{18}$.

9. যদি $F(x)\equiv(p+q)x+a(q+r)$ এবং $K(x)\equiv(q+r)x+a(r+p)$ হয়, তাহা হইলে $F(x)-K(x)$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

103. যোগ- এবং বিয়োগ-ঘটিত সরল প্রশ্ন (Easy Problems in Addition and Subtraction)

যোগ- এবং বিয়োগ-ঘটিত অনেক সরল প্রশ্ন সপ্তম অধ্যায়ে বর্ণিত সমীকরণ-সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়।

মনে রাখিতে হইবে যে, এই জাতীয় প্রশ্নসমূহের সমাধান-কালে নির্ণেয় অজ্ঞাত রাশিকে সর্বদাই x দ্বারা সূচিত করিতে হয়। পরে প্রশ্নের সর্তগুলিকে প্রতীক-সাহায্যে বীজগণিতীয় ভাষায় ব্যক্ত করিলে, x-সমন্বিত একটি সমীকরণ পাওয়া যায়। এই সমীকরণের বীজই প্রদত্ত প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. কোন সংখ্যার 12 গুণের সহিত 3 যোগ করিলে 147 হয়; সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x; তাহা হইলে সংখ্যাটির 12 গুণ $=12x$.

সুতরাং প্রশ্নের সর্ত অনুসারে, $12x+3=147$;

পক্ষান্তর করিয়া, $12x=147-3=144$;

উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=144\div12=12$;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=12$.

উদা. 2. 20 টি লেবু 2 টি বালিকার মধ্যে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও, যেন একজন অন্যজনের 3 গুণ পায়।

মনে কর, একজন x টি লেবু পাইল, তাহা হইলে অন্যজন $3x$ টি লেবু পাইবে।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x+3x=20$,

অথবা, $4x=20$; $\therefore$ $x=5$.

$\therefore$ একজন বালিকা 5 টি এবং অন্যজন 15 টি লেবু পাইবে।

উদা. 3. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দুই গুণ; আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা 12 ইঞ্চি হইলে, উহার দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার কত?

মনে কর, আয়তক্ষেত্রটির বিস্তার x ইঞ্চি; সুতরাং ইহার দৈর্ঘ্য $2x$ ইঞ্চি।

অতএব আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা, অর্থাৎ উহার বাহুচতুষ্টয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $=(x+2x+x+2x)$ ইঞ্চি $=12$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $6x=12$; বা $x=2$;

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির বিস্তার $=2$ ইঞ্চি, এবং দৈর্ঘ্য $=4$ ইঞ্চি।

নির্ণীত সমাধানের প্রমাণ: পরিসীমা $=(2+4+2+4)$ ইঞ্চি $=12$ ইঞ্চি।

উদা. 4. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 27 এবং বিয়োগ-ফল 3.

মনে কর, ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি x, তাহা হইলে বৃহত্তর সংখ্যাটি $x+3$;

$\therefore$ উহাদের সমষ্টি $=x+(x+3)=27$, বা $2x+3=27$;

পক্ষান্তর করিয়া, $2x=27-3=24$; $\therefore$ $x=12$.

$\therefore$ সংখ্যা দুইটি 12 এবং $12+3$, অর্থাৎ 15.

নির্ণীত সমাধানের প্রমাণ: $12+15=27$, $15-12=3$.

প্রশ্নমালা 27

1. কোন ব্যক্তির বয়সের 6 গুণ এবং 4 গুণের সমষ্টি 150 বৎসর হইলে, তাহার বয়স কত?

2. কোন সংখ্যার 8 গুণের সহিত 13 যোগ করিলে 69 হয়; সংখ্যাটি কত?

3. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের চার গুণ এবং উহার পরিসীমা 100 গজ। উহার দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

4. কোন্ সংখ্যার অর্ধেক অপেক্ষা উহার দ্বিগুণ 9 অধিক?

5. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 35 এবং অন্তর 1. সংখ্যা দুইটি কত?

6. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 38; উহাদের ক্ষুদ্রতরটির 3 গুণের সহিত বৃহত্তরটির 5 গুণ যোগ করিলে 154 হয়। সংখ্যা দুইটি কত?

7. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 100, উহাদের বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটির 3 গুণ অপেক্ষা 20 বেশি। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

8. কোন্ সংখ্যা উহার এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা 8 অধিক?

9. 78 কে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর যে, প্রথম অংশ দ্বিতীয় অংশ অপেক্ষা 5, এবং তৃতীয় অংশ অপেক্ষা 13 অধিক হয়।

10. 150 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যে, এক অংশ অপর অংশের দুই-তৃতীয়াংশের সমান হয়।

11. যদি একটি সংখ্যা 75 অপেক্ষা যত কম তাহার দ্বিগুণ এবং সেই সংখ্যাটি 45 অপেক্ষা যত বেশি এই দুইটি সমান হয়, তাহা হইলে সংখ্যাটি কত?

12. 105 টাকা A, B, C এর মধ্যে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন, A, B অপেক্ষা 15 টাকা বেশি, এবং B, C অপেক্ষা 24 টাকা বেশি পায়।

13. এমন দুইটি ক্রমিক যুগ্মসংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের বৃহত্তরটির এক-পঞ্চমাংশ ক্ষুদ্রতরটির এক-সপ্তমাংশ অপেক্ষা 2 অধিক।

14. একটি থলিতে যত টাকা আছে তাহার এক-চতুর্থাংশ এবং এক-পঞ্চমাংশের সমষ্টি 9 টাকা হইলে, থলিতে কত টাকা আছে?

15. ঘোড়া সমেত একখানি গাড়ীর মূল্য 940 টাকা, এবং ঘোড়ার মূল্য গাড়ীর মূল্যের 3 গুণ। প্রত্যেকের মূল্য নির্ণয় কর।

104. বন্ধনীর অপসারণ (Removal of Brackets)

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, বন্ধনীভুক্ত পদসমূহকে একটি রাশির ন্যায় জ্ঞান করিতে হয়। যেমন, $(2x-3y)-(x-4y)$ রাশিমালাটির $2x-3y$ এবং $x-4y$ পদদ্বয় বন্ধনীভুক্ত হওয়ায় ইহাই সূচিত হইতেছে যে, $x-4y$ এই

একটিমাত্র রাশিকে $2x-3y$ এই একটিমাত্র রাশি হইতে বিয়োগ করিতে হইবে।

কোন রাশিমালা হইতে বন্ধনী অপসারণ করিতে হইলে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পালন করিতে হইবে :—

(1) বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন থাকিলে ঐ বন্ধনী অপসারিত হইতে পারে। অপসারণ করিবার পর বন্ধনীস্থিত সমস্ত পদের চিহ্ন পূর্ববৎ থাকিবে—কোন পরিবর্তন হইবে না।

(2) বন্ধনীর পূর্বে − চিহ্ন থাকিলেও ঐ বন্ধনী অপসারিত হইতে পারে, কিন্তু বন্ধনী-অপসারণের পর উহার ভিতরের সমস্ত পদের চিহ্নই পরিবর্তন করিতে হইবে; অর্থাৎ + চিহ্নকে − চিহ্নে এবং − চিহ্নকে + চিহ্নে পরিবর্তন করিতে হইবে।

যেমন, $$a-b+(c+d-e)=a-b+c+d-e.$$
$$a-b-(c+d-e)=a-b-c-d+e.$$

বন্ধনীভুক্ত রাশিমালাকে একটিমাত্র রাশির ন্যায় গণ্য করিতে হয়, সুতরাং বন্ধনীর পূর্বে কোন সহগ থাকিলে, বন্ধনীস্থিত রাশিমালার প্রত্যেকটি পদকে ঐ সহগদ্বারা গুণ করিয়া রাখিতে হয়। (অনু. 112 দ্রষ্টব্য।)

যেমন, $$a(b+c)-a(b-c)=(a\times b+a\times c)-(a\times b-a\times c)$$
$$=ab+ac-ab+ac$$
$$=2ac.$$

দ্রষ্টব্য। ভগ্নাংশের লব একাধিক পদ-বিশিষ্ট হইলে, লব- এবং হর-মধ্যস্থ রেখাটিকে 'রেখাবন্ধনী' বলিয়া মনে করা যায়, এবং বন্ধনী-অপসারণের নিয়মানুসারে ইহা অপসারিত হইতে পারে।

যেমন, $$x-\frac{y+z}{2}=x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z.$$

উদা. 1. বন্ধনীগুলি অপসারণ করিয়া সরল কর:

$$y-(2x-5y)-(4y+x).$$

প্রদত্ত রাশিমালাটি $=y-2x+5y-4y-x$
$$=y+5y-4y-2x-x$$
$$=2y-3x.$$

উদা. 2. সরল কর: $3(x+y-z)-2(x-y+z)+(y+z-x)$.

প্রদত্ত রাশিমালাটি $=3x+3y-3z-2x+2y-2z+y+z-x$
$=3x-2x-x+3y+2y+y-3z-2z+z$
$=0.x+6y-4z$
$=6y-4z$.

105. বিভিন্ন বন্ধনীর অপসারণ

পূর্বেই উক্ত হইয়াছে যে, লঘু, ধনু, গুরু এবং রেখা এই চার প্রকারের বন্ধনী ব্যবহৃত হয়—

(1) লঘু বন্ধনী (Round Brackets) ( ) ; যেমন, $a-(b+c)$,
(2) ধনু-বন্ধনী (Curved Brackets) { } ; যেমন, $x-\{y+z\}$,
(3) গুরু বন্ধনী (Square Brackets) [ ] ; যেমন, $p-[q-r]$,
(4) রেখা-বন্ধনী (Bar or Vinculum) — ; যেমন, $m-\overline{l+n}$.

অনেক স্থলে এক প্রকার বন্ধনীর ভিতরে অন্য প্রকার বন্ধনীও ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এই সকল স্থলে সর্বাপেক্ষা ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া একে একে বন্ধনীগুলি অপসারণ করাই সুবিধাজনক ; প্রত্যেক বন্ধনী অপসারণের সময়ে বন্ধনী-অপসারণের নিয়মগুলি পালন করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য। সর্বাপেক্ষা বাহিরের বন্ধনী হইতেও কার্য আরম্ভ করা যায় ; কিন্তু সাধারণত ভিতরের বন্ধনী হইতে কার্য আরম্ভ করাই ভাল।

উদা. 1. সরল কর: $12a-(4a-\overline{3b-2c})$.

$12a-(4a-\overline{3b-2c})=12a-(4a-3b+2c)$
$=12a-4a+3b-2c$
$=8a+3b-2c$.

উদা. 2. সরল কর: $10a-6[4a+3\{x+a-2(x-\overline{a+b})\}]$.

প্রদত্ত রাশিমালাটি $=10a-6[4a+3\{x+a-2(x-a-b)\}]$
$=10a-6[4a+3\{x+a-(2x-2a-2b)\}]$
$=10a-6[4a+3\{x+a-2x+2a+2b\}]$

$$= 10a - 6[4a + 3\{3a + 2b - x\}]$$
$$= 10a - 6[4a + 9a + 6b - 3x]$$
$$= 10a - 6[13a + 6b - 3x]$$
$$= 10a - 78a - 36b + 18x$$
$$= 18x - 68a - 36b.$$

অথবা, সর্বাপেক্ষা বাহিরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিলে,

রাশিমালাটি $= 10a - 24a - 18\{x + a - 2(x - \overline{a+b})\}$
$$= -14a - 18x - 18a + 36(x - \overline{a+b})$$
$$= -32a - 18x + 36x - \overline{36a + 36b}$$
$$= -32a + 18x - 36a - 36b$$
$$= 18x - 68a - 36b.$$

প্রশ্নমালা 28

সরল কর :—

1. $-(-x)$.
2. $-\{-(-x)\}$.
3. $-\{-(+x)\}$.
4. $-\{+(-x)\}$.
5. $-[-\{-(-x)\}]$.
6. $-[-\{+(-x)\}]$.
7. $-[-\{-(+x)\}]$.
8. $a - \overline{b+c}$.
9. $a-(b-c)$.
10. $a-(-b+c)$.
11. $a-\{b-(c-d)\}$.
12. $a^2-(2ab-b^2)-[a^2-(2ab+b^2)]$.
13. $x^2-y^2+[x^2+xy-(x^2-y^2)+y^2]$.
14. $2a-[3a+b-(a-4c)+\{3a-(b-\overline{c-2b})\}]$.
15. $x-[3y-\{2x-y-(\overline{3x-2y}-\overline{2x-3y})\}]$.
16. $x-2\{2x-(x-y-3)\}+4\{3x-2(y-2+x)\}$.
17. $1-a-(1-\overline{a+a^2})-\{1-(a-\overline{a^2+a^3})\}$ $-[1-\{a-(a^2-\overline{a^3+a^4})\}]$.
18. $2x-[2-(x-\overline{2-x})+\{x+(2-\overline{x+2})\}]$.
19. $x-[x-\{x-(x-\overline{x-1})\}]=5$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।
20. x এর মান কত হইলে, $3x-[1+x+\{1-(1+\overline{1-x})\}]=17$ হইবে ?

21. সরল কর: $4x+[3x-\{5y-\overline{2x-3y}-16y\}-6y]-[6y-\{5x-(3y-4x)+8y\}+5x]$;

এবং $x=1$, $y=2$ হইলে, এই রাশিমালাটির মান কত হইবে নির্ণয় কর।

22. $\sqrt{3x}$, $\sqrt{(3x)}$ এবং $\sqrt{3}x$ এর প্রভেদ কি?

23. সরল কর: $+[+\{+(-x)\}]-[-\{+[-(-x)]\}]$.

24. সরল কর:

(i) $\dfrac{6x+8}{4}-\dfrac{27x-36}{6}-\dfrac{12-42x}{9}$.

(ii) $\dfrac{25x-10}{5}-\left(\dfrac{6-9x}{3}-\dfrac{7-21x}{7}\right)$.

106. বন্ধনী-সংস্থাপন (Insertion of Brackets)

বন্ধনী-অপসারণ-সম্বন্ধে যাহা বর্ণিত হইয়াছে তাহা হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, বন্ধনী-সংস্থাপনের নিয়ম বন্ধনী-অপসারণের নিয়মসমূহের বিপরীত। অতএব বন্ধনী-সংস্থাপন-সম্বন্ধে নিম্নলিখিত নিয়ম দুইটি শিক্ষণীয়:—

নিয়ম 1. বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন স্থাপন করিয়া দুই বা তদধিক পদকে বন্ধনীভুক্ত করা যাইতে পারে। বন্ধনীভুক্ত করিবার সময়ে পদসমূহের চিহ্নের কোন পরিবর্তন করিতে হয় না।

নিয়ম 2. বন্ধনীর পূর্বে − চিহ্ন স্থাপন করিয়া যে-কোন সংখ্যক পদকে বন্ধনীভুক্ত করা যাইতে পারে; কিন্তু বন্ধনীভুক্ত করিবার সময়ে সমস্ত পদের চিহ্নই পরিবর্তন করিতে হইবে।

মন্তব্য। রাশিমালাস্থ পদসমূহকে বিভিন্নভাবে বন্ধনীভুক্ত করা যাইতে পারে। যে পদগুলিকে বন্ধনীভুক্ত করিতে হইবে, তাহাদের কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে, গুণনীয়কটিকে পদগুলি হইতে বিশ্লেষণ করিয়া বন্ধনীর পূর্বে স্থাপন করা যাইতে পারে।

যেমন, $3x-15=3(x-5)$; $4ax^2-12axy=4ax(x-3y)$.

উদা 1. $ax-bx+cx-ay+by-cy$ রাশিমালাটি

$(ax-bx)+(cx-ay)+(by-cy)$,

অথবা $(ax-bx+cx)-(ay-by+cy)$,

বা $x(a-b+c)-y(a-b+c)$,

বা $a(x-y)-b(x-y)+c(x-y)$ ইত্যাদি রূপে লেখা যাইতে পারে।

উদা. 2. বাহিরে (*i*) যোগ- এবং (*ii*) বিয়োগ-চিহ্ন স্থাপন করিয়া $x+x^3-2xa^2-2x^3b^2$ রাশিমালাস্থ x এর সমঘাতগুলিকে এক একটি বন্ধনীভুক্ত কর।

রাশিমালাটিকে x এর ঘাতসমূহের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইলে দেখা যায় যে,

(*i*) প্রদত্ত রাশিমালাটি $=x-2xa^2+x^3-2x^3b^2$

$=(x-2xa^2)+(x^3-2x^3b^2)$

$=x(1-2a^2)+x^3(1-2b^2)$

আবার, (*ii*) প্রদত্ত রাশিমালাটি $=-2a^2x+x-2x^3b^2+x^3$

$=-x(2a^2-1)-x^3(2b^2-1)$.

প্রশ্নমালা 29

সাধারণ গুণনীয়কটি বাহিরে রাখিয়া নিম্নলিখিত বাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে বন্ধনীভুক্ত কব :—

1. $3x+12y$. 2. $5ax-25ab$. 3. $ab-b^2$.

4. a^2x+ax^2. 5. $2a^2b-4ab+2ab^2$. 6 $4x^2-8x^2y+12x^2y^2$.

7. $3a^3-6a^2b+3ab^2$. 8. $x^2-ax-bx$.

9. $7a^3b+14ab^3-21a^2b^2$. 10. $x^2y-5xy+3xy^2$.

নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণে x এবং y এর সমঘাতসমূহের সহগগুলি বন্ধনীভুক্ত করিয়া রাখ :—

11. $x^2+ax+bx$. 12. $y^2+ay-by$.

13. $x^2-2ax^3-5bx^3$. 14. $ax-ay-bx-by-cx+cy$.

15. $a^2x^2+2ax+b^2y^2-c^2x^2-cx-a^2y^2$.

16. $x^2-2xy+y^2$ রাশিস্থিত শেষ দুইটি পদকে দুইটি বিভিন্ন উপায়ে বন্ধনীভুক্ত কর।

17. $ax+bx+cx-px^2-qx^2-rx^2$ রাশিস্থিত শেষ তিনটি পদকে বন্ধনীভুক্ত কর।

নিম্নলিখিত উদাহরণদ্বয়ের শূন্য স্থানগুলি পূর্ণ কর :—

18. $5x-6=(\qquad\qquad)-(3-2x)$.

19. $9x^2-8xy+3y^2=6x^2+7xy+(\qquad\qquad)$.

নিম্নলিখিত রাশিমালাদ্বয়ের শেষ তিনটি পদকে বাহিরে (i) যোগ-চিহ্ন ও (ii) বিয়োগ-চিহ্ন স্থাপন করিয়া এক বন্ধনীভুক্ত কর :—

20. $a-b+c-d+e$. 21. $x^3-6xy+5xy^2-2y^3$.

22. নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণে x এর সমঘাতগুলিকে বাহিরে (i) যোগ-চিহ্ন ও (ii) বিয়োগ-চিহ্ন স্থাপন করিয়া এক একটি বন্ধনীভুক্ত কর :—

(i) $3x^3-mx^3-6x^2+nx^2$. (ii) $2x^4+px^3-qx^4+rx^3-3x^3$.

(iii) $ax^3+5x^2-6x+qx-cx^2-x^3$.

দশম অধ্যায়

দুরূহ গুণন ও ভাগ

107. গুণনের অর্থ (Meaning of Multiplication)

কোন সংখ্যাকে x দ্বারা গুণনের অর্থ অপেক্ষাকৃত বিশদরূপে ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন।

পাটীগণিতে কোন রাশিকে একটি পূর্ণসংখ্যা-দ্বারা গুণ করিতে হইলে, ঐ পূর্ণসংখ্যায় যতগুলি একক আছে, ঐ রাশিটিকে তত বার লিখিয়া যোগ করিলে যে যোগফল পাওয়া যায় তাহাই নির্ণেয় গুণফল। যেমন, $3 \times 4 = 3+3+3+3$. কিন্তু ভগ্নাংশের প্রবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে, পাটীগণিতেও গুণন-ক্রিয়ার অর্থ-প্রসারণের প্রয়োজন হইয়াছে ; এই নিমিত্ত নিম্নলিখিতরূপে গুণনের সংজ্ঞা প্রদত্ত হইল :—

একটি সংখ্যাকে আর একটি সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিতে হইলে, যে ক্রিয়া-দ্বারা 1 হইতে গুণক সংখ্যাটি পাওয়া যায়, গুণ্য সংখ্যাটিতে সেই ক্রিয়া প্রয়োগ করিতে হয়।

যেমন, $\frac{3}{4}$ সংখ্যাটি পাইতে হইলে, 1 এর চতুর্থ অংশ তিনবার লইয়া যোগ কবিতে হয় ; অতএব কোন সংখ্যা a কে $\frac{3}{4}$ দ্বারা গুণ করিতে হইলে, a র চতুর্থাংশ তিনবার লইয়া যোগ করিতে হয়।

$$\therefore\ a \times \tfrac{3}{4} = a \times \tfrac{1}{4} + a \times \tfrac{1}{4} + a \times \tfrac{1}{4}$$
$$= \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{3}{4}a\ ;$$

অর্থাৎ, a কে 4 টি সমান অংশে বিভক্ত করিয়া 3 টি সমান অংশ লইতে হইবে।

a পূর্ণ সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ যাহাই হউক না কেন, গুণনের এই সংজ্ঞাটি সর্বত্রই প্রযোজ্য। যদি a একটি ভগ্নাংশ ($\frac{1}{2}$) হয়, তাহা হইলে

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}.$$

ঋণসংখ্যার গুণফল-সম্বন্ধে যাহা বলা হইয়াছে তাহা হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, দুইটি রাশির গুণফলের পরম-মান (absolute value) উহাদের উভয়ের পরম-মানের গুণফলের সমান। সুতরাং দুইটি রাশি ধন অথবা ঋণ, ভগ্ন অথবা পূর্ণ যাহাই হউক না কেন, নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়মে উহাদের গুণফল নির্ণয় করা যায়।

নিয়ম। দুইটি রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের উভয়ের পরম-মান গুণ কর এবং রাশি দুইটি সদৃশ হইলে গুণফলের পূর্বে ধন-চিহ্ন এবং অসদৃশ হইলে গুণফলের পূর্বে ঋণ-চিহ্ন স্থাপন কর।

অতএব, a এবং b যে-কোন দুইটি ধন বা ঋণ, পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হউক না কেন,

$$(+a)\times(+b)=+ab,$$
$$(+a)\times(-b)=-ab,$$
$$(-a)\times(-b)=+ab,$$
$$(-a)\times(+b)=-ab.$$

সুতরাং দুইটি সদৃশ চিহ্ন হইতে '+' চিহ্ন এবং দুইটি অসদৃশ চিহ্ন হইতে '−' চিহ্ন পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। দুইটি রাশির গুণফল 'এক' হইলে, তাহাদের একটিকে অন্যটির **বিপরীত** (reciprocal) বলে। যেমন, $a\times b=1$ হইলে, a এবং b পরস্পরের 'বিপরীত' হইবে। a র বিপরীত $\frac{1}{a}$.

108. উপপাদ্য

a এবং b যে-কোন মানের হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a\times b=b\times a.$$

অর্থাৎ, প্রমাণ করিতে হইবে যে, গুণ্যকে গুণক এবং গুণককে গুণ্যরূপে গ্রহণ করিলেও গুণফলের কোন পরিবর্তন হয় না।

প্রথমত, মনে কর, a এবং b উভয়েই ধন, পূর্ণরাশি।

এক সারিতে a সংখ্যক তারকা স্থাপন কর এবং এইরূপ b সংখ্যক সারি লও; তারকাগুলিকে পরবর্তী চিত্রের ন্যায় একটির নীচে আর একটি রাখিয়া সাজাও।

এখানে প্রত্যেক সারিতে 'a' সংখ্যক তারকা আছে, এবং এইরূপ 'b' সংখ্যক সারি থাকায়, তারকাগুলির মোট সংখ্যা 'b' বার 'a'কে যোগ করিলে যাহা হয় তাহাই, অর্থাৎ $a \times b$. আবার প্রতি পাটিতে তারকার সংখ্যা 'b' এবং মোট পাটির সংখ্যা 'a' হওয়াতে তারকাগুলির মোট সংখ্যা 'b' কে 'a' বার যোগ করিলে যাহা হয় তাহাই, অর্থাৎ $b \times a$. সুতরাং, 'a' এবং 'b' ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, $a \times b = b \times a$.

* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

তারকার সংখ্যা প্রতি সারিতে a

b সংখ্যক সারি পর্যন্ত।

দ্বিতীয়ত, যদি a এবং b উভয়েই ধন, ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলে মনে কর, $a = \frac{m}{n}$ এবং $b = \frac{p}{q}$, এ স্থলে, m, n, p এবং q এর প্রত্যেকেই ধন, পূর্ণসংখ্যা।

এক্ষণে গুণনের সংজ্ঞানুসারে,

$$a \times b = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q} \qquad \cdots(1)$$

$$\text{এবং} \quad b \times a = \frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{p \times m}{q \times n} \qquad \cdots(2)$$

কিন্তু m, n, p এবং q প্রত্যেকে ধন, পূর্ণসংখ্যা বলিয়া, উপরি উক্ত প্রমাণানুসারে, $m \times p = p \times m$ এবং $n \times q = q \times n$, অর্থাৎ $\frac{m \times p}{n \times q} = \frac{p \times m}{q \times n}$;

অতএব a এবং b যে-কোন ধন, ভগ্নাংশ হইলে, $a \times b = b \times a$.

সুতরাং a এবং b যে-কোন দুইটি ধন-রাশি হইলেই, $a \times b = b \times a$.

তৃতীয়ত, যদি a এবং b এর একটি ধন, একটি ঋণ অথবা উভয়েই ঋণ হয়, তাহা হইলে, প্রথমে, মনে কর, $a = x$ এবং $b = -y$, এ স্থলে x এবং y উভয়েই ধন।

সুতরাং $a \times b = x \times (-y) = -(xy) = -(yx) = (-y) \times x = b \times a$.

পুনরায় মনে কর, $a = -x$ এবং $b = -y$, এ স্থলে x এবং y উভয়েই ধন, রাশি। তাহা হইলে, $a \times b = (-x)(-y) = xy = yx = (-y)(-x) = b \times a$.

সুতরাং a এবং b এর মান যাহাই হউক না কেন, সর্বদাই

$$a \times b = b \times a.$$

109. গুণনের বিনিময় নিয়ম (Commutative Law)

a, b এবং c যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, প্রমাণ কর যে,

$$c\times(ab)=c\times a\times b.$$

অর্থাৎ, কোন সংখ্যাকে অপর দুইটি সংখ্যার দ্বারা পর পর গুণ করিলে এবং ঐ সংখ্যাকে শেষোক্ত সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল-দ্বারা গুণ করিলে একই গুণফল পাওয়া যায়।

প্রথমে মনে কর, a এবং b উভয়েই ধন, পূর্ণসংখ্যা।

এক্ষণে, a সংখ্যক c কে এক সারিতে রাখিয়া এইরূপ b সংখ্যক সারি এমন ভাবে লিখ যেন, 'c' গুলি পর পর একটির নীচে আর একটি বসে। যথা,

$c \quad c \quad c \quad c \quad \cdots\cdots$ 'c' র সংখ্যা প্রত্যেক সারিতে 'a'.

$c \quad c \quad c \quad c \quad \cdots\cdots$

$c \quad c \quad c \quad c \quad \cdots\cdots$

....

....

এইরূপ 'b' সংখ্যক সারি।

প্রতি সারিতে 'c' এর সংখ্যা a, এবং এইরূপ 'b' সংখ্যক সারি থাকায় 'c' এর মোট সংখ্যা $=ab$. সুতরাং সমুদয় 'c' র সমষ্টি $=c\times(ab)$.

আবার, প্রতি সারিতে 'c' এর সমষ্টি $=c\times a$, এবং এইরূপ 'b' সংখ্যক সারি থাকায় সমস্ত 'c' এর সমষ্টি $=$ 'b' সংখ্যক $(c\times a)=c\times a\times b$. সুতরাং ইহা হইতে দেখা যায় যে, a এবং b ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$c\times a\times b=c\times(ab).$$

এখন পূর্ব অনুচ্ছেদের অনুরূপ প্রক্রিয়া অনুসারে প্রমাণ করা যায় যে, 'a' এবং 'b' এর মান যে-কোন ভগ্নাংশ অথবা ঋণ-রাশি হইলেও $c\times a\times b=c\times(ab)$.

সুতরাং 'a,' 'b,' এবং 'c' এর মান যাহাই হউক না কেন,

$$c\times a\times b=c\times(ab).$$

পুনরায়, $cab=c\times(ab) \qquad bac=b\times(ac)$

$\qquad\qquad =(ab)\times c \qquad\quad =(ac)\times b$

$\qquad\qquad =abc, \qquad\qquad =acb$;

$\therefore\ abc=cab=acb=bac$ ইত্যাদি।

ইহা হইতে এই সিদ্ধান্ত হইল যে, কোন গুণফলের অন্তর্গত গুণনীয়কগুলির ক্রমপবিবর্তন করিলে ঐ গুণফলেব মানের কোনও পরিবর্তন হয় না।

এই নিযমটিকে গুণনের **বিনিময় নিয়ম** বলে।

দ্রষ্টব্য। যদিও গুণফলের গুণনীয়কগুলি যে-কোনও ক্রমে লিখিত হইতে পারে, তথাপি সাধারণত সংখ্যা-বাচক গুণনীয়কটিকে প্রথমে রাখা হয় এবং আক্ষরিক গুণনীয়কসমূহ বর্ণমালার ক্রমানুসাবে লিখিত হইয়া থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন গুণফলের গুণনীয়কগুলি যে-কোন রূপে সঙ্ঘবদ্ধ করা যায়। যেমন,

$$abcd = a \times b \times c \times d = (ab) \times (cd)$$
$$= a \times b \times (cd) = a \times (bc) \times d \qquad \text{ইত্যাদি।}$$

ইহাকে গুণনের **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) বলে।

110. ঘাতসমূহের গুণন (Multiplication of Powers)

উপপাদ্য। প্রমাণ করিতে হইবে যে, m এবং n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

অর্থাৎ, একই অক্ষরের দুইটি ঘাতের গুণফলের সূচক গুণনীয়কগুলির সূচকের সমষ্টির সমান। এখানে m এবং n পূর্ণসংখ্যা।

যে হেতু $a^m = a \times a \times a \times a \cdots\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

এবং $a^n = a \times a \times a \times a \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত,

$\therefore\ a^m \times a^n = (a.\ a.\ a.\ a \cdots\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a.\ a.\ a.\ a \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a.\ a.\ a.\ a.\ a \cdots\cdots\cdots (m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}.$

এই ফলকে গুণনেব **সূচক নিয়ম** (Index Law) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$;

কারণ, $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}.$

অর্থাৎ, একই রাশির বিভিন্ন ঘাতের গুণফলের সূচক ঐ গুণনীয়কসমূহের সূচকের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত 2. m এবং n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

কারণ, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+m \cdots\cdots n}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$.

এইরূপ, $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$; $\therefore \quad (a^m)^n = (a^n)^m$.

উদা. 1. $(x^4)^3 = x^4 \times x^4 \times x^4 = x^{4+4+4} = x^{12}$;

এবং $(x^3)^4 = x^3 \times x^3 \times x^3 \times x^3 = x^{3+3+3+3} = x^{12}$;

$\therefore \quad (x^4)^3 = (x^3)^4$.

উদা. 2. সরল কর : $a^{x+1}.\, a^{x+2}$.

$$a^{x+1}.\, a^{x+2} = a^{(x+1)+(x+2)} = a^{2x+3}.$$

111. সূচক নিয়মের প্রসারণ (Extension of the Index Law)

উপপাদ্য। প্রমাণ করিতে হইবে যে, n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে

$$(ab)^n = a^n \times b^n.$$

এ স্থলে, $(ab)^n = ab \times ab \times ab \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a^n \times b^n$.

সাধারণভাবে (generally), $(abc \cdots\cdots)^n = a^n \times b^n \times c^n \times \cdots\cdots \cdots$

অর্থাৎ, কোন গুণফলের n-তম ঘাত ইহার গুণনীয়কগুলির n-তম ঘাতের গুণফলের সমান।

দ্রষ্টব্য। কোন ঋণ-রাশির অযুগ্ম ঘাত ঋণ, কিন্তু যুগ্ম ঘাত ধন হইবে।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(-xy)^2 = x^2y^2$.

$$(-xy)^2 = (-xy) \times (-xy) = (xy) \times (xy)$$
$$= x^{1+1} \times y^{1+1} = x^2y^2.$$

উদা. 2. সরল কর : $(x^2y^3)^2$.

$$(x^2y^3)^2 = x^2y^3 \times x^2y^3 = x^2 \times x^2 \times y^3 \times y^3$$
$$= x^{2+2} \times y^{3+3} = x^4 \times y^6$$
$$= x^4y^6.$$

প্রশ্নমালা 30

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(-x)\times(-x^2)\times(-x^3)$. 2. $-x^2\times(-x^3)\times(-x)^2$.
3. $2x^2\times3x^3\times4x^4$. 4. $3x^n\times5x^{2n}\times7x^{3n}$.

সরল কর :

5. $(a^{x+1})^{x+2}$. 6. $(a^2b^3)^4$. 7. $(p^2)^4(q^3)^3$.
8. $(a+b)^5.(a+b)^3$. 9. $[(x+y)^3]^6$. 10. $[-(a+b)^2]^3$
11. $[(x-y)^m]^n$. 12. $a^2.a^3.a^4$. 13. $(x^a.y^b)^3$.
14. $(-ab)^3$. 15. $(a^2bc^3)^4$. 16. $(-3x^2y^3z^4)^6$.

$a=1, b=2, x=3, y=4$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

17. $3abxy$. 18. $5a^2b^3xy$. 19. $(a^2-b^2)x-aby$.
20. $(ax-by)(ax+by)$. 21. $a^2b(x+y)-ab^2(x-y)$.

112. একটি দ্বিপদ রাশিকে একটি একপদ রাশির দ্বারা গুণন

a, b এবং c এর মান যাহাই হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a(b+c)=ab+ac.$$

A. প্রথমে মনে করা যাউক, a একটি পূর্ণ, ধনসংখ্যা এবং b ও c যে-কোন রাশি ; তাহা হইলে,

$a(b+c)=(b+c)+(b+c)+\cdots\cdots a$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(b+b+b\cdots\cdots a$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)$

$+(c+c+c\cdots\cdots a$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)$

$=ba+ca=ab+ac.$

অনুসিদ্ধান্ত। উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিলে,

$$b+c=\frac{ab+ac}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}.$$

$\therefore$ যদি p এবং q যে-কোন দুইটি রাশি এবং r একটি পূর্ণ, ধনসংখ্যা হয়, তাহা হইলে $\frac{p+q}{r}=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}$.

B. যদি a একটি ভগ্ন, ধনসংখ্যা হয়, তাহা হইলে মনে কর, $a=\frac{m}{n}$
এখানে m এবং n উভয়েই পূর্ণ ধনসংখ্যা।

তাহা হইলে, $a(b+c)=\frac{m}{n}(b+c)=m\times\frac{b+c}{n}=\frac{m(b+c)}{n}$

$$=\frac{mb+mc}{n}=\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n}$$

$$=\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c=ab+ac.$$

সুতরাং a যে-কোন ধনসংখ্যা হউক না কেন, প্রমাণিত হইল যে,

$$a(b+c)=ab+ac.$$

C. যদি a একটি পূর্ণ অথবা ভগ্ন, ঋণসংখ্যা $(-x)$ হয়, তাহা হইলে,

$$a(b+c)=(-x)(b+c)=-\{x(b+c)\}$$
$$=-(xb+xc)=-xb-xc$$
$$=(-x)b+(-x)c$$
$$=ab+ac.$$

সুতরাং a, b এবং c এর মান যাহাই হউক না কেন, সর্বদাই

$$a(b+c)=ab+ac.$$

ইহাকে গুণনের **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive Law) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে হেতু, $b-c=b+(-c)$,

$$\therefore\quad a(b-c)=a\times[b+(-c)]$$
$$=ab+a(-c)$$
$$=ab-ac.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. উপরি উক্ত সিদ্ধান্ত-সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে,

$$a(b+c+d+\cdots\cdots\cdots)=ab+ac+ad+\cdots\cdots\cdots$$

সুতরাং একটি বহুপদ রাশিকে কোন একটি একপদ রাশি-দ্বারা গুণ করিতে হইলে, ঐ বহুপদ রাশিস্থিত প্রত্যেক পদকে একপদ রাশিটির দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া গুণফলগুলির সমষ্টি লইতে হয়।

উদা. 1. $(x+2y-3z)$ কে $4xyz$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x+2y-3z)\times 4xyz = x\times 4xyz+2y\times 4xyz-3z\times 4xyz$$
$$= 4x^2yz+8xy^2z-12xyz^2.$$

উদা. 2. সরল কর : $x^2(2x-3)+2x(3x-4)-5(x-3)$.

এখানে, $x^2(2x-3)=2x^3-3x^2$,

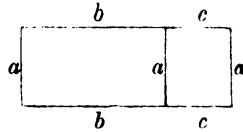
$2x(3x-4)=6x^2-8x$,

$5(x-3)=5x-15$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটি $=(2x^3-3x^2)+(6x^2-8x)-(5x-15)$
$$=2x^3+3x^2-13x+15.$$

113. জ্যামিতিক পরিচয়

গুণনের বিচ্ছেদ নিয়মটি নিম্নলিখিতরূপে জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ করা যায়।

একটি আয়তক্ষেত্রের ভূমি $b+c$ এবং উচ্চতা a হইলে, ইহার ক্ষেত্রফল $a(b+c)$ হইবে। কিন্তু পার্শ্ববর্তী চিত্র হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, এই ক্ষেত্রটিকে ab এবং ac ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট অপর দুইটি আয়তক্ষেত্রের সমষ্টিরূপে মনে করা যায়।

$$\therefore \quad a(b+c)=ab+ac.$$

114. দুইটি দ্বিপদ রাশির গুণফল

প্রমাণ কর যে, $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$.

যে হেতু, সংজ্ঞানুসারে, $(a+b)(x+y)$ দ্বারা $a+b$ ও x এর গুণফল এবং $a+b$ ও y এর গুণফলের সমষ্টি বুঝায় ;

$$\therefore \quad (a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y$$
$$=ax+bx+ay+by.$$

জ্যামিতিক পরিচয়। উক্ত ফলটি $x+y$ ভূমি এবং $a+b$ উচ্চতা-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র-সাহায্যে প্রমাণ করা যাইতে পারে। এখানে ক্ষেত্রফলটি $(a+b)(x+y)$। কিন্তু চিত্র হইতে এই আয়তক্ষেত্রটি চারটি আয়তক্ষেত্রের সমষ্টি, এরূপও মনে করা যায়; এই চারটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে ax এবং ay, bx এবং by;

$$\therefore \quad (a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে হেতু, $a-b=a+(-b)$, এবং $c-d=c+(-d)$,

$$\therefore \quad (a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$$
$$=ac+(-b)c+a(-d)+(-b)(-d)$$
$$=ac-bc-ad+bd=ac-ad-bc+bd.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. সাধারণভাবে, $(a+b+c+\cdots)(x+y)$

$$=(a+b+c\cdots)x+(a+b+c\cdots)y$$
$$=(ax+bx+cx+\cdots)+(ay+by+cy+\cdots).$$

উদা. x^2-xy কে $x+2$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x^2-xy)(x+2)=x^2(x+2)-xy(x+2)$$
$$=x^3+2x^2-x^2y-2xy.$$

প্রশ্নমালা 31

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

1. $2a^2(x+y)$. 2. $x(x^2-2xy+y^2)$. 3. $4x^2(x^2-4x+7)$.
4. $a^4b^4c^4(a^3b^2c+ab^4)$. 5. $3x^2(x^n-2x+1)$.
6. $x^ny(x^n+y-1)$. 7. $(abcd)^2(a+b+c+d)$.

নিম্নলিখিত দ্বিপদ রাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর :—

8. $(2-x)(x-4)$. 9. $(3+2x)(5x-1)$. 10. $(a-5)(x+8)$.
11. $(3x^2y-3)(21x^2y-7)$. 12. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$.

গুণফল নির্ণয় কর :—

13. $(a+b+c)(a+b)$. 14. $(a+b-c)(a-b)$.
15. $(xy+yz+zx)(xy-yz)$. 16. $(x^2+y^2+z^2)(x-y)$.

সরল কর :

17. $3x^2(x-2)-2x(x^2-5)$. 18. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$.

19. $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)$.

20. $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+(y^2-z^2)(b^2-c^2)+(z^2-x^2)(c^2-a^2)$.

115. দুইটি বহুপদ (Polynomial) রাশির গুণফল

একটি বহুপদ রাশিকে অন্য একটি বহুপদ রাশি-দ্বারা গুণ করিতে হইলে, একটির প্রত্যেক পদকে অন্যটির প্রত্যেক পদ-দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলগুলির সমষ্টি লইতে হয়। অর্থাৎ,

$$(a+b+c+\cdots)\times(m+n+p\cdots)$$
$$=am+an+ap+\cdots\cdots+bm+bn+bp+\cdots$$
$$+cm+cn+\cdots\cdots$$

এখন $m+n+p+\cdots$এর পরিবর্তে M লিখিলে,

$$(a+b+c+\cdots)\times(m+n+p+\cdots)$$
$$=(a+b+c+\cdots\cdots)M$$
$$=aM+bM+cM+\cdots\cdots$$
$$=a(m+n+p+\cdots)+b(m+n+p+\cdots)$$
$$+c(m+n+p+\cdots)+\cdots$$
$$=am+an+ap+\cdots+bm+bn+bp+\cdots$$
$$+cm+cn+cp+\cdots$$

উদা. $(x+y+z)$ কে $(a+b+c)$ দ্বারা গুণ কর।

$(x+y+z)\times(a+b+c)=ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz$.

116. ব্যাবহারিক প্রক্রিয়া

একটি বহুপদ রাশিকে অন্য একটি বহুপদ রাশি-দ্বারা গুণ করিবার সময়ে নিম্নলিখিতরূপে কার্যটি সম্পন্ন করা সুবিধাজনক।

উদা. 1. x^2-xy+y^2 কে x^2+xy-y^2 দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l}
x^2-xy+y^2\\
\underline{x^2+xy-y^2}\\
x^4-x^3y+x^2y^2\\
\quad +x^3y-x^2y^2+xy^3\\
\qquad\qquad -x^2y^2+xy^3-y^4\\
\hline
x^4 \qquad\qquad -x^2y^2+2xy^3-y^4
\end{array}$$

প্রক্রিয়া। গুণক রাশিটিকে গুণ্য রাশির নিম্নে স্থাপন করিয়া উহাদের নিম্নে একটি অনুভূমিক (horizontal) রেখা অঙ্কিত কর। প্রথমে গুণ্য রাশির পদগুলিকে গুণকের প্রথম পদ x^2 দ্বারা গুণ কর এবং গুণফলটি রেখার নিম্নে রাখ। পরে গুণ্য রাশিটিকে গুণকের দ্বিতীয় পদ $+xy$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে প্রথম গুণফলের নিম্নে এক সারিতে এমনভাবে রাখ, যেন সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে পড়ে। তারপর গুণ্য রাশির পদগুলিকে গুণক রাশির তৃতীয় পদ $-y^2$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলটি তৃতীয় সারিতে এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন সদৃশ পদগুলি পূর্বের মত একই পাটিতে পড়ে। এখন তিন সারিতে অবস্থিত আংশিক গুণফলগুলি পাটিক্রমে যোগ করিয়া যোগফলটি গুণফল-সমূহের পাদদেশে অঙ্কিত একটি অনুভূমিক রেখার নিম্নে রাখ। ঐ যোগফলই নির্ণেয় গুণফল।

দ্রষ্টব্য। উক্ত উদাহরণে গুণ্য এবং গুণক উভয়ই সাধারণ অক্ষর x এর অধঃক্রম অনুসারে লিখিত হইয়াছে ; এই কারণে বিভিন্ন সারির সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে পড়িয়াছে।

সুতরাং, কোন বহুপদ রাশিকে অন্য একটি বহুপদ রাশি-দ্বারা গুণ করিতে হইলে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পালন করিতে হয় :—

1. গুণ্য এবং গুণক উভয় রাশিকেই উহাদের মধ্যস্থিত কোন সাধারণ অক্ষরের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

2. গুণক রাশিটি গুণ্য রাশিটির নিম্নে লিখিয়া পূর্ব উদাহরণে বর্ণিত উপায়ে গুণন-কার্য সম্পন্ন কর।

উদা. 2. $a^3+b^3-a^2b+ab^2$ কে a^2+b^2-ab দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য এবং গুণক উভয়কে a র অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া,

গুণ্য $= a^3-a^2b+ab^2+b^3$

গুণক $= a^2-ab+b^2$

গুণ্যটিকে a^2 দ্বারা গুণ করিয়া, গুণফল $= a^5-a^4b+a^3b^2+a^2b^3$

" $-ab$ " " " $= \quad -a^4b+a^3b^2-a^2b^3-ab^4$

" $+b^2$ " " " $= \quad a^3b^2-a^2b^3+ab^4+b^5$

সম্পূর্ণ গুণফল $= a^5-2a^4b+3a^3b^2-a^2b^3 \quad +b^5$

দ্রষ্টব্য 1. এই উদাহরণে, গুণ্যটি তৃতীয় মানের (of the third degree) সমমাত্র (homogeneous) রাশিমালা, গুণকটি দ্বিতীয় মানের সমমাত্র রাশিমালা এবং গুণফলটি একটি পঞ্চম মানের সমমাত্র রাশিমালা। সাধারণত, দুইটি সমমাত্র রাশির গুণফলও একটি সমমাত্র রাশি।

উদা. 3. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ রাশিটিকে $a+b+c$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য এবং গুণক উভয়কে a র অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া,

$$\begin{array}{lllllll}
 & \text{গুণ্য} = a^2 - ab - ac + b^2 + c^2 - bc \\
 & \text{গুণক} = a+b+c \\
\hline
a \text{ দ্বারা গুণনের ফল} = & a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 + ac^2 - abc \\
b \quad ,, \quad ,, = & \quad +a^2b \quad -ab^2 \quad -abc + b^3 + bc^2 - b^2c \\
c \quad ,, \quad ,, = & \quad +a^2c \quad -ac^2 - abc \quad -bc^2 + b^2c + c^3 \\
\hline
\text{সম্পূর্ণ গুণনফল} = & a^3 \quad -3abc + b^3 \quad +c^3
\end{array}$$

এই ফলটি সাধারণত $a^3+b^3+c^3-3abc$ এইরূপে লিখিত হয়।

117. ক্রমিক গুণফল (Continued Product)

তিন অথবা তদধিক রাশির ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে তাহাদের যে-কোন দুইটির গুণফল নির্ণয় করিতে হয়, পরে এই গুণফলকে অবশিষ্ট রাশিগুলির কোন একটির দ্বারা গুণ করিতে হয়, তাহার পরে অন্য একটির দ্বারা, এইরূপে পর পর গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. $a+b$, $a-b$ এবং a^2+b^2 এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

এ স্থলে প্রথমে $a+b$ এবং $a-b$ এর গুণফল নির্ণয় করা হইল, পরে এই গুণফলকে a^2+b^2 দ্বারা গুণ করা হইল; অতএব—

$$\begin{array}{ll}
(i) & \begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
(ii) & \begin{array}{l} a^2-b^2 \\ a^2+b^2 \\ \hline a^4-a^2b^2 \\ \quad +a^2b^2-b^4 \\ \hline a^4 \quad -b^4 \end{array}
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= a^4-b^4$.

উদা. 2. $x+y$, $x-y$ এবং $x^4-x^2y^2+y^4$ এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$x+y$ ও $x-y$ এর গুণফল $= x^2-y^2$; x^2-y^2 ও $x^4-x^2y^2+y^4$ কে পরস্পর গুণ করিলে,

$$\begin{array}{l} x^4 - x^2y^2 + y^4 \\ \underline{x^2 - y^2 \qquad\qquad} \\ x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 \\ \underline{\qquad - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6} \\ x^6 - 2x^4y^2 + 2x^2y^4 - y^6 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় গুণফল $= x^6-2x^4y^2+2x^2y^4-y^6$.

118. ভগ্নাংশিক সহগ (Fractional Co-efficients)

যদি গুণ্য এবং গুণকগুলি ভগ্ন সহগ-বিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মানুসারে গুণ করিতে হইবে এবং অন্যান্য বিষয়ে পূর্ববর্ণিত প্রক্রিয়া অনুসারে কার্য করিতে হইবে।

উদা. $x^3-\frac{1}{2}x^2y-3y^3$ কে $2x^2-\frac{1}{8}y^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} x^3 - \frac{1}{2}x^2y - 3y^3 \\ \underline{2x^2 - \frac{1}{8}y^2 \qquad\qquad} \\ 2x^5 - x^4y - 6x^2y^3 \\ \underline{\qquad\qquad + \frac{1}{16}x^2y^3 - \frac{1}{8}x^3y^2 + \frac{3}{8}y^5} \\ 2x^5 - x^4y - \frac{95}{16}x^2y^3 - \frac{1}{8}x^3y^2 + \frac{3}{8}y^5 \end{array}$$

119 মিশ্র সহগ এবং বন্ধনীর ব্যবহার

যদি কোন রাশিমালায় মিশ্র সহগ থাকে, তাহা হইলে অধিকাংশ ক্ষেত্রে বন্ধনীগুলি যথাযথ রাখিয়া অপেক্ষাকৃত সহজে গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়, অথবা নূতন বন্ধনী স্থাপন করিয়া পদগুলিকে অধিকতর সুবিধাজনকভাবে সাজাইয়া গুণনক্রিয়াটি অনেক সরল করা যায়। নিম্নলিখিত উদাহরণদ্বারা প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে :—

উদা. $x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2$ কে $x+y+z$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্যটিকে $x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)$ এইরূপে এবং গুণকটিকে $x+(y+z)$ এইরূপে লিখিয়া গুণন-কার্য সম্পন্ন কর।

$$\begin{array}{l} x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2) \\ \underline{x+(y+z)} \\ x^3-(y+z)x^2+(y^2-yz+z^2)x \\ \underline{\quad (y+z)x^2-(y^2+2yz+z^2)x+(y+z)(y^2-yz+z^2)} \\ x^3 \qquad\qquad -3xyz \qquad\qquad +y^3+z^3 \end{array}$$

এখানে, x এর সহগ $=(y^2-yz+z^2)-(y^2+2yz+z^2)=-3yz$;

এবং $(y+z)(y^2-yz+z^2)=y^3+z^3$; অনু. 75.

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

দ্রষ্টব্য। অনু. 116 তে বর্ণিত প্রক্রিয়াটি উপবি উক্ত উদাহরণেব সহিত তুলনা করিলে স্পষ্টই দেখা যায় যে, বন্ধনী স্থাপন করিয়া গুণন-ক্রিয়া অনেক সরল করা যায়।

120. একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যক দ্বিপদ রাশির গুণফল

সাধারণ গুণনক্রিয়া দ্বারা দেখা যায় যে,

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$$

ইহা একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট তিনটি দ্বিপদ রাশিব গুণফল-নির্ণযেব একটি সূত্র। বন্ধনীগুলি যথাযথ রাখিয়া একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যক দ্বিপদ রাশির গুণফল সহজেই নির্ণয় করা যায়।

উপরি উক্ত গুণফলের চারটি পদ নিম্নলিখিতরূপে গঠিত হয় :—

1. প্রথম পদটি, প্রত্যেক দ্বিপদ বাশির সাধারণ পদের ঘন হইবে।

2. দ্বিতীয় পদটি, ঐ সাধারণ পদের বর্গ এবং স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত তিনটি দ্বিতীয় পদের সমষ্টির গুণফলের সমান।

3. তৃতীয় পদটি, দ্বিতীয় পদগুলির স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত প্রত্যেক দুইটিকে লইয়া গুণ করিলে যে গুণফলগুলি পাওয়া যায়, তাহাদের সমষ্টি এবং সাধারণ-পদটির গুণফলের সমান।

4. চতুর্থ পদটি, স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত তিনটি দ্বিতীয় পদের গুণফল হইবে।

সাধাবণত, সকল ক্ষেত্রেই, একটি সাধারণ পদ-বিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যক

দ্বিপদ রাশির গুণফল নির্ণয় করা যায়; গুণফলের ক্রমিক পদগুলি যথাক্রমে নিম্নলিখিতরূপে গঠিত হইবে :—

1. যতগুলি গুণনীয়ক আছে গুণফলের প্রথম পদটি, উক্ত সাধারণ রাশিটির তত ঘাত হইবে।

2. দ্বিতীয় পদটি, সাধারণ রাশির অব্যবহিত পরবর্তী ঘাত এবং স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির সমষ্টির গুণফলের সমান।

3. তৃতীয় পদটি, সাধারণ রাশির অব্যবহিত পরবর্তী ঘাত এবং দ্বিতীয় পদগুলির স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত প্রত্যেক তুইটির গুণফলের সমষ্টির গুণফলের সমান।

4. চতুর্থ পদটি, সাধারণ রাশির অব্যবহিত পরবর্তী ঘাত এবং দ্বিতীয় পদগুলির স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত প্রত্যেক তিনটির গুণফলের সমষ্টির গুণফলের সমান।

5. শেষের পদটি, স্বকীয় চিহ্ন-যুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির গুণফলের সমান।

6. গুণফলটির পদগুলির সংখ্যা গুণনীয়কগুলির সংখ্যা অপেক্ষা 1 অধিক হইবে।

সিদ্ধান্ত। সহজেই নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তসমূহ পাওয়া যাইবে :—

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x-c)=x^3+(a+b-c)x^2+(ab-bc-ca)x-abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+bc+ac+ad+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+bcd+cda+adb)x+abcd.$$

প্রশ্নমালা 32

গুণ কর :

1. $a^4-a^2x^2+x^4$ কে a^2+x^2 দ্বারা।
2. $4a^2+6ab+9b^2$ কে $2a-3b$ দ্বারা।
3. $\frac{3}{2}x^2+xy+\frac{2}{3}y^2$ কে $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ দ্বারা।
4. $\frac{1}{2}a^2-3a+\frac{3}{4}$ কে $\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}$ দ্বারা।
5. $x^2-y^2+z^2$ কে $x^2+y^2-z^2$ দ্বারা।
6. a^2-ab+b^2 কে a^2+ab+b^2 দ্বারা।

7. x^4+x^2+1 কে x^4-x^2+1 দ্বারা।

8. $x+2y+3z$ কে $2x-5y+z$ দ্বারা।

9. $\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}ax$ কে $\frac{2}{3}ax+\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}a^2$ দ্বারা।

10. $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3$ কে $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2$ দ্বারা।

11. a^2+x^2-ax+5 কে a^2-x^2+ax-5 দ্বারা।

12. $1-x+x^2-x^3$ কে $1+x+x^2+x^3$ দ্বারা।

13. $xy^2+yx^2-yz^2-z^2x$ কে $x^2+yz-xy-zx$ দ্বারা।

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :—

14. $a-x,\ a^2-x^2,\ a^3-x^3.$

15. $a-x,\ a+x,\ a^2+x^2,\ a^4+x^4.$

16. $x-1,\ x-2,\ x-3,\ x-4.$

17. $a^2+ab+b^2,\ \ a^2-ab+b^2,\ \ a^4-a^2b^2+b^4.$

18. $a+x,\ (a^2-ax+x^2),\ (a-x),\ (a^2+ax+x^2).$

19. $x-y,\ \ x^2+xy+y^2,\ \ x^3+y^3,\ \ x^6+y^6.$

20. $(a+b+c),\ (a-b+c),\ (a+b-c)$ এবং $(-a+b+c).$

সরল কর :

21. $(a^2+ab+b^2)(a+b)-(a^2-ab+b^2)(a-b).$

22. $(a^m+b^m)(a^m-b^m)(a^{2m}+b^{2m}).$

23. $(a^{2m}-2a^mb^m+b^{2m})(a^{2m}+2a^mb^m+b^{2m}).$

121. বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রক্রিয়া (Method of Detached Co-efficients)

গুণ্য এবং গুণক দুইটিতে কেবলমাত্র একটি সাধারণ রাশির ঘাতসমূহ থাকিলে, অথবা উভয়ে দুইটি রাশিযুক্ত সমমাত্র রাশিমালা হইলে, উক্ত রাশির ঘাতগুলি বর্জনপূর্বক কেবলমাত্র উক্ত রাশি হইতে বিচ্ছিন্ন সহগগুলি যথাক্রমে লিখিয়া গুণনপ্রক্রিয়া সংক্ষেপ করা যায়। ইহা 10 এর ঘাত উহ্য রাখিয়া কোন সংখ্যাকে অঙ্ক-দ্বারা প্রকাশ করিবার পাটীগণিতীয় প্রক্রিয়ার অনুরূপ। প্রথমে উভয় রাশিকেই সাধারণ রাশির ঊর্ধ্বক্রম

বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া লইতে হইবে। নিম্নলিখিত উদাহরণ-দ্বারা প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে :—

উদা. 1. x^3-3x^2+2x-4 কে $x+2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} x^3-3x^2+2x-4 \\ \underline{x+2} \\ 1-3+2-4 \\ \underline{\quad +2-6+4-8} \\ 1-1-4+0-8 \end{array}$$

শেষের সারির প্রত্যেক পদে x এর উপযুক্ত ঘাতগুলি স্থাপন করিলে, নির্ণেয় গুণফল $=x^4-x^3-4x^2-8$.

দ্রষ্টব্য। গুণফলে x-যুক্ত কোন পদ নাই; ইহার স্থান একটি শূন্য-সহগ-দ্বারা প্রদর্শিত হইয়াছে। সেইরূপ, যদি প্রদত্ত রাশিমালায় কোন ঘাত উহ্য থাকে, তাহা হইলে তাহার স্থানে পাটীগণিতের ন্যায় 0 বসাইতে হইবে।

উদা. 2. $2x^4-4x^2+5x-3$ কে x^2+2x+6 দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য রাশিটিতে x^3 -ঘটিত কোন পদ নাই। ইহার স্থান একটি শূন্য-দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে। এইরূপে,

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x^4 & +0.x^3 & -4x^2 & +5x & -3 & & \\ x^2 & +2x & +6 & & & & \\ \hline 2 & +0 & -4 & +5 & -3 & & \\ & +4 & +0 & -8 & +10 & -6 & \\ & & +12 & +0 & -24 & +30 & -18 \\ \hline 2x^6 & +4x^5 & +8x^4 & -3x^3 & -17x^2 & +24x & -18 \end{array}$$

দ্রষ্টব্য। যদি গুণকের মধ্যে কোন পদ উহ্য থাকে তাহা হইলে তৎস্থানে শূন্য বসাইতে হইবে; এই জন্য আংশিক গুণফলে একটি সারিতে সকল সহগগুলিই শূন্য হইবে। সুতরাং এইরূপ স্থলে, আংশিক গুণফলগুলিতে পরবর্তী সহগগুলির সারি দক্ষিণে একটির পরিবর্তে দুইটি স্থান সরাইয়া রাখিতে হইবে।

122. পাটীগণিতীয় এবং বীজগণিতীয় গুণন-প্রক্রিয়ার সাদৃশ্য

উপরে বর্ণিত বিচ্ছিন্ন সহগের প্রক্রিয়া হইতে সহজেই বুঝা যায় যে, পাটীগণিতীয় এবং বীজগণিতীয় গুণন-প্রক্রিয়ার মধ্যে সাদৃশ্য আছে।

উদা. 523 কে 34 দ্বারা গুণ কর।

523 সংখ্যাটি $5\times10^2+2\times10+3$ এর সমান এবং 34, $3\times10+4$ এর সমান। নিম্নলিখিত উপায়ে গুণফল নির্ণয় করিতে পারা যায় :—

$$\begin{array}{lrrrr} \text{I.} & & 5.10^2 & +2.10 & +3 \\ & & & 3.10 & +4 \\ \hline & 15.10^3 & +6.10^2 & +9.10 & \\ & & 20.10^2 & +8.10 & +12 \\ \hline & 15.10^3 & +26.10^2 & +17.10 & +12 \end{array}$$

∴ গুণফলটি $=15.10^3+(2.10+6)10^2+(1.10+7)10+(1.10+2)$

$$=15.10^3+2.10^3+6.10^2+1.10^2+7.10+1.10+2$$

$$=17.10^3+7.10^2+8.10+2=17782.$$

$10=x$ লিখিলে, প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিত আকার প্রাপ্ত হয় :—

$$\begin{array}{lrrrr} \text{II.} & & 5x^2 & +2x & +3 \\ & & & 3x & +4 \\ \hline & 15x^3 & +6x^2 & +9x & \\ & & 20x^2 & +8x & +12 \\ \hline & 15x^3 & +26x^2 & +17x & +12 \end{array}$$

অতএব দেখা যাইতেছে যে, I এবং II প্রক্রিয়া দুইটি সম্পূর্ণ সদৃশ। প্রথমটি হইতে 523×34, এবং দ্বিতীয়টি হইতে $(5x^2+2x+3)\times(3x+4)$ এর গুণফল পাওয়া যায়। প্রকৃতপক্ষে, 523 কে 34 দ্বারা গুণ করিবার সময়ে প্রক্রিয়াটি I এর ন্যায় করা হয়, কেবলমাত্র 10 এর ঘাতসমূহ উহ্য থাকে।

123. গুণন-ঘটিত সহজ সমীকরণ

উদা. কোন সংখ্যাকে উহা অপেক্ষা 1-অধিক একটি সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিলে গুণফলটি ঐ সংখ্যার বর্গ অপেক্ষা 3 অধিক হয়। সংখ্যাটি কত?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x; তাহা হইলে ইহা অপেক্ষা 1-অধিক সংখ্যাটি $=x+1$, এবং ইহার বর্গ$=x^2$.

∴ প্রশ্নানুসারে, $x\times(x+1)=x^2+3$, বা $x^2+x=x^2+3$; উভয় পক্ষ হইতে x^2 অপসারণ করিয়া,

$x=3$ নির্ণেয় সংখ্যা।

সহজেই দেখা যায়, $3\times4=12=9+3=3^2+3$.

প্রশ্নমালা 33

বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রক্রিয়া অবলম্বন-পূর্বক নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি-দ্বারা গুণ কর :—

1. $x^2+x+2,\ 2x+1.$ 2. $3x^2-4x+5,\ 4x-5.$

3. $2x^2-4x+3,\ x^2-3x+1.$ 4. $6a^2-2ab+3b^2,\ 2a+3b.$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

5. $(x+6)(x-6)=x(x-4).$ 6. $x(2x-3)=2x^2-9.$

7. $(x+2)(x+3)=(x-1)(x+9).$

8. $(x^2+4x+4)(x+1)=x^2(x+5)+7(x+2).$

9. $(x^2-x+1)(x+1)+x=(x+2)(x^2-2x+4).$

10. কোন সংখ্যাকে ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 2-কম একটি সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 4 কম হয়। সংখ্যাটি কত ?

11. একটি সংখ্যাকে তাহার অব্যবহিত পরবর্তী সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 4 অধিক হয়। সংখ্যাটি কত ?

12. কোন সংখ্যার 4 গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল ঐ সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 5 অধিক হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

13. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার প্রথমটি x; সংখ্যা তিনটির গুণফল কত ?

14. A এবং B এর মধ্যে 33 টাকা এরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দাও, যেন A, B এর দ্বিগুণ পায়।

15. $3x^2+2x+1$ কে $2x+7$ দ্বারা গুণ কর, এবং 321 ও 27 এর গুণফলের সহিত উহার সাদৃশ্য প্রদর্শন কর।

124. ভাগের অর্থ (Meaning of Division)

ভাগ গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া, অর্থাৎ ভাগ এমন একটি প্রক্রিয়া যদ্দ্বারা গুণনের ফল বিনষ্ট হয়। যেমন, '$\div x$' এই প্রতীক-দ্বারা, x দ্বারা গুণনের ফলটি বিনষ্ট করিতে হইবে, ইহাই বুঝিতে হয়; অর্থাৎ $a\times x\div x=a$. এ স্থলে '$\div x$' চিহ্নটি a কে x দ্বারা গুণনের ফল বিনষ্ট করিয়া দিয়াছে।

সুতরাং, একটি সংখ্যা a কে অন্য একটি সংখ্যা b দ্বারা ভাগ করিতে হইলে,

এমন একটি তৃতীয় সংখ্যা c নির্ণয় করিতে হয়, যাহাকে b দ্বারা গুণ করিলে প্রদত্ত সংখ্যা a পাওয়া যাইবে। কারণ সংজ্ঞানুসারে, $a \div b \times b = a$. তাহা হইলে, যদি $a \div b = c$ হয়, $c \times b = a$ হইবে।

যে রাশিকে ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজ্য** (dividend), যদ্দ্বারা ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজক** (divisor), এবং লব্ধ ফলকে **ভাগফল** (quotient) বলে। যদি ভাজ্য D, ভাজক d এবং ভাগফল Q হয়, তাহা হইলে

$$D \div d = Q, \quad \text{অথবা} \quad D = d \times Q.$$

এইরূপে, পূর্বোক্তস্থলে, a ভাজ্য, b ভাজক এবং c ভাগফল। $a \div b$ কে $\frac{a}{b}$ বা a/b আকারে লেখা হয়। $\frac{a}{b}$ এর a কে **লব** (numerator) এবং b কে **হর** (denominator) বলে।

125. ভাগের কয়েকটি দৃষ্টান্ত

(i) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a \div b \div c = a \div bc.$$

$$\begin{aligned}(a \div b \div c) \times bc &= \{(a \div b) \div c\} \times c \times b \\ &= [\{(a \div b) \div c\} \times c] \times b \\ &= (a \div b) \times b \qquad [\text{ সংজ্ঞানুসারে }] \\ &= a.\end{aligned}$$

$\therefore$ উভয় পক্ষ bc দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$(a \div b \div c)bc \div bc = a \div bc,$$

$$\text{বা} \qquad a \div b \div c = a \div bc.$$

অর্থাৎ কোন সংখ্যাকে পর পর দুইটি সংখ্যা-দ্বারা ভাগ করিলে, এবং ঐ সংখ্যাকে শেষোক্ত সংখ্যা দুইটির গুণফল-দ্বারা ভাগ করিলে, একই ফল পাওয়া যায়।

$$\text{এইরূপ,} \quad a \div b \div c \div d = a \div b \div cd = a \div bcd.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $a \div b \div c = a \div c \div b$, কারণ উভয় পক্ষ $= a \div (bc)$.

(*ii*) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}.$$

সংজ্ঞানুসারে, $1 \div b \times b = 1$, বা $\frac{1}{b} \times b = 1$.

কিন্তু $\quad a \div b \times b = a$;

$\therefore \quad a \div b \times b \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$, বা $\quad a \div b \times (b \times \frac{1}{b}) = a \times \frac{1}{b}$;

সুতরাং, $a \div b = a \times \frac{1}{b}$.

অর্থাৎ কোন একটি রাশিকে অপর একটি রাশি-দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির বিপরীত (reciprocal) দ্বারা গুণ করিলেও সেই একই ফল পাওয়া যায়।

(*iii*) প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a \div b \times c = a \times c \div b$.

$$a \div b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b}$$

$$= a \times c \div b.$$

উপরি লিখিত ফলগুলি হইতে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, গুণ- ও ভাগ-চিহ্নযুক্ত কতকগুলি প্রতীক পাশাপাশি থাকিলে, গুণচিহ্নসমেত এবং ভাগচিহ্নসমেত প্রতীকগুলি যে-কোন ক্রমে লেখা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত। কতকগুলি গুণ- ও ভাগ-চিহ্নযুক্ত প্রতীক পাশাপাশি থাকিলে, উহাদিগকে কেবলমাত্র একটি ভাগচিহ্নে পর্যবসিত করা যাইতে পারে। যেমন,

$$a \div b \times c \div d \div e \times f = a \times c \times f \div b \div d \div e = acf \div bde.$$

126. বন্ধনীর পূর্বে '×' এবং '÷' চিহ্ন

বন্ধনীর ভিতরে কেবলমাত্র গুণ- ও ভাগ-চিহ্নযুক্ত রাশি থাকিলে ঐ বন্ধনী অপসারণ করা যাইতে পারে; যদি বন্ধনীর পূর্বে '×' চিহ্ন থাকে, তাহা হইলে বন্ধনীর ভিতরের কোনও চিহ্নই পরিবর্তন করিতে হয় না; কিন্তু বন্ধনীর পূর্বে '÷' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি চিহ্নকেই বিপরীত চিহ্নে

পরিবর্তিত করিতে হয় ; অর্থাৎ ‘×’ কে ‘÷’ চিহ্নে এবং ‘÷’ কে ‘×’ চিহ্নে পরিবর্তিত করিতে হয়।

অতএব, $a\times(b\div c)=a\times b\div c$ এবং $a\div(b\div c)=a\div b\times c$;

এইরূপ, $a\times(b\times c)=a\times b\times c$ এবং $a\div(b\times c)=a\div b\div c$.

সাধারণ ভাবে, $a\times(b\div c\times d\div\cdots)=a\times b\div c\times d\div\cdots$

এবং $a\div(b\div c\times d\div\cdots)=a\div b\times c\div d\times\cdots$

উদা. $5\times(4\times6\div3)=5\times(24\div3)=5\times8=40,$

এবং $5\times4\times6\div3=20\times6\div3=120\div3=40.$

পুনরায়, $72\div(4\times6\div3)=72\div(24\div3)=72\div8=9,$

এবং $72\div4\div6\times3=18\div6\times3=3\times3=9.$

127. ভাগের চিহ্ন-সম্বন্ধীয় নিয়ম

ভাগ গুণের বিপরীত প্রক্রিয়া, সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই চিহ্ন-সম্বন্ধীয় একই নিয়ম প্রযোজ্য ; অর্থাৎ সদৃশ চিহ্নে ‘+’ এবং অসদৃশ চিহ্নে ‘−’ হয়।

কারণ, যে হেতু $(+a)\times(+b)=+ab,\quad\therefore\ (+ab)\div(+b)=+a$;

যে হেতু $(+a)\times(-b)=-ab,\quad\therefore\ (-ab)\div(-b)=+a$;

যে হেতু $(-a)\times(+b)=-ab,\quad\therefore\ (-ab)\div(+b)=-a$;

যে হেতু $(-a)\times(-b)=+ab,\quad\therefore\ (+ab)\div(-b)=-a.$

128. ভাগের সূচক নিয়ম

ইতিপূর্বে বর্ণিত হইয়াছে যে, যদি একটি রাশির কোন ঘাতকে ঐ রাশিরই অন্য একটি ঘাত-দ্বারা ভাগ করা যায়, তাহা হইলে ভাজ্যের সূচক হইতে ভাজকের সূচক বিয়োগ করিলেই ভাগফলের সূচক পাওয়া যায়।

কারণ, m এবং n ধন, পূর্ণরাশি হইলে, $a^m\times a^n=a^{m+n}$;

$\therefore\quad a^{m+n}\div a^m=a^{m+n-m}=a^n.$

যদি $m+n=p$ হয়, তাহা হইলে $a^p\div a^m=a^{p-m}$, এবং $p>m$.

সুতরাং p এবং q ধন, পূর্ণরাশি হইলে,

$a^p\div a^q=a^{p-q}$; এ স্থলে p, q অপেক্ষা বৃহত্তর ;

এবং $a^p \div a^q = \dfrac{1}{a^q \div a^p} = \dfrac{1}{a^{q-p}}$; এ স্থলে p, q অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এইরূপে, $a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$; $a^4 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-4}} = \dfrac{1}{a}$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 = 1.$

129. একটি একপদ রাশিকে অপর একটি একপদ রাশি-দ্বারা ভাগ

পূর্বের অনুচ্ছেদগুলিতে বিবৃত নিয়মানুসারে, একটি একপদ রাশিকে অপর একটি একপদ রাশি-দ্বারা ভাগ করা যাইতে পারে। নিম্নলিখিত নিয়মানুসারে ভাগফলটি পাওয়া যায় :

নিয়ম। চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মানুসারে প্রথমে ভাগফলের চিহ্ন নিরূপণ কর, পরে ভাজ্যের সংখ্যাত্মক সহগকে ভাজকের সংখ্যাত্মক সহগ-দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের সংখ্যাত্মক সহগটি নিরূপণ কর এবং ভাজ্য ও ভাজক হইতে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ কর। এইরূপে প্রাপ্ত ফলটিই নির্ণেয় ভাগফল।

উদা. $32x^6y^5z^{12}$ কে $-8x^4y^3z^8$ দ্বারা ভাগ কর।

$$32x^6y^5z^{12} \div (-8x^4y^3z^8)$$
$$= -(32 \div 8) \times (x^6 \div x^4) \times (y^5 \div y^3) \times (z^{12} \div z^8)$$
$$= -4 \times x^2 \times y^2 \times z^4 = -4x^2y^2z^4.$$

অথবা, $$\frac{32x^6y^5z^{12}}{-8x^4y^3z^8} = -4x^{6-4}y^{5-3}z^{12-8} = -4x^2y^2z^4.$$

130. একটি বহুপদ রাশিকে একটি একপদ রাশি-দ্বারা ভাগ

যে হেতু, $(a \div m + b \div m + c \div m + \cdots\cdots\cdots) \times m$
$$= a \div m \times m + b \div m \times m + c \div m \times m + \cdots\cdots$$
$$= a + b + c + \cdots\cdots ;$$

$$\therefore \ (a+b+c+\cdots) \div m = (a \div m) + (b \div m) + (c \div m) + \cdots\cdots$$

অর্থাৎ **একটি** বহুপদ রাশিকে একটি একপদ রাশি-দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলটি, ভাজ্যের প্রত্যেকটি পদকে ভাজক-দ্বারা ভাগ করিয়া যে আংশিক ভাগফলগুলি পাওয়া যায়, তাহাদের বৈজিক সমষ্টির সমান হইবে।

উদা. $6a^4-2a^3b+a^2b^2$ কে $3a^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\frac{6a^4-2a^3b+a^2b^2}{3a^2}=\frac{6a^4}{3a^2}-\frac{2a^3b}{3a^2}+\frac{a^2b^2}{3a^2}$$
$$=2a^2-\tfrac{2}{3}ab+\tfrac{1}{3}b^2.$$

প্রশ্নমালা 34

ভাগ কর :

1. $-\frac{3}{8}p^3q^2r^8$ কে $-\frac{4}{5}p^2qr^5$ দ্বারা।
2. $-66x^4y^5z^6$ কে $-1\frac{1}{3}x^2y^3z^4$ দ্বারা।
3. $105a^{10}b^9c^8x^2-140a^7b^3c^3x^4$ কে $35a^5bcx^2$ দ্বারা।
4. $-3a^4b^2c^3$ এবং $-4ab^4c^2$ এর গুণফলকে $5a^3b^3c^3$ দ্বারা।
5. $-6x^2y^2z^2$কে কত দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল $3x^2y^3z^4$ হইবে?
6. সরল কর :—

   $(x+y)^5\div(x+y)^3$; $(a-b)^7\div(a-b)^5$;
   $(ax+by)^6\div(ax+by)^2$.

ভাগ কর :

7. $25a^3x-15a^2x^2+5ax^3$ কে $5ax$ দ্বারা।
8. $-\frac{1}{3}x^3yz+\frac{1}{4}xy^3z-\frac{1}{5}xyz^3$ কে $-\frac{1}{6}xyz$ দ্বারা।
9. $8a^4y^2z-12a^2y^4z^2-16ay^3z^4$ কে $4ay^2z$ দ্বারা।
10. নিম্নলিখিত ভাগ ক্রিয়াগুলি সম্পন্ন কর :—

$$\frac{(a^2+b)^5}{a^2+b};\quad \frac{(x^2+y^2)^6}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{(ax+by+cz)^{2n+1}}{(ax+by+cz)^{n+1}}.$$

11. ভাজ্য $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}xy-\frac{1}{3}zx$, ভাগফল $-\frac{2}{3}x$; ভাজক কত?
12. ভাজ্য $12x^3y^2-6x^2y^3-3xy^4$, ভাজক $-3xy$; ভাগফল কত?

131. একটি বহুপদ রাশিকে (polynomial) অপর একটি বহুপদ রাশি-দ্বারা ভাগ

এই জাতীয় ভাগ, পাটীগণিতের **দীর্ঘভাগের** অনুরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিয়া সম্পন্ন করা হয়। নিম্নলিখিত উদাহরণ হইতে প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে :—

উদা. $x^2-2xy+y^2$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ কর।

এ স্থলে $x^2-2xy+y^2$ কে x^2-xy এবং $-xy+y^2$, এই দুই অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে। এক্ষণে সম্পূর্ণ রাশিটিকে $x-y$ দ্বারা ভাগ কবিলে যে ভাগফল পাওয়া যায় তাহা ঐ দুই অংশের প্রত্যেককে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে যে আংশিক ভাগফল দুইটি পাওয়া যায় তাহাদের বৈজিক সমষ্টির সমান।

এক্ষণে x^2-xy, অর্থাৎ $x(x-y)$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে, x হয়; এবং দ্বিতীয় অংশ $-xy+y^2$, অর্থাৎ $-y(x-y)$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে, $-y$ হয়।

অতএব, $x^2-2xy+y^2$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফলটি $x-y$ হইবে।

কার্যত, নিম্নলিখিতরূপে উপরি বর্ণিত প্রক্রিয়াটি অবলম্বিত হয় :—

$$\begin{array}{r|l|l} x-y & x^2-2xy+y^2 & x-y \\ & \underline{x^2-xy} & \\ & -xy+y^2 & \\ & \underline{-xy+y^2} & \end{array}$$

উক্ত প্রক্রিয়াটিতে, প্রথমে ভাজকে যতগুলি পদ আছে ভাজ্য হইতে ততগুলি পদ লও এবং ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ-দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের প্রথম পদটি নির্ণয় কর। এ স্থলে ভাগফলের প্রথম পদ $=x^2\div x=x.$

পরে এই ভাগফল x দ্বারা ভাজকটিকে গুণ কর, এবং ভাজ্য হইতে গুণফল x^2-xy বিয়োগ কর। $-xy+y^2$ অবশিষ্ট থাকিবে; ইহাকে দ্বিতীয় ভাজ্য-রূপে গণ্য করিয়া $x-y$ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। পুনরায় পূর্বের ন্যায় অগ্রসর হইলে, $-y$ ভাগফল হইবে; ইহাই সম্পূর্ণ ভাগফলের দ্বিতীয় পদ।

দ্বিতীয় বার ভাগের পরে আর কোনও অবশিষ্ট থাকিবে না ; অতএব $x-y$ ই সম্পূর্ণ ভাগফল। যদি দ্বিতীয় বার ভাগের পরেও কোন অবশিষ্ট থাকে তবে উহাকে তৃতীয় ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া পুনরায় এইরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিতে হইবে। ভাগশেষ না থাকা পর্যন্ত এইরূপে অগ্রসর হইতে হইবে।

132. ভাগের নিয়ম

উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে ভাগের নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পাওয়া যায় :—

1. ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে প্রথমে উহাদের মধ্যস্থিত কোনও সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইতে হয়।

2. ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ-দ্বারা ভাগ করি[illegible] লব্ধ ফলকে ভাগফলের প্রথম পদরূপে রাখিতে হয়।

3. সম্পূর্ণ ভাজকটিকে ভাগফলের এই প্রথম পদ-দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে ভাজ্য হইতে বিয়োগ করিতে হয়।

4. এই বিয়োগফলকে নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া পুনরায় এইরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিতে হয়। ভাগশেষ না থাকা পর্যন্ত এইভাবে অগ্রসর হইতে হয়।

5. বিয়োগের সুবিধার জন্য সদৃশ পদগুলিকে একই পাটিতে রাখিতে হয়।

উদা 1. $x^4-4x^2+12x-9$ কে x^2+2x-3 দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে x এর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া লইয়া নিম্নলিখিতরূপে ভাগ-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা হইল :

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2+2x-3 & x^4+0.x^3-4x^2+12x-9 & x^2-2x+3 \\
 & \underline{x^4+2x^3-3x^2} & \\
 & -2x^3-x^2+12x & \\
 & \underline{-2x^3-4x^2+6x} & \\
 & 3x^2+6x-9 & \\
 & \underline{3x^2+6x-9} &
\end{array}$$

লক্ষ্য করিতে হইবে যে, ভাজ্যে x^4 এর পরে x^3-যুক্ত কোনও পদ নাই; প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে x^3 এর স্থানটি একটি শূন্য-দ্বারা পূর্ণ করিয়া লওয়া বিধেয়।

ভাজকটিতে তিনটি পদ আছে বলিয়া প্রথমে ভাজ্য হইতে তিনটি পদ লওয়া হইয়াছে। ভাগফলের প্রথম পদটি $(x^4 \div x^2)=x^2$. ভাজ্যের ঐ তিনটি পদ হইতে x^2 এবং ভাজক x^2+2x-3 এর গুণফল বিয়োগ করিয়া, $-2x^3-x^2$ অবশিষ্ট আছে। ভাজ্য হইতে $+12x$ পদটি নামাইয়া $-2x^3-x^2$ এর সহিত রাখা হইয়াছে এবং $-2x^3-x^2+12x$ কে দ্বিতীয় ভাজ্যরূপে ধরা হইয়াছে। ভাগফলের দ্বিতীয় পদটি $-2x$. দ্বিতীয় ভাজ্য হইতে $-2x$ এবং ভাজক x^2+2x-3 এর গুণফল বিয়োগ করিয়া, $3x^2+6x$ অবশিষ্ট আছে। তাহার পর মূল ভাজ্যের -9 পদটিকে $3x^2+6x$ এর পাশে নামাইয়া $3x^2+6x-9$ রাশিটিকে তৃতীয় ভাজ্যরূপে ধরা হইয়াছে এবং উহা হইতে ভাগফলের তৃতীয় পদ $+3$ এবং ভাজক x^2+2x-3 এর গুণফল বিয়োগ করিয়া কিছুই অবশিষ্ট নাই।

অতএব সম্পূর্ণ ভাগফলটি $=x^2-2x+3$.

দ্রষ্টব্য। প্রত্যেক বিয়োগ-ক্রিয়ার পর ভাজ্যের সমস্ত অবশিষ্ট পদগুলি একেবারে নামাইবার প্রয়োজন নাই, কেবলমাত্র প্রয়োজনীয় পদগুলি প্রত্যেকবারে নামাইতে হইবে।

উদা. 2. $a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc$ কে $ab+bc+ac$ দ্বারা ভাগ কর।

এ স্থলে ভাজ্য এবং ভাজক কোন সাধারণ অক্ষরের একই ক্রম অনুসারে সাজান নাই। উহাদিগকে a র অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া নিম্নলিখিতরূপে ভাগ-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা হইল :—

$$
\begin{array}{r|l|l}
ab+ac+bc & a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+3abc+b^2c+bc^2 & a+b+c \\
 & a^2b+a^2c \qquad\qquad\qquad +abc & \\
\hline
 & ab^2+ac^2+2abc+b^2c & \\
 & ab^2 \qquad +abc\ +b^2c & \\
\hline
 & ac^2+abc \qquad\qquad +bc^2 & \\
 & ac^2+abc \qquad\qquad +bc^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=a+b+c$.

উদা. 3. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$ কে $1+3x-5x^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l|l}
1+3x-5x^2 & 1+x-8x^2+19x^3-15x^4 \;(\; 1-2x+3x^2 \\
 & \underline{1+3x-5x^2} \\
 & \quad -2x-3x^2+19x^3 \\
 & \quad \underline{-2x-6x^2+10x^3} \\
 & \qquad\qquad 3x^2+9x^3-15x^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{3x^2+9x^3-15x^4}
\end{array}
$$

উদা. 4. x^6-y^6 কে $x-y$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l|l}
x-y & x^6-y^6 \;(\; x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5 \\
 & \underline{x^6-x^5y} \\
 & \quad x^5y-y^6 \\
 & \quad \underline{x^5y-x^4y^2} \\
 & \qquad x^4y^2-y^6 \\
 & \qquad \underline{x^4y^2-x^3y^3} \\
 & \qquad\quad x^3y^3-y^6 \\
 & \qquad\quad \underline{x^3y^3-x^2y^4} \\
 & \qquad\quad x^2y^4-y^6 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2y^4-xy^5} \\
 & \qquad\qquad xy^5-y^6 \\
 & \qquad\qquad \underline{xy^5-y^6}
\end{array}
$$

133. দীর্ঘ ভাগের সহিত সাদৃশ্য

উক্ত উদাহরণগুলি হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হইতেছে যে, ঐ সকল উদাহরণে অবলম্বিত প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণরূপে পাটীগণিতের 'দীর্ঘ ভাগ'-এর প্রক্রিয়ার অনুরূপ। একটি উদাহরণ-দ্বারা এই সাদৃশ্য আলোচনা করা হইবে।

672 কে 32 দ্বারা ভাগের ক্রিয়াটি ধরা যাউক।

$$
(i)\quad \begin{array}{l|l}
32 & 672 \;(\; 21 \\
 & \underline{64} \\
 & \;\; 32 \\
 & \;\; \underline{32}
\end{array}
\qquad\qquad
(ii)\quad \begin{array}{l|l}
3.10+2 & 6.10^2+7.10+2 \;(\; 2.10+1 \\
 & \underline{6.10^2+4.10} \\
 & \qquad\quad 3.10+2 \\
 & \qquad\quad \underline{3.10+2}
\end{array}
$$

(*i*) এ পাটীগণিতের প্রক্রিয়া প্রদর্শিত হইয়াছে, এবং (*ii*) এ সংখ্যা দুইটি বীজগণিতীয় আকারে প্রকাশ করিয়া ভাগ-ক্রিয়াটি প্রদর্শিত হইয়াছে।

যদি (*ii*) এ 10 এর পরিবর্তে x লেখা যায়, তাহা হইলে (*ii*) নিম্নলিখিত আকার প্রাপ্ত হয় :—

$$\begin{array}{r|l|l} 3x+2 & 6x^2+7x+2 & 2x+1 \\ & \underline{6x^2+4x} & \\ & \quad\quad 3x+2 & \\ & \quad\quad \underline{3x+2} & \end{array}$$

বীজগণিতেও $6x^2+7x+2$ কে $3x+2$ দ্বারা এইরূপে ভাগ করা হয় এবং $2x+1$ ভাগফল হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, বীজগণিতীয় ভাগক্রিয়ার সময়ে যে প্রক্রিয়া অবলম্বিত হয়, তাহা পাটীগণিতের দীর্ঘ ভাগের প্রক্রিয়া ভিন্ন অন্য কিছুই নহে।

দ্রষ্টব্য। পাটীগণিতে (*i*) এ প্রদর্শিত সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া অবলম্বন করা যায় ; কিন্তু বীজগণিতে এইরূপভাবে ভাগক্রিয়া সম্পন্ন করা সম্ভব নহে। অঙ্ক-সাহায্যে সংখ্যা লিখিবার প্রণালীর বিভিন্নতাই এই পার্থক্যের কারণ।

134. বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রক্রিয়া (Method of Detached Co-efficients)

প্রক্রিয়া (*ii*) হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, যদি ভাজ্য এবং ভাজক দুইটিতে একই রাশির বিভিন্ন ঘাত বিদ্যমান থাকে, অথবা উহারা উভয়েই দুইটি রাশিযুক্ত সমমাত্র রাশিমালা হয়, তাহা হইলে, গুণনের ন্যায়, ভাগক্রিয়াও বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রক্রিয়া-সাহায্যে সংক্ষিপ্ত করা যায়। প্রত্যেক ক্ষেত্রে, ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে একই ক্রমে সাজাইয়া লইতে হইবে।

উদা. 1. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ কে x^2-3x+2 দ্বারা ভাগ কর।

নিম্নে প্রক্রিয়াটি প্রদর্শিত হইল :—

$$\begin{array}{r|l|l} 1-3+2 & 1-1-3+1+2 & 1+2+1 \\ & \underline{1-3+2} & \\ & \quad\; 2-5+1 & \\ & \quad\; \underline{2-6+4} & \\ & \quad\quad\quad 1-3+2 & \\ & \quad\quad\quad \underline{1-3+2} & \end{array}$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=x^2+2x+1$.

উদা. 2. $x^6+y^6-2x^3y^3$ কে x^2+y^2-2xy দ্বারা ভাগ কর।

এ স্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে x এর ঘাতসমূহের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া ভাজ্যে উহ্য পদগুলির স্থান শূন্য-দ্বারা পূর্ণ করা হইয়াছে।

```
1-2+1 )1+0+0-2+0+0+1( 1+2+3+2+1
       1-2+1
       -----
         2-1-2
         2-4+2
         -----
           3-4+0
           3-6+3
           -----
             2-3+0
             2-4+2
             -----
               1-2+1
               1-2+1
               -----
```

∴ নির্ণেয় ভাগফল $= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

প্রশ্নমালা 35

ভাগ কর :

1. $2x^3-x^2-x-3$ কে $2x-3$ দ্বারা।
2. $6x^3+x^2-44x+21$ কে $3x-7$ দ্বারা।
3. $a+a^5+a^6$ কে a^2+a+1 দ্বারা।
4. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2$ কে $x^2-y^2+a^2$ দ্বারা।
5. $x^3+x^4-16x-4-9x^2$ কে $4+x^2+4x$ দ্বারা।
6. $y^3-y^2-16y+16$ কে y^2-16 দ্বারা।
7. $2x^4+9x-12-5x^3-7x^2$ কে $1-x+x^2$ দ্বারা।
8. $-7x^3-10x^2+x^4-3+25x$ কে $x+x^2-3$ দ্বারা।
9. $6x^5-17x^4+42x^3-66x^2+72x-72$ কে $2x^2-3x+6$ দ্বারা।
10. x^4+4y^4 কে $x^2-2xy+2y^2$ দ্বারা।
11. $2a^2-5a-6a^4+9a^3+3$ কে $3a^3-a+1$ দ্বারা।
12. $1-32x^5-128x^7$ কে $1-2x+4x^2$ দ্বারা।
13. $x^5-61x-60$ কে x^2-2x-3 দ্বারা।
14. $x^5+7x^3+13x+6$ কে x^2-x+3 দ্বারা।

15. $3x^2-4y^2-3z^2-4xy+8zx+8yz$ কে $x-2y+3z$ দ্বারা।

16. $3-x^2-4x^3-14x+x^4$ কে $3+x^2+x$ দ্বারা।

17. $1-a^2-b^2+a^2b^2$ কে $1+a+b+ab$ দ্বারা।

18. $1-16a^4$ কে $8a^3+4a^2+2a+1$ দ্বারা।

19. $4x-1+2x^5-x^2+x^4-7x^3$ কে x^3+1-3x দ্বারা।

20. $a+b+a^5+b^5$ কে $a+b$ দ্বারা।

21. $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$ কে $x+2y-3z$ দ্বারা।

22. $x^3+y^3+3xy-1$ কে $x+y-1$ দ্বারা।

23. $2x^5-7x^4-2x^3+18x^2-3x-8$ কে x^3-2x^2+1 দ্বারা।

24. $x^6-5x^5+5x^4+2x^2+5x-2$ কে $x-2-2x^2+x^3$ দ্বারা।

বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রক্রিয়া-দ্বারা ভাগ কর :—

25. $6x^4-x^3+4x^2+5x-6$ কে $3x^2+x-2$ দ্বারা।

26. $3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$ কে $1-3x+x^2$ দ্বারা।

27. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ কে $1+x^2+x^4$ দ্বারা।

28. x^3-27 কে x^2+3x+9 দ্বারা।

29. $3a+9b+6c$ কে $a+3b+2c$ দ্বারা ভাগ কর, এবং 396 ও 132 এর ভাগক্রিয়ার সহিত ইহার সম্বন্ধ নিরূপণ কর।

135. ভগ্নাংশ-সহগ

সহগগুলি ভগ্নাংশ হইলেও পূর্ণ-সহগ-সম্বন্ধে বর্ণিত নিয়মসমূহ প্রয়োগ করা চলিবে।

উদা. $\frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6$ কে $\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{r|l}
\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1 & \frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6\ \big(\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+6 \\
 & \underline{\frac{1}{3}x^4-\frac{5}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2} \\
 & -\frac{1}{2}x^3+\frac{37}{8}x^2-\frac{23}{4}x \\
 & \underline{-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{4}x} \\
 & 4x^2-5x+6 \\
 & \underline{4x^2-5x+6}
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+6.$

136. বন্ধনীর ব্যবহার

সহগগুলি আক্ষরিক হইলে, অনেক ক্ষেত্রে বন্ধনীর প্রয়োগ-দ্বারা প্রক্রিয়াটি সংক্ষিপ্ত হয়, এবং ভাগফল অপেক্ষাকৃত সহজে নির্ণয় করা যায়।

উদা. $x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-a & x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq & x^2-px+q \\
 & \underline{x^3-ax^2} & \\
 & -px^2+(q+ap)x & \\
 & \underline{-px^2+apx} & \\
 & qx-aq & \\
 & \underline{qx-aq} &
\end{array}
$$

প্রশ্নমালা 36

ভাগ কর :

1. $5a^2x^2-\frac{1}{5}$ কে $ax-\frac{1}{5}$ দ্বারা।
2. $x^2-xy+\frac{3}{16}y^2$ কে $x-\frac{1}{4}y$ দ্বারা।
3. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{12}a-1$ কে $\frac{2}{3}a-1$ দ্বারা।
4. $\frac{1}{3}x^2+\frac{17}{18}x+\frac{2}{3}$ কে $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ দ্বারা।
5. $\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{12}x^2y+\frac{1}{18}xy^2-\frac{1}{27}y^3$ কে $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ দ্বারা।
6. $\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{27}$ কে $3a+2$ দ্বারা। 7. $x^4-\frac{1}{81}y^4$ কে $x-\frac{1}{3}y$ দ্বারা।
8. $\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{27}y^3+\frac{1}{64}z^3-\frac{1}{8}xyz$ কে $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ দ্বারা।
9. $a^6+\frac{1}{27}b^6$ কে $a^2+ab+\frac{1}{3}b^2$ দ্বারা।
10. $\frac{3}{4}x^5-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27$ কে $\frac{1}{2}x^2-x+3$ দ্বারা।
11. $apx^3+(bp+aq)x^2+(cp+bq)x+qc$ কে $px+q$ দ্বারা।
12. $x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$ কে $x^2+(b+c)x+bc$ দ্বারা।
13. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$ কে $a+b+c$ দ্বারা।
14. $x^4+(b^2-2ab-a^2)x^2+b^4$ কে $x^2-(a+b)x+b^2$ দ্বারা।
15. $x^3+y^3+(p+1)xy(x+y)$ কে $x^2+pxy+y^2$ দ্বারা।
16. $x^4+2ax^3+(a^2+b+c)x^2+(ab+ca)x+bc$ কে x^2+ax+b দ্বারা।

17. $x^4-(2a+1)x^2+2a^2x-a^4+a^2$ কে $x^2-a^2+(x-a)$ দ্বারা।

18. ভাজ্য এবং ভাগফল যথাক্রমে $9x^5-x^3-12x^2-50$ এবং $3x^2-2x+5$ হইলে, ভাজক কত হইবে ?

19. দুইটি রাশির গুণফল $3x^2+6y^2+2z^2+11xy+7yz+7zx$, এবং উহাদের একটি $3x+2y+z$; অপরটি কত ?

137. অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division)

ভাগের সময়ে কখন কখন এরূপ হয় যে, শেষের ভাগশেষটি ভাজক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়ায় আর অগ্রসর হওয়া যায় না। এইরূপ ক্ষেত্রে ভাজ্য ভাজক-দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য নহে ; ভাগক্রিয়াটি সম্পন্ন হইবার পর একটি ভাগশেষ থাকে। অতএব, পাটীগণিতের ন্যায় এ স্থলেও ভাগফলটি সম্পূর্ণ ভাগফল নহে, ইহার অংশমাত্র। ভাগশেষটিকে লব এবং ভাজকটিকে হর লইয়া যে ভগ্নাংশ গঠিত হয়, আংশিক ভাগফলের সহিত তাহা যোগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফলটি পাওয়া যায়। এইরূপ ক্ষেত্রে ভাগক্রিয়াকে **অসম্পূর্ণ ভাগ** (inexact division) বলে।

ভাজ্যের অবশিষ্ট অংশ, যাহাকে ভাজক-দ্বারা ভাগ করা যায় না, তাহাকে **ভাগশেষ** (remainder) বলা হয়।

অতএব, যদি D ভাজ্য, d ভাজক, Q ভাগফল এবং R ভাগশেষ হয়, তাহা হইলে

$$D=d\times Q+R.$$

∴ উভয় পক্ষ d দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$D\div d=Q+\frac{R}{d},$$

অর্থাৎ সম্পূর্ণ ভাগফলটি, আংশিক ভাগফল Q এবং ভগ্নাংশ $\frac{R}{d}$ এর সমষ্টি হইবে।

উদা 1. $6x^2+7x+5$ কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ কর।

এখানে রাশি দুইটি x এর অধঃক্রম অনুসারে সাজান রহিয়াছে।

$$\begin{array}{r|l|l} 2x+1 & 6x^2+7x+5 & 3x+2 \\ & \underline{6x^2+3x} & \\ & \quad\;\; 4x+5 & \\ & \quad\;\; \underline{4x+2} & \\ & \qquad\quad 3 & \end{array}$$

এ স্থলে শেষের ভাগশেষটি 3 এবং ইহাকে $2x+1$ দ্বারা আর ভাগ করা যায় না।

সুতরাং আংশিক ভাগফল $3x+2$ এবং ভাগশেষ 3 ;

$\therefore$ সম্পূর্ণ ভাগফল $=(3x+2)+\dfrac{3}{2x+1}$.

দ্রষ্টব্য 1. স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, ভাগক্রিয়াটিকে শেষ না করিয়া অগ্রসর হইলে, $\dfrac{3}{2x}$ ভগ্নাংশটিকে ভাগফলের পরবর্তী পদ ধরিতে হইবে। এইরূপে অগ্রসর হইলে ভাগক্রিয়া কখনও শেষ হইবে না; সুতরাং ভাগশেষ ভাজক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানের (of lower order) হইলেই আর অগ্রসর হওয়া চলিবে না।

দ্রষ্টব্য 2. যদি রাশিমালাটি x এর ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজান হয়, তাহা হইলেও ভাগক্রিয়াটি শেষ হইবে না। যথা,

$$\begin{array}{l} 1+2x\,)\,5+7x+6x^2\,(\,5-3x+12x^2+\cdots \\ \qquad\quad\;\; 5+10x \\ \qquad\quad\;\; \overline{-3x+6x^2} \\ \qquad\quad\;\; -3x-6x^2 \\ \qquad\qquad\quad \overline{12x^2} \\ \qquad\qquad\quad 12x^2+24x^3 \\ \qquad\qquad\qquad \overline{-24x^3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdots \end{array}$$

ভাগফলটিতে অসংখ্য পদ পাওয়া যাইবে এবং প্রক্রিয়াটি কখনও শেষ হইবে না। এইরূপ ক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্টসংখ্যক পদ পর্যন্ত ভাগ করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য 3. যদিও উভয় ক্ষেত্রে ভাজ্য এবং ভাজক একই ধরা হইয়াছে, তথাপি আংশিক ভাগফল দুইটি এক হয় নাই। কারণ উহাদের কোনটিই সম্পূর্ণ ভাগফল নহে। সম্পূর্ণ ভাগফল যথাক্রমে $3x+2+\dfrac{3}{2x+1}$ এবং $5-3x+\dfrac{12x^2}{1+2x}$; ইহাদের প্রত্যেকটি $\dfrac{6x^2+7x+5}{1+2x}$ এর সমান।

উদা 2. $1+x$ কে $1-x$ দ্বারা চারটি পদ পর্যন্ত ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} 1-x\,)\,1+x\,(\,1+2x+2x^2+2x^3+\cdots \\ \quad\quad\;\; \underline{1-x} \\ \quad\quad\quad 2x \\ \quad\quad\quad \underline{2x-2x^2} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 2x^2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \underline{2x^2-2x^3} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x^3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{2x^3-2x^4} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x^4 \end{array}$$

আংশিক ভাগফল $=1+2x+2x^2+2x^3$ এবং ভাগশেষ $=2x^4$.

$\therefore$ সম্পূর্ণ ভাগফল $=1+2x+2x^2+2x^3+\dfrac{2x^4}{1-x}\cdot$

প্রশ্নমালা 37

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে, প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি-দ্বারা ভাগ কর, এবং উহাদের ভাগশেষ নির্ণয় কর :—

1. $2x^3+8x^2-3x-15, \quad x+4.$
2. $6x^4-x^3+3x^2+26x-5, \quad 2x^2-3x+5.$
3. $x^4-2x^3-12x^2+16x+22, \quad x^2-x-12.$

ভাগ কর এবং সম্পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর :—

4. $2x^4+7x^3+12x^2+8x+4$ কে x^2+3x+1 দ্বারা।
5. x^4+x^2-x+3 কে $x+7$ দ্বারা।

ভাগ কর (ভাগফলের চারটি পদ পর্যন্ত) :

6. $1+2x$ কে $1-3x$ দ্বারা। 7. 1 কে $1-x$ দ্বারা।
8. $1+x+x^2$ কে $1+x$ দ্বারা। 9. $1+2a+3a^2$ কে $a-1$ দ্বারা।

10. ভাজক x^2-x+1, ভাগফল $x-3$ এবং ভাগশেষ $x+1$ হইলে ভাজ্য কত হইবে নির্ণয় কর।

11. ভাজ্য $x^3-20x+16$, ভাগফল $x+5$ এবং ভাগশেষ $2x+1$ হইলে, ভাজক কত হইবে নির্ণয় কর।

12. $x^3+2x^2+cx+18$ কে $x+3$ দ্বারা ভাগ কর। c এর মান কত হইলে ভাগশেষ কিছুই থাকিবে না ?

138. ভাগ-ঘটিত প্রশ্ন

উদা. একটি লেবুর মূল্য 6 পাই এবং একটি আপেলের মূল্য 8 পাই হইলে, 4 টি লেবুর পরিবর্তে কতগুলি আপেল পাওয়া যাইবে ?

মনে কর, 4 টি লেবুর পরিবর্তে প্রাপ্ত আপেলের সংখ্যা x.

4 টি লেবুর মূল্য $=4\times 6$ পাই

x টি আপেলের মূল্য $=8\times x$ পাই

প্রশ্নের সর্ত অনুসারে $8\times x=4\times 6$; ইহা হইতে $x=\frac{4\times 6}{8}=3$;

$\therefore$ 4 টি লেবুর পরিবর্তে 3 টি আপেল পাওয়া যাইবে।

প্রশ্নমালা 38

1. যদি $5x=75$ হয়, তাহা হইলে x এর মান কত ?

2. x এর মান কত হইলে $(a+b)x=a^2+2ab+b^2$ হইবে ?

3. যদি $3a^2x=12a^2$ হয়, তাহা হইলে x এর মান কত নির্ণয় কর।

4. $ax=a^3+a^2b$ হইলে, x এর মান কত ?

5. $P\equiv a^2+2ab+b^2$ এবং $Q\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $Px=Q$ হইলে, x এর মান কত হইবে, এবং $Px=-Q$ হইলেই বা x এর মান কত হইবে ?

6. একব্যক্তি 2 আনায় 3 টি করিয়া কতকগুলি কমলালেবু ক্রয় করিল এবং উহার এক-তৃতীয়াংশ কমলালেবু এক আনায় 2 টি করিয়া ক্রয় করিল। কমলালেবু-গুলি গড়ে কত করিয়া বিক্রয় করিলে, ঐ ব্যক্তি ক্রয়মূল্যের দ্বিগুণ টাকা পাইবে?

বিবিধ প্রশ্নমালা III

I

1. যোগ কর: $1-(1-\overline{1-x})$, $2x-(4-3x)$ এবং $3-(-4x+5)$.

2. y অপেক্ষা x যত বেশী তাহার চারগুণ হইতে x এবং y এর সমষ্টির তিনগুণ বিয়োগ কর।

3. $ax-by-cx+bx-cy+ax$ এই রাশিমালাকে একটি দ্বিপদ এবং একটি ত্রিপদ রাশিরূপে প্রকাশ কর।

4. $16x^2+2xy-5y^2$ কে $3x-5\{y-(x+2y)\}$ দ্বারা ভাগ কর।

5. কোন বিদ্যালয়ে, প্রথম শ্রেণীতে x জন, দ্বিতীয় শ্রেণীতে $2x-5$ জন এবং অন্যান্য শ্রেণীতে $x-14$ জন ছাত্র আছে। বিদ্যালয়ের মোট ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। ছাত্রসংখ্যা 197 হইলে x এর মান কত ?

II

1. সরল কর : $8a-[5\{4x-2(x-1)\}-4\{3x-2(x+1)\}+3a]$.

2. $8x^3-12x^2-11x+21$ এর সহিত কত যোগ করিলে, যোগফলটি $2x-3$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

3. একটি ঘোড়া এক সপ্তাহে $5x+7$ বুশেল (bushel) শস্য খাইতে পারে ; $3x-2$ সপ্তাহে ইহার কি পরিমাণ খাদ্যের প্রয়োজন হইবে ?

4. সাধারণ গুণন না করিয়া অন্য উপায়ে $x-2$, $2x+3$, $x+2$ এবং $2x-3$ এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

5. দুইটি রাশির গুণফল $\frac{1}{64}x^3-\frac{1}{27}y^3+\frac{1}{8}z^3+\frac{1}{8}xyz$ এবং তাহাদের একটি $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z$; অপরটি কত ?

III

1. $a=1$, $b=2$ এবং $c=3$ হইলে,

$$\frac{a^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{b^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{c^2}{(a-b)(b-c)}$$ এর মান কত ?

2. $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z$ এবং $y-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z$ এর সমষ্টির সহিত কত যোগ করিলে, যোগফল $x+y+z$ এর সমান হইবে ?

3. $P\equiv x^2-10x+24$, $Q\equiv x^2+12x-27$; $x=3$ হইলে, P^2-Q^2 এর মান কত হইবে ?

4. যদি $(x-2)(x+3)=x^2$ হয়, তাহা হইলে $(x-4)(x-3)$ এবং $(x+2)(x-1)$ এর মান কত হইবে, নির্ণয় কর।

5. $a+2b+3c=0$ হইলে, $\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}$ এর সংখ্যাত্মক (numerical) মান নির্ণয় কর।

IV

1. x এর মান কত হইলে, $(x+1)(x+2)$ রাশিটি $(x-3)(x+4)$ অপেক্ষা 16 অধিক হইবে ? প্রমাণ কর যে, x এর এমন কোন মান হইতে পারে না যদ্দ্বারা $(x-1)(x+5)$ রাশিটি $(x-2)(x+6)$ অপেক্ষা 2 অধিক হইবে।

2. $\cdot 3 + x^2$ কে $\cdot 2 - x$ দ্বারা গুণ কর, এবং $x = 1\cdot 5$ হইলে, গুণফলটির মান নির্ণয় কর।

3. একজন ব্যবসায়ীকে $1 + x^2 + x^4$ টি গাঁইটে $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ মন পাট চালান দিতে হইবে ; প্রত্যেক গাঁইটে সে কত মন পাট দিবে ?

4. কোন্ সংখ্যাকে $x^2 + x - 1$ দ্বারা ভাগ করিলে, $x^2 - 2x + 1$ ভাগফল এবং $x + 1$ ভাগশেষ হইবে ?

5. পরীক্ষা-দ্বারা পূর্ণ স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট এমন কতকগুলি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহাদের স্থানাঙ্কগুলির দ্বারা $2y = 3x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। প্রমাণ কর যে, উক্ত বিন্দুগুলি এবং মূলবিন্দুটি একই সরল রেখায় অবস্থিত।

V

1. সরল কর : $\frac{1}{4}(x - \frac{2}{3}y) + \frac{1}{3}(6y - 5z) + \frac{1}{8}(12z - 2x)$.

2. (1, 4), (4, 9) এবং (9, 3) বিন্দুগুলি একটি ত্রিভুজের শীর্ষ হইলে উহার পরিসীমা কত হইবে, নির্ণয় কর।

3. $3x^2 - 2x + 1$ এবং $2x^2 + 3x - 1$ এর গুণফলে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

4. নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয় সমাধান কর :

(i) $\frac{3}{5}x - 2 = \frac{2}{5}$. (ii) $\frac{x}{5} - \left(\frac{x}{3} - 7\right) = \frac{x}{4} - \left(\frac{x}{6} - 35\right)$.

5. একব্যক্তি কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে উত্তর দিকে 5 মাইল চলিয়া পরে দক্ষিণ দিকে 9 মাইল এবং তারপর পুনরায় উত্তর দিকে 7 মাইল চলিল। যাত্রা-স্থান হইতে সে এখন কতদূরে আছে ? চিত্র-দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

VI

1. $4x + 6y + 8z$ কে $2x + 3y + 4z$ দ্বারা ভাগ কর, এবং 468 কে 234 দ্বারা ভাগের সহিত ইহার কিরূপ সম্বন্ধ বুঝাইয়া দাও।

2. $(3x - 5y)(x - z) + z\{2x - z(3x - y) - y^2(x - z)\}$ রাশিটির বন্ধনী-গুলি অপসারণ কর। $x = 1$, $y = 0$ এবং $z = 2$ হইলে, ইহার মান কত হইবে, নির্ণয় কর।

3. $2x^4 - 6ax^3 + (4a^2 + ab - 2b^2)x^2 + 3ab^2x - a^2b^2$ কে $x^2 - (2a - b)x - ab$ দ্বারা ভাগ কর।

4. একটি কুকুর প্রতিদিন 24 ঘণ্টার মধ্যে x ঘণ্টা নিদ্রা যায়। যদি কুকুরটি যত সময় নিদ্রা যায় তাহা অপেক্ষা 6 ঘণ্টা অধিক সময় জাগরিত থাকে তাহা হইলে সে প্রতিদিন কত সময় নিদ্রিত থাকে, নির্ণয় কর।

VII

অনু. 110 এবং অনু. 128 এ গুণন এবং ভাগের সূচক-নিয়ম ধন, পূর্ণসংখ্যা-সম্বন্ধে প্রমাণিত হইয়াছে। 26-তম অধ্যায়ে যে-কোন সংখ্যা-(ধন, ঋণ, পূর্ণ বা ভগ্ন) সম্বন্ধে উক্ত নিয়ম আলোচিত হইবে। বর্তমানে ধরিয়া লওয়া যাইতে পারে যে, গুণন ও ভাগের উক্ত সূচক-নিয়ম ঋণ ও ভগ্ন সংখ্যা-সম্বন্ধেও প্রযোজ্য। যেমন, $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$; $x^{-\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{5}{6}}$ ইত্যাদি। সুতরাং ঋণ ও ভগ্ন ঘাতযুক্ত প্রতীক-সম্বলিত রাশিসমূহের গুণন ও ভাগ, ধন এবং পূর্ণ ঘাতযুক্ত রাশির গুণন ও ভাগের অনুরূপ প্রক্রিয়া-দ্বারাই সম্পন্ন হইতে পারে। এতদনুসারে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সমাধান কর।

গুণ কর :

1. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ ও $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$. 2. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ ও $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$.

3. $a^2-2a^{\frac{5}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}-a$ ও $a-2a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$.

4. $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$ ও $x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$.

5. $x+x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-1}$ ও $x^{-1}+x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{-1}$.

6. $1+2x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+x$ ও $1-2x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-x$.

ভাগ কর :

7. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

8. $x-8$ কে $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4$ দ্বারা।

9. $a^{-1}-b^{-\frac{2}{3}}-4b^{-\frac{1}{3}}-4$ কে $a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{3}}-2$ দ্বারা।

10. $m^{\frac{28}{11}}-n^{\frac{8}{11}}$ কে $m^{\frac{21}{11}}-m^{\frac{14}{11}}n^{\frac{2}{11}}+m^{\frac{7}{11}}n^{\frac{4}{11}}-n^{\frac{6}{11}}$ দ্বারা।

11. $2x^{-4}+x^{-2}y^{-3}-y^{-6}-x^{-2}+5y^{-3}-6$ কে $2x^{-2}-y^{-3}+3$ দ্বারা।

একাদশ অধ্যায়

সাধারণ সূত্র

139. ষষ্ঠ অধ্যায়ে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি আলোচিত হইয়াছে :—

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. অনু. 65.

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$. অনু. 67.

(3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. অনু. 69.

(4) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$. অনু. 71.

(5) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$= a^3+b^3+3ab(a+b)$. অনু. 73.

(6) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$= a^3-b^3-3ab(a-b)$. অনু. 74.

(7) $(a+b)(a^2-ab-b^2) = a^3+b^3$. অনু. 75.

(8) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$. অনু. 76.

বর্তমান অধ্যায়ে আরও কতকগুলি সাধারণ সূত্র আলোচিত হইবে।

140. **সূত্র $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.**

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$$
$$= (a+b)^2+c^2+2(a+b)c \qquad \text{অনু. 65.}$$
$$= a^2+2ab+b^2+c^2+2ac+2bc$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

উদা. 1. $2a-b+3c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2a-b+3c)^2 = (2a)^2+(-b)^2+(3c)^2+2(2a)(-b)$$
$$+2(2a)(3c)+2(-b)(3c)$$
$$= 4a^2+b^2+9c^2-4ab+12ac-6bc.$$

উদা. 2. সরল কর : $9x^2+4y^2+z^2-(3x-2y-z)^2$.

$$(3x-2y-z)^2=9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz\ ;$$

সুতরাং, $9x^2+4y^2+z^2-(3x-2y-z)^2$

$$=9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz$$
$$+12xy+6xz-4yz-(3x-2y-z)^2$$
$$=(3x-2y-z)^2+12xy+6xz-4yz-(3x-2y-z)^2$$
$$=12xy+6xz-4yz.$$

প্রশ্নমালা 39

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :—

1. $a+b-c$.
2. $3x-2y+z$.
3. $p+2q-r$.
4. $a^2+b^2+c^2$
5. $x+y+3$.
6. $a-b+2$.

সরল কর :

7. $p^2+4q^2+r^2-(p-2q+r)^2$.
8. $(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$.
9. $(a+2b-3)^2-2(2ab-3a-6b)$.
10. $(x-2y+z)^2-2(xz-2xy-2yz)$.
11. $(3x^2-y-z)^2-(9x^4+y^2+z^2)$.
12. $(x^2+y^2+z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)^2$.
13. $(3a+2b-5c)^2-(9a^2+4b^2+25c^2)$.
14. $(x^2+x-1)^2-2x(x^2-x-1)$.
15. $(x^3+y^3-z^3)^2-(x^6+y^6+z^6)$.

141. বহুপদের বর্গ

তিন বা তদধিক পদ-বিশিষ্ট কোন রাশিমালার বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, অনু. 65 এর সূত্রটিকে বার বার প্রয়োগ করিতে হয়। পরবর্তী উদাহরণ হইতে প্রক্রিয়াটি উপলব্ধ হইবে।

উদা. $a+b+c+d$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= \{(a+b+c)+d\}^2\\ &=(a+b+c)^2+d^2+2(a+b+c)d\\ &=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+d^2+2ad+2bd+2cd\\ &=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\end{aligned}$$

(পদগুলির ক্রম পরিবর্তন করিয়া)।

অতএব, কোন বহুপদ রাশির বর্গ নির্ণয় করিবার নিমিত্ত নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া যায় :

একটি বহুপদ রাশির বর্গ, উহার প্রত্যেক পদের বর্গের যোগফল এবং উহার প্রতি পদদ্বয়ের দ্বিগুণিত গুণফলের সমষ্টির সমান।

প্রশ্নমালা 40

বর্গ নির্ণয় কর :

1. $a-b+c-d$.
2. $2x-y+z+u$.
3. $3x-2y+z-1$.
4. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b$.

142. **সূত্র** $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

$$\text{দক্ষিণ পক্ষটি}=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+2ab)-\tfrac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)=\tfrac{1}{4}(4ab)=ab.$$

উদা. 1. $4xy$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$\begin{aligned}4xy &= (2x)(2y)\\ &=\left(\frac{2x+2y}{2}\right)^2-\left(\frac{2x-2y}{2}\right)^2\\ &=(x+y)^2-(x-y)^2.\end{aligned}$$

উদা. 2. $(x+3)(x+5)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$\begin{aligned}(x+3)(x+5) &= \left\{\frac{(x+3)+(x+5)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(x+3)-(x+5)}{2}\right\}^2\\ &=\left(\frac{2x+8}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{2}\right)^2=(x+4)^2-(-1)^2.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 41

দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :—

1. pq.
2. $a(a+2)$.
3. $(x+4)(x+6)$.
4. a^2b^2.
5. x.
6. $3x-2$.
7. x^3y^3.
8. $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{4})$.
9. $4a$.
10. a^2b.
11. $(x+2y)(x-2y)$.
12. $(a+3)(a-4)$.
13. $(a+1)(b-1)$.
14. $(x-7)(x+\frac{1}{7})$.
15. $(x+8)(x+4)$.

143. সূত্র $(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs$.

$$(px+q)(rx+s)=px(rx+s)+q(rx+s)$$
$$=prx^2+psx+qrx+qs$$
$$=prx^2+(ps+qr)x+qs.$$

উদা. 1. $(2x+3)(3x+5)$ গুণফলটি নির্ণয় কর।

$$(2x+3)(3x+5)=2.3x^2+(2.5+3.3)x+3.5$$
$$=6x^2+19x+15.$$

উদা. 2. $(4a-3)$ ও $(5a+7)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(4a-3)(5a+7)=4.5a^2+\{4.7+5.(-3)\}a+7.(-3)$$
$$=20a^2+13a-21.$$

প্রশ্নমালা 42

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

1. $(2x+1)(x+1)$.
2. $(3x-4)(2x+5)$.
3. $(x+1)(2x-7)$.
4. $(3p-5)(2p-3)$.
5. $(2-p)(p-6)$.
6. $(3-x)(2x-9)$.
7. $(x^2+1)(2x^2-1)$.
8. $(2a^2+1)(a^2-1)$.
9. $(x+2)(4x-3)$.
10. $(7x-5)(2x+\frac{1}{2})$.

11. $(\frac{1}{2}a+3)(\frac{1}{3}a-2)$.　　12. $(a^2-5)(2a^2+5)$.

13. $(3a^2+2)(2a^2-1)$.　　14. $(a^3+1)(2a^3-1)$.

15. $(3x^3-1)(4x^3-5)$.

144. সূত্র $(x+a)(x+b)(x+c)$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$$

যে হেতু, $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$; 　　অনু. 71.

$$\therefore (x+a)(x+b)(x+c)=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$$
$$=x^2(x+c)+(a+b)x(x+c)+ab(x+c)$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$$

এখানে পদগুলিকে x এর ঘাতসমূহের অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে।

উদা. 1. $(x+1)(x+2)(x+3)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+1)(x+2)(x+3)$$
$$=x^3+(1+2+3)x^2+(1.2+2.3+3.1)x+1.2.3$$
$$=x^2+6x^2+11x+6.$$

উদা. 2. $(x-a)(x-b)(x-c)$ গুণফলটি নির্ণয় কর।

উপরের সূত্রে a, b এবং c এর চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া,

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

মন্তব্য। উপরের সূত্রে x^2 এর সহগ a, b এবং c এর যোগফলের সমান, x এর সহগ a, b এবং c এর প্রত্যেক দুইটি রাশির গুণফলের সমষ্টির সমান এবং শেষ পদটি a, b এবং c এর গুণফলের সমান।

প্রশ্নমালা 43

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

1. $(x+3)(x+4)(x+2)$.　　2. $(x-1)(x+2)(x-5)$.

3. $(a-1)(a-3)(a-6)$.　　4. $(m-3)(m+2)(m-7)$.

5. $(x-1)(x+3)(x-7)$.　　6. $(x+2)(x-8)(x-3)$.

7. $(a-2)(a-4)(a-5)$.　　8. $(a-1)(a-2)(a-3)$.
9. $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$.　　10. $(p+2)(p-3)(p+5)$.

145. সূত্র $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

বাম পক্ষটি $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(bc+ca+ab)$
$=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-3abc$
$-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$ (গুণ করিয়া)
$=a^3+b^3+c^3-3abc$ (অবশিষ্ট পদগুলি অপসারণ করিয়া)।

উদা. $27x^3+8y^3+z^3-18xyz$ কে $9x^2+4y^2+z^2-6xy-2yz-3zx$ দ্বারা ভাগ কর।

$27x^3+8y^3+z^3-18xyz$
$=(3x)^3+(2y)^3+z^3-3(3x)(2y)z$
$=(3x+2y+z)(9x^2+4y^2+z^2-6xy-2yz-3zx)$;
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=3x+2y+z$.

প্রশ্নমালা 44

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

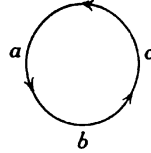
1. $(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$.
2. $(2a-3b+3c)(4a^2+9b^2+9c^2+6ab+9bc-6ac)$.
3. $(a+x-2)(a^2+x^2-ax+2a+2x+4)$.

ভাগ কর :

4. $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$ কে $x+2y-3z$ দ্বারা।
5. $8m^3-27n^3+64p^3+72mnp$ কে $4m^2+9n^2+16p^2+6mn+12np-8mp$ দ্বারা।

146. চক্র-ক্রম (Cyclic Order)

পূর্বপ্রতিষ্ঠিত গুণনের সূত্র-সাহায্যে কিরূপে কতকগুলি বিশেষ বিশেষ রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়, এবং কতকগুলি অভেদ প্রমাণ করা যায় তাহাই এক্ষণে প্রদর্শিত হইবে।

এরূপ ক্ষেত্রে রাশিমালাটিতে a, b, c তিনটি অক্ষর থাকে। অক্ষর তিনটিকে কোন বৃত্তের পরিধির পার্শ্বে নির্দিষ্টক্রমে পর পর লিখিয়া চক্রাকারে সাজান যায়। উহাদের যে-কোন একটি হইতে আরম্ভ করিয়া একই দিকে পড়িয়া গেলে যে ক্রম অনুসারে উহারা পঠিত হয় তাহাকে 'চক্র-ক্রম' বলে।

মনে কর, a, b, c তিনটি অক্ষরকে কোন বৃত্তের পরিধির পার্শ্বে a হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে (চিত্রে ইহা তীর-চিহ্নসমূহ-দ্বারা সূচিত হইয়াছে) পর পর লিখিত হইল। এক্ষণে অক্ষরত্রয়ের যে-কোন একটি হইতে আরম্ভ করিয়া পরিধির পার্শ্ব দিয়া তীর-চিহ্নিত দিকে অগ্রসর হইলে অক্ষরগুলিকে 'চক্র-ক্রমে' পাওয়া যাইবে। abc, bca, cab ইহাদের প্রত্যেকটি চক্র-ক্রম অনুসারে লিখিত হইয়াছে।

$b-c$, $c-a$, $a-b$ অন্তরসমূহেও a, b, c চক্র-ক্রমে লিখিত হইয়াছে; কিন্তু $a-b$, $a-c$, $b-c$ তে অক্ষরগুলি চক্র-ক্রমে নাই।

এইরূপ, bc, ca, ab এই গুণফলগুলিতে a, b, c চক্র-ক্রমে লিখিত হইয়াছে; কিন্তু bc, ac, ba তে অক্ষরগুলি এইরূপে লিখিত হয় নাই।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$

বন্ধনীগুলি অপসারণ করিলেই ফলটি স্পষ্ট হইবে।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$

$$\text{বাম পক্ষ} = ab-ac+bc-ab+ca-cb=0.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$
$$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

বন্ধনীগুলি অপসারণ করিলে দেখা যাইবে যে, রাশিমালা তিনটি একই পদ-বিশিষ্ট।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.$$

বন্ধনীগুলি অপসারণ করিলে দেখা যাইবে যে, রাশিমালা তিনটি একই পদ-বিশিষ্ট।

যদি কোন রাশিমালার যে-কোন একটি পদের অক্ষরসমূহকে চক্র-ক্রমে পরিবর্তন করিলে অন্য একটিকে পাওয়া যায়, তাহা হইলে রাশিমালাটিকে **প্রতিসম রাশিমালা** (symmetrical expression) বলে। উপরিলিখিত উদাহরণগুলির সমস্ত রাশিমালাই 'প্রতিসম'। উদাহরণস্বরূপ, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ রাশিমালাটির $a^2(b-c)$ পদটির a, b, c এর পরিবর্তে যথাক্রমে b, c, a লিখিলে, $b^2(c-a)$ পদটি পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 45

প্রমাণ কর যে,

1. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0.$
2. $3a(4x-5y)+4x(5y-3a)+5y(3a-4x)=0.$
3. $(a^2x^2-b^2y^2)+(b^2y^2-c^2z^2)+(c^2z^2-a^2x^2)=0.$
4. $x^2(2y+3z)+4y^2(3z+x)+9z^2(x+2y)$
   $=x(4y^2+9z^2)+2y(9z^2+x^2)+3z(x^2+4y^2).$
5. $6pq(3p-2q)+2qr(2q-r)+3rp(r-3p)$
   $=3p(r^2-4q^2)+2q(9p^2-r^2)+r(4q^2-9p^2).$
6. $(x+a)(y-z)+(y+a)(z-x)+(z+a)(x-y)=0.$
7. $(x+y+1)(x-y)+(y+z+1)(y-z)$
   $+(z+x+1)(z-x)=0.$
8. $(px^2+q)(y^2-z^2)+(py^2+q)(z^2-x^2)$
   $+(pz^2+q)(x^2-y^2)=0.$

147. সূত্র $-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$

সাধারণ গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায়,

$$-(a-b)(b-c)(c-a)=-(-a^2b+a^2c-b^2c+b^2a-c^2a+c^2b)$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

সূত্রের দক্ষিণ পক্ষটি $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ অথবা $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$ এর সমান, ইহাও প্রমাণ করা যায়। [অনু. 146.]

উদা. 1. সরল কর :

$$(b^2-c^2)(a+x)+(c^2-a^2)(b+x)+(a^2-b^2)(c+x).$$

রাশিমালাটি $=(b^2-c^2)a+(b^2-c^2)x+(c^2-a^2)b+(c^2-a^2)x$
$+(a^2-b^2)c+(a^2-b^2)x$
$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$+x(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$
$=(a-b)(b-c)(c-a).$

উদা. 2. সরল কর : $(x^2+ax+a^2)(b^2-c^2)$
$+(x^2+bx+b^2)(c^2-a^2)+(x^2+cx+c^2)(a^2-b^2).$

রাশিমালাটি $=(b^2-c^2)x^2+a(b^2-c^2)x+a^2(b^2-c^2)$
$+(c^2-a^2)x^2+b(c^2-a^2)x$
$+b^2(c^2-a^2)+(a^2-b^2)x^2$
$+c(a^2-b^2)x+c^2(a^2-b^2)$
$=x^2(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$
$+x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$
$+a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$
$=x(b-c)(c-a)(a-b).$

148. সূত্র $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ $=(a+b)(b+c)(c+a).$

এই সূত্র সাধারণ গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা প্রমাণ করা যাইতে পারে। যদি $E=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$ হয়, তাহা হইলে,

$$E+2abc=(a+b)(b+c)(c+a).$$

উদা. প্রমাণ কর যে, $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$
$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$
$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$

উপরের সূত্রে, $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ লিখিলেই ফলটি পাওয়া যাইবে।

149. সূত্র $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$$=(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

গুণন-প্রক্রিয়া-দ্বারা অতি সহজেই উপরের সূত্র প্রমাণ করা যাইতে পারে। সূত্রটিকে নিম্নলিখিতরূপেও লেখা যায় :—

$$\mathrm{E}+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

উদা. প্রমাণ কর যে, $(x+1)^2(y+z+5)+(y+2)^2(z+x+4)$
$$+(z+3)^2(x+y+3)+3(x+1)(y+2)(z+3)$$
$$=(x+y+z+6)(xy+yz+zx+5x+4y+3z+11).$$
সূত্রটিতে $a=x+1$, $b=y+2$, $c=z+3$ লিখিলেই উক্ত ফল পাওয়া যায়।

150. সূত্র $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$$=(a+b)(b+c)(c+a).$$

যেহেতু, $\mathrm{E}+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$, অনু. 148.

এবং $\mathrm{E}+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$, অনু. 149.

$\therefore$ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)$
$$=(\mathrm{E}+3abc)-(\mathrm{E}+2abc)=abc.$$

উদা. প্রমাণ কর যে,
$$(2y+z)(y^2+2yz-1)-2y(y+z+1)(y+z-1)=z(y^2-1).$$

মনে কর, $a=y+1$, $b=y-1$, $c=z$;

সুতরাং, $a+b+c=2y+z$, $ab+bc+ca=y^2+2yz-1$,
$$abc=z(y^2-1),\quad a+b=2y,$$
$$b+c=y+z-1,\quad c+a=y+z+1.$$
উপরের সূত্রে, a, b, c এর পরিবর্তে উপরিলিখিত মানগুলি লিখিলেই ফলটি পাওয়া যায়।

151. সূত্র $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&= a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\\
&\qquad +2(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&= a^3+b^3+c^3+\mathrm{E}+2(\mathrm{E}+3abc) \qquad \text{অনু. 149.}\\
&= a^3+b^3+c^3+3(\mathrm{E}+2abc)\\
&= a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b). \qquad \text{অনু. 148.}
\end{aligned}
$$

উদা. প্রমাণ কর যে,

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)=0.$$

মনে কর, $y-z=a,\ z-x=b,\ x-y=c$;

তাহা হইলে, রাশিমালাটি $=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=(a+b+c)^3$

$=(y-z+z-x+x-y)^3=0.$

152. সূত্র $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4).$

বাম পক্ষ

$$
\begin{aligned}
&= \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c-(a-b)\}\{c+(a-b)\}\\
&= (a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab) \qquad \text{অনু. 69.}\\
&= \{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}\\
&= 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\
&= 4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)\\
&= 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4).
\end{aligned}
$$

উদা. সরল কর: $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4$

$-2(z-x)^2(x-y)^2-2(x-y)^2(y-z)^2-2(y-z)^2(z-x)^2.$

মনে কর, $y-z=a,\ z-x=b,\ x-y=c$; তাহা হইলে, $a+b+c=0.$

$\therefore$ রাশিমালাটি $= a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

$= -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$= 0 \quad [\because \; a+b+c=0].$

153. সূত্র $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

দক্ষিণ পক্ষ

$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$= \frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\}$

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$

উদা. প্রমাণ কর যে, $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2$
$-(y+z-x)(z+x-y)-(z+x-y)(x+y-z)-(x+y-z)$
$(y+z-x)=4(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$

মনে কর, $a=y+z-x,\; b=z+x-y,\; c=x+y-z$;

তাহা হইলে, বাম পক্ষ

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$= \frac{1}{2}\{4(y-z)^2+4(z-x)^2+4(x-y)^2\}$

$[\because \; b-c=2(z-y)$ ইত্যাদি।$]$

$= 4.\frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$

$= 4(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$

প্রশ্নমালা 46

প্রমাণ কর যে,

1. $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$

2. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0.$

3. যদি $a=y+z-x,\; b=z+x-y,\; c=x+y-z$ হয়, তাহা হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc=4(x^3+y^3+z^3-3xyz).$

4. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4.$

5. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2).$$

6. $(ap+bq+cr)(ap+bq-cr)(bq+cr-ap)(cr+ap-bq)$
$$=2(a^2p^2b^2q^2+b^2q^2c^2r^2+c^2r^2a^2p^2)-(a^4p^4+b^4q^4+c^4r^4).$$

7. $(x+y-z)(xy-yz-zx)=(x+y)(y-z)(x-z)-xyz.$

8. $x^2(y+z)+y^2(z-x)-z^2(x-y)$
$$=2xyz-(y+z)(z-x)(x-y).$$

9. $(x^2+a^2-ax)(b^2-c^2)+(x^2+b^2-bx)(c^2-a^2)$
$$+(x^2+c^2-cx)(a^2-b^2)=-(b-c)(c-a)(a-b)x.$$

10. $(yz+zx-xy)(x-y)+(zx+xy-yz)(y-z)$
$$+(xy+yz-zx)(z-x)=2(y-z)(z-x)(x-y).$$

11. $a(a+1)(a+2)(a+3)=(a^2+3a+1)^2-1.$

12. $(x+y)^3-(x-y)^3-8y^3=3(x+y)^2(x-y)-3(x-y)^2(x+y)$

13. $(x+y)(x-y)^3=x^3(x-2y)-y^3(y-2x).$

14. $(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$
$$+(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0.$$

15. $(a+1)^2+(b-1)^2+(a+b)^2=2(a+1)(a+b)$
$$+2(b-1)(a+b)-2(a+1)(b-1).$$

16. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)$
$$-(a-b)(b-c)=\tfrac{1}{2}\{(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2\}.$$

17. $2(x^4+y^4+z^4)+(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$
$$=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

18. $(a+b+c)^3=(a+1)^3+(b-1)^3+c^3$
$$+3(b+c-1)(c+a+1)(a+b).$$

19. $(a+b+1)(b+c)(c+a-1)+a(b+1)(c-1)$
$$=(a+b+c)\{a(b+1)+(b+1)(c-1)+a(c-1)\}.$$

20. $\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$
$$-(b-1)(c-1)-(c-1)(a-1)-(a-1)(b-1).$$

দ্বাদশ অধ্যায়

সরল গুণনীয়ক (Factor) এবং অভেদ (Identity)

154. কোন রাশি দুই বা তদধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে, শেষোক্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির এক একটি **গুণনীয়ক** বা **উৎপাদক** বলে। 'গুণনীয়ক-নির্ণয়' (factorization) বীজগণিতের একটি অতি প্রয়োজনীয় প্রক্রিয়া।

155. পর্যবেক্ষণ-দ্বারা গুণনীয়ক-নির্ণয়

কোন রাশিমালার বিভিন্ন পদগুলিতে একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে, সেই রাশি সমস্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক হইবে। গুণনীয়কটি একপদ (monomial) কিংবা বহুপদ (polynomial) হইতে পারে।

উদা. 1. $abx - cxy$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে উভয় পদের ভিতর x বর্তমান রহিয়াছে; সুতরাং রাশিমালাটি $= x(ab - cy)$. x এবং $ab - cy$ রাশিমালাটির দুইটি গুণনীয়ক।

উদা. 2. $pq^2x + abq^2 - mq^2n$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$\text{রাশিমালাটি} = q^2(px + ab - mn).$$

উদা. 3. $a^2(b+c) + b^2(b+c) + c^2(b+c)$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$b+c$ রাশিটি সমস্ত পদের ভিতর বর্তমান রহিয়াছে;

$$\text{সুতরাং, রাশিমালাটি} = (b+c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

প্রশ্নমালা 47

গুণনীয়ক নির্ণয় কর:

1. $am - bm$. 2. $x^2y + xy^2$. 3. $pqr - pq^2s$.

4. $a^2xy + ax^2y - axy^2$. 5. $2m^3n^2 - 4m^2n^2 + 6m^2n^3$.

6. $a^2(x+y)+b^2(x+y)+c^2(x+y)$.

7. $p^2(2a+3c)+3a(2a+3c)+2b(2a+3c)$.

8. $(a^2-bc)x^2+(a^2-bc)y^2-(a^2-bc)z^2$.

9. $a^3(x-y)+b^3(x-y)+2xy(x-y)$.

10. $a^2p-a^2q+abp-abq+b^2p-b^2q$.

সরল কর :

11. $x(a+b-c)+x(a-b+c)+x(b+c-a)$.

12. $abc(y-z)+abc(z-x)+abc(x-y)$.

13. $x^2(b^2+c^2)+x^2(c^2+a^2)+x^2(a^2+b^2)$.

156. সূত্র $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ এর সাহায্যে গুণনীয়ক-নির্ণয়

কোন রাশিমালার পরস্পর সমান দুইটি দ্বিপদ গুণনীয়ক থাকিলে, সেই গুণনীয়কদ্বয় উপরি উক্ত সূত্র দুইটির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $4a^2+12ab+9b^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2$

$$=(2a+3b)^2.$$

উদা. 2. $9x^2-30xy+25y^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2$

$$=(3x-5y)^2.$$

প্রশ্নমালা 48

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. a^2+2a+1.
2. $x^2-100x+2500$.
3. m^2-4m+4.
4. $16p^2-24pq+9q^2$.
5. $25a^2+70ab+49b^2$.
6. $16m^2-40m+25$.
7. $49x^2-2100x+22500$.

157. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্রের সাহায্যে গুণনীয়ক-নির্ণয়

$$a^2-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=(a+b)(a-b).$$

উদা. $25x^2-9y^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=(5x)^2-(3y)^2=(5x+3y)(5x-3y)$.

প্রশ্নমালা 49

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. $4a^2-9b^2$. 2. p^2-1. 3. m^4-1.
4. $a^2b^2-x^2y^2$. 5. $25-x^2$. 6. $81-9z^2$.
7. $625x^2-y^2$. 8. $36a^3-64ax^2$. 9. $54x^3-150xy^2$.
10. $18p^6q-2p^2q^5$. 11. $(a+2)^2-(a+1)^2$.
12. $(3a-2)^2-(2a-1)^2$. 13. $(4x-7)^2-(3x+5)^2$.
14. $(b+c)^2-(b-c)^2$. 15. $(x+2y+3z)^2-(x-2y+3z)^2$.

158. a^2-b^2 আকারে পরিবর্তনীয় রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়

a^2-b^2 এর আকারে রূপান্তরিত করিয়া অনেক রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $4a^4+3a^2+1$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=4a^4+4a^2+1-a^2$

$=(2a^2+1)^2-a^2$ [ইহার আকার a^2-b^2 এর ন্যায়।]

$=(2a^2+a+1)(2a^2-a+1)$.

উদা. 2. $9a^2-b^2-4bc-4c^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=9a^2-(b^2+4bc+4c^2)$

$=9a^2-(b+2c)^2$

$=\{3a+(b+2c)\}\{3a-(b+2c)\}$

$=(3a+b+2c)(3a-b-2c)$.

উদা. 3. $a^4+b^4-14a^2b^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=a^4+2a^2b^2+b^4-16a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(4ab)^2$

$=(a^2+4ab+b^2)(a^2-4ab+b^2).$

উদা. 4. x^4+4y^4 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2).$

উদা. 5. $a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=(a^2+c^2-2ac)-(b^2+d^2+2bd)$

$=(a-c)^2-(b+d)^2$

$=(a+b-c+d)(a-b-c-d).$

উদা. 6. $x^2+12yz-4y^2-9z^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=x^2-(4y^2+9z^2-12yz)$

$=x^2-(2y-3z)^2$

$=(x+2y-3z)(x-2y+3z).$

প্রশ্নমালা 50

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. $a^4+a^2+1.$
2. $a^4-7a^2+1.$
3. $a^4+4b^4.$
4. $x^4+64.$
5. $49x^4-44x^2y^4+4y^8.$
6. $64a^4+1.$
7. $9a^4-3a^2+1.$
8. $x^4-41x^2+16.$
9. $4m^4-21m^2n^2+n^4.$
10. $9p^4-52p^2+4.$
11. $x^4+x^2y^2+y^4.$
12. $x^8+x^4y^4+y^8.$
13. $16a^4-49a^2b^2+9b^4$
14. $256x^4+2500y^4.$
15. $9m^4-51m^2+25$
16. $16x^4-60x^2+9.$

17. $4a^4-48a^2x^2+9x^4$.
18. $36x^4-112x^2a^2+a^4$.
19. $a^2-b^2-c^2-2bc$.
20. $b^2+4c^2-a^2+4bc$.
21. $9a^2-16b^2+c^2+6ac$.
22. $4x^2+y^2-9z^2+4xy$.
23. $p^2+9q^2-81r^2-6pq$.
24. $x^2-4xy+4y^2-1$.
25. $1-m^2+6mn-9n^2$.
26. $4y^2-9z^2-4xy-6xz$.
27. $2ab-2ac+b^2-c^2$.
28. $a^2+b^2-x^2-y^2+2ab+2xy$.
29. $12(ab-mn)+4(m^2-b^2)+9(n^2-a^2)$.
30. $4(x^2-1)+20xy+25y^2-9a^2-12a$.
31. $2(xy+az)+x^2+y^2-z^2-a^2$.
32. $60(ax+by)+4(25a^2-9b^2)+9x^2-25y^2$.

159. x^2+px+q আকার-বিশিষ্ট রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়

যদি ঐ রাশিমালার $x+a$ এবং $x+b$ দুইটি গুণনীয়ক হয়, তাহা হইলে ইহাদের গুণফল x^2+px+q এর সমান হইবে।

কিন্তু $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

সুতরাং, $a+b=p$ এবং $ab=q$.

অতএব দেখা যাইতেছে যে, x^2+px+q এর গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইলে, এমন দুইটি রাশি a এবং b নির্ণয় করিতে হয় যাহাদের সমষ্টি p, এবং গুণফল q হয়।

উদা. 1. $x^2+9x+20$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের যোগফল 9 এবং গুণফল 20 হয়। 2, 10, 4, 5; 20, 1 ইহাদের প্রত্যেক সংখ্যাদ্বয় 20 এর গুণনীয়ক; ইহাদের মধ্যে শুধু 4 এবং 5 সংখ্যা দুইটির যোগফল 9; সুতরাং, নির্ণেয় গুণনীয়ক দুইটি $x+4$ এবং $x+5$.

4 এবং 5 গুণনীয়ক দুইটি মনে মনে নির্ণয় করিয়া অনেক সময়ে নিম্নলিখিতরূপে উক্ত প্রক্রিয়া প্রকাশ করা হয় :—

$$\begin{aligned}x^2+9x+20&=x^2+5x+4x+20\\&=x(x+5)+4(x+5)\\&=(x+5)(x+4).\end{aligned}$$

উদা. 2. x^2-x-20 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে -20 এর এরূপ দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি -1 হয়। $1, -20$; $-1, 20$; $2, -10$; $-2, 10$; $4, -5$; $-4, 5$ এইগুলি -20 এর গুণনীয়ক। ইহাদের ভিতর শুধু 4 এবং -5 এর যোগফল -1. সুতরাং, নির্ণেয় গুণনীয়ক দুইটি $x+4$ এবং $x-5$.

নিম্নলিখিতরূপে প্রক্রিয়াটি প্রকাশ করা যায় :—

$$\begin{aligned} x^2-x-20 &= x^2-5x+4x-20 \\ &= x(x-5)+4(x-5) \\ &= (x-5)(x+4). \end{aligned}$$

উদা. 3. $x^2-9x+20$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

20 এর গুণনীয়কগুলির ভিতর শুধু -4 এবং -5 এর যোগফল -9;

সুতরাং,
$$\begin{aligned} x^2-9x+20 &= x^2-5x-4x+20 \\ &= x(x-5)-4(x-5) \\ &= (x-5)(x-4). \end{aligned}$$

উদা. 4. $x^2+xy-20y^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে গুণনীয়ক দুইটি $(x+ay)(x+by)$ আকার-বিশিষ্ট হইবে। উক্ত গুণনীয়ক দুইটির a এবং b এরূপ হইবে যে $a+b=1$ এবং $ab=-20$ হয়। 5 এবং -4 ইহাদের উপযুক্ত মান।

সুতরাং,
$$\begin{aligned} x^2+xy-20y^2 &= x^2+5xy-4xy-20y^2 \\ &= x(x+5y)-4y(x+5y) \\ &= (x+5y)(x-4y). \end{aligned}$$

উদা. 5. $(x+2y)^2-12(x+2y)+20$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$x+2y$ এর স্থানে a লিখিলে, রাশিমালাটি x^2+px+q আকার প্রাপ্ত হয়; কারণ, তখন রাশিমালাটি $=a^2-12a+20$.

সুতরাং, $(x+2y)^2-12(x+2y)+20$

$$\begin{aligned} &= a^2-12a+20 \quad [x+2y \text{ এর স্থানে } a \text{ লিখিয়া}] \\ &= a^2-10a-2a+20 \\ &= a(a-10)-2(a-10) \\ &= (a-10)(a-2) \\ &= (x+2y-10)(x+2y-2); \text{ কারণ } a=x+2y. \end{aligned}$$

উদা. 6. $(3x-y)^2+8(3x-y)(2x+y)-20(2x+y)^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $3x-y=a$ এবং $2x+y=b$; তাহা হইলে

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= a^2+8ab-20b^2\\ &= a^2+10ab-2ab-20b^2\\ &= a(a+10b)-2b(a+10b)\\ &= (a+10b)(a-2b)\\ &= (3x-y+20x+10y)(3x-y-4x-2y)\\ &= (23x+9y)(-x-3y)\\ &= -(x+3y)(23x+9y).\end{aligned}$$

160. px^2+qx+r আকার-বিশিষ্ট রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়

যদি রাশিমালাটির $ax+b$ এবং $cx+d$ দুইটি গুণনীয়ক হয়, তাহা হইলে

$$(ax+b)(cx+d)=px^2+qx+r,$$

অর্থাৎ $$acx^2+(bc+ad)x+bd=px^2+qx+r.$$

সুতরাং, $ac=p$, $bd=r$ এবং $bc+ad=q$. $ac=p$ এবং $bd=r$ হইলে, $pr=abcd=(bc)\times(ad)$. সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, p এবং r এর গুণফলকে এমন দুইটি অংশ bc এবং ad তে ভাগ করিতে হইবে যে, উহাদের যোগফল q হয়।

সুতরাং, px^2+qx+r এর গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে pr এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হয় যাহাদের যোগফল q হইবে, পরে অনু. 159 এর অনুরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিতে হয়।

উদা. 1. $2x^2+13x+20$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে $2\times20=40$; সুতরাং 40 এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের যোগফল 13 হয়। গুণনীয়কদ্বয় 5 এবং 8.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2x^2+13x+20 &= 2x^2+5x+8x+20\\ &= x(2x+5)+4(2x+5)\\ &= (2x+5)(x+4).\end{aligned}$$

উদা. 2. $6a^2+13ab-15b^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=6a^2+18ab-5ab-15b^2$
$=6a(a+3b)-5b(a+3b)$
$=(a+3b)(6a-5b).$

$$\begin{cases} 6\times(-15)=-90. \\ -90=18\times(-5). \\ 18+(-5)=13. \end{cases}$$

উদা. 3. $3(x+2y)^2+11(x+2y)(2x+y)-20(2x+y)^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $x+2y=a$ এবং $2x+y=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$=3a^2+11ab-20b^2$
$=3a^2+15ab-4ab-20b^2$
$=3a(a+5b)-4b(a+5b)$
$=(a+5b)(3a-4b)$
$=(x+2y+10x+5y)(3x+6y-8x-4y)$
$=(11x+7y)(-5x+2y).$

$$\begin{cases} 3\times(-20)=-60. \\ -60=15\times(-4). \\ 15+(-4)=11. \end{cases}$$

প্রশ্নমালা 51

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. $x^2+3x+2.$ 2. $x^2+5x+6.$ 3. $a^2+7a+12.$
4. $a^2+9a+20.$ 5. $x^2+x-2.$ 6. $x^2-5x+6.$
7. $x^2-7x+12.$ 8. $a^2+a-20.$ 9. $a^2-8a+15.$
10. $a^2+4a-21.$ 11. $x^2-3x-28.$ 12. $a^2-9a-10.$
13. $p^2-10p+16.$ 14. $m^2-3m-10.$ 15. $m^2+11m+24.$
16. $m^2-8m+12.$ 17. $x^2+2x-24.$ 18. $x^2-17x+70.$
19. $y^2-y-6.$ 20. $y^2-2y-63.$ 21. $a^2-15a+56.$
22. $a^2+14a+33.$ 23. $a^2+10a+9.$ 24. $a^2-2a-24.$
25. $p^2+13p+30.$ 26. $p^2+5p-14.$ 27. $n^2-10n-200.$
28. $n^2+12n+11.$ 29. $z^2-3z-108.$ 30. $z^2-28z-60.$

31. $2x^2+5x+2$. 32. $4x^2+8x+3$. 33. $6x^2+13x+6$.
34. $6x^2-7x+2$. 35. $12x^2+5x-2$. 36. $3x^2-x-4$.
37. $12x^2-16x-3$. 38. $28x^2-41x+15$. 39. $6x^2+41x+63$.
40. $8x^2+10x-63$. 41. $10x^2+101x+10$.
42. $5a^2+26a+5$. 43. $15a^2+34a+15$.
44. $14a^2-53a+14$. 45. $30a^2+23a-14$.
46. $12m^2+11m-56$. 47. $15m^2+41m+14$.
48. $15m^2-86m+120$. 49. $8p^2-6p-27$.
50. $21p^2+32p-5$. 51. $2a^2+3ab+b^2$.
52. $6a^2+13ab+6b^2$. 53. $12x^2+23xy+10y^2$.
54. $30x^2+77xy+12y^2$. 55. $6x^2+11xy-7y^2$.
56. $12m^2-25mn+12n^2$. 57. $2m^2-27mn+70n^2$.
58. $8a^2+2ax-21x^2$. 59. $12a^2-8ax-15x^2$.
60. $6a^2+17ax-45x^2$. 61. $4a^2-17ab-21b^2$.
62. $6m^2+11am-35a^2$. 63. $20a^2-43an+21n^2$.
64. $6p^2-17pq-10q^2$. 65. $7p^2+48pq-7q^2$.
66. $3b^2+8bc-35c^2$. 67. $6m^2-11mx+4x^2$.
68. $15x^2+28ax+12a^2$. 69. a^4+7a^2+12.
70. $12x^4-7x^2-10$. 71. $2a^6-a^3-10$.
72. $a^8+a^4x-6x^2$. 73. $2a^6-a^3x^2-6x^4$.
74. $2x^{10}+11x^5-21$. 75. $2a^6-a^3x^3-10x^6$.
76. $(2a-b)^2+14(2a-b)+40$.
77. $(3a-2x)^2-(3a-2x)-42$.
78. $(2x-1)^2-3(2x-1)-54$.
79. $6(x+2y)^2-11(x+2y)-35$.
80. $12(3x-4a)^2+25(3x-4a)-7$.
81. $(a+4b)^2+14(a+4b)(a-b)+45(a-b)^2$.
82. $(x-2y)^2-2(x-2y)(3x+y)-48(3x+y)^2$.
83. $6(3x-5y)^2+13(3x-5y)(2x-7y)+6(2x-7y)^2$.

161. দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়াও x^2+px+q, অথবা px^2+qx+r আকার-বিশিষ্ট রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. x^2-4x+3 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2-4x+4)-1$
$=(x-2)^2-(1)^2$
$=(x-2+1)(x-2-1)$
$=(x-1)(x-3).$

উদা. 2. x^2-5x+6 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

x^2-5x এর সহিত $(\frac{5}{2})^2$, অর্থাৎ x এর সহগের অর্ধেকের বর্গ যোগ করিলে একটি পূর্ণ বর্গ (perfect square) পাওয়া যাইবে।

সুতরাং রাশিমালাটি $=x^2-5x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+6$
$=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$
$=(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2})$
$=(x-2)(x-3).$

উদা. 3. $2x^2+5x-3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $=2(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2})$
$=2\{x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2-(\frac{5}{4})^2-\frac{3}{2}\}$
$=2\{(x+\frac{5}{4})^2-(\frac{7}{4})^2\}$
$=2(x+\frac{5}{4}+\frac{7}{4})(x+\frac{5}{4}-\frac{7}{4})$
$=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$
$=(x+3)\times 2(x-\frac{1}{2})=(x+3)(2x-1).$

প্রশ্নমালা 52

দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

1. $x^2+12x+35.$ 2. $x^2-6x-27.$ 3. $x^2-10x+21.$
4. $a^2-7a-18.$ 5. $a^2+a-42.$ 6. $a^2-3a-10.$
7. $a^2-9a-10.$ 8. $a^2-3a-40.$ 9. $a^2-5a-66.$
10. $m^2-2m-35.$ 11. $m^2-21m+20.$ 12. $m^2-12m+32.$

13. $p^2-12p+27$. 14. $p^2-4p-21$. 15. $p^2+3p-40$.
16. x^4-5x^2+6. 17. a^4-5a^2-14. 18. a^6+3a^3-4.
19. $x^2-3xy-10y^2$. 20. $x^2+4xy-21y^2$.
21. $x^2-xy-20y^2$. 22. $a^2+6ab+8b^2$.
23. $a^2-9ab+8b^2$. 24. $a^2-ab-30b^2$.
25. $m^2+2mn-15n^2$. 26. $m^2-8mn-20n^2$.
27. $m^2-10mn+24n^2$. 28. $6x^2+x-2$.
29. $12x^2+13x-4$. 30. $8x^2-2x-21$.
31. $15x^2-34x+15$. 32. $8x^2-34x+21$.
33. $6x^2-35x+50$. 34. $6a^2-ax-35x^2$.
35. $6a^2-23ax+15x^2$. 36. $2a^2-19ax+45x^2$.
37. $5m^2-28mn+32n^2$. 38. $4m^2-19mn-30n^2$.
39. $8x^4+2a^2x^2-15a^4$. 40. $12a^6+16a^3b^3-3b^6$.

162. সূত্র $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ এবং সূত্র $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ এর সাহায্যে গুণনীয়ক-নির্ণয়

a^3+b^3 এবং a^3-b^3 এর গুণনীয়ক নিম্নলিখিত উপায়ে নির্ণয় করা যায় :—

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$$
$$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

এবং; $$a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$$
$$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

কোন রাশিমালা দুইটি রাশির ঘনের যোগফল কিংবা বিয়োগফলের সমান হইলে, উপরের সূত্র-সাহায্যে উহার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $27a^3+x^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3a)^3+x^3$
$$=(3a+x)(9a^2-3ax+x^2).$$

উদা. 2. $x^6 - y^6$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি $= (x^2)^3 - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2 - x^2y^2\}$

$= (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2 - xy+y^2).$

প্রশ্নমালা 53

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

1. $p^3 - 64q^3$.
2. $27a^3 - (a+1)^3$.
3. $125x^6 - 1$.
4. $27a^9 + x^{12}$.
5. $x^6 - 64$.
6. $a^{12} - b^{12}$.
7. $xy^4 - yx^4$.
8. $343x^3 + 8$.
9. $(a^2 - 3b^2)^3 + 8a^3b^3$.
10. $(a^2 + 2b^2)^3 - 27a^3b^3$.

163. অভেদ (Identity)

কোন সমীকরণের প্রতীকগুলি যে-কোন মান-বিশিষ্ট হইলেও যদি ঐ সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকে, তাহা হইলে ঐ সমীকরণকে **অভেদ** বলে (অনু. 77). ষষ্ঠ, একাদশ এবং বর্তমান অধ্যায়ের সমস্ত সূত্রই অভেদ। এই অধ্যায়ে অভেদ-সম্বন্ধে কতকগুলি সরল উদাহরণ প্রদত্ত হইল; অষ্টাদশ অধ্যায়ে আরও কতকগুলি প্রদত্ত হইবে। অনেক সময়ে অভেদ '$\equiv$' এই চিহ্ন-দ্বারা সূচিত হয়।

164. ক্রমিক লঘুকরণ- (Reduction) এবং রূপান্তর- (Transformation) প্রক্রিয়া

নিয়ম 1. কোন অভেদের উভয় পক্ষে মিশ্ররাশি বিদ্যমান থাকিলে, উভয়কেই লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন করিতে হয়।

নিয়ম 2. এক পক্ষে অপেক্ষাকৃত জটিল মিশ্ররাশি থাকিলে, পূর্ববর্ণিত সূত্র- এবং রূপান্তর-প্রক্রিয়া-সাহায্যে এই জটিলতর পক্ষকেই অন্য পক্ষের আকারে পরিবর্তিত করিতে হয়।

দ্রষ্টব্য। প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে প্রথম নিয়মানুসারে কার্য করাই সুবিধাজনক।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,

$$(a-2b)^2+(3b-a)^2+2(a-2b)(3b-a)\equiv b^2.$$

বাম পক্ষ $=\{(a-2b)+(3b-a)\}^2$ ... অনু. 156.

$=(a-2b+3b-a)^2$

$=b^2.$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

বাম পক্ষ $=(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$

$=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$(a-b)^3+(a^2-b^2)(a+b)-2(a-b)(a^2+b^2)\equiv 0.$$

বাম পক্ষ $=(a-b)^3+(a-b)(a+b)(a+b)-2(a-b)(a^2+b^2)$

$=(a-b)\{(a-b)^2+(a+b)^2-2(a^2+b^2)\}$

$=(a-b)\{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2\}$

$=(a-b)\times 0=0.$

প্রশ্নমালা 54

প্রমাণ কর যে,

1. $a^2(x^2+2a^2)-2(a-b)(x^2+2a^2)-a(a-2)(x^2+2a^2)$
$\equiv 2b(x^2+2a^2).$

2. $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)\equiv 0.$

3. $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-2(a^2+b^2+c^2)$
$\equiv 2(ab+bc+ca).$

4. $(a+x)(a^2-ax+x^2)+(a-x)(a^2+ax+x^2)\equiv 2a^3.$

5. $(a+x)^2+(a^2-x^2)-2a(a+x)\equiv 0.$

6. $(2a-3m)^3-4a(2a-3m)^2+4a^2(2a-3m)\equiv 9m^2(2a-3m)$.

7. $(a+b)(a+c)-a^2\equiv(b+c)(b+a)-b^2\equiv(c+a)(c+b)-c^2$.

8. $(b+c)(b+c-a)+(c+a)(c+a-b)+(a+b)(a+b-c)$
$\equiv 2(a^2+b^2+c^2)$.

9. $(x+a)(x^2+a^2)(x^3+a^3)(x-a)^2$
$\equiv(x^2-a^2)(x^2+a^2-ax)(x^4-a^4)$.

10. $(x-2y)^2+3(y-x)(x-2y)+2(y-x)^2\equiv xy$.

11. $2(x-y)^2+(x^2-y^2)-(x+y)^2\equiv 2x(x-3y)$.

12. $(x+y)^3+(x-y)^3\equiv 2x\{(x+y)^2-(x^2-y^2)+(x-y)^2\}$.

13. $(a+b)^3-(a-b)^3\equiv 2b\{(a+b)^2+(a^2-b^2)+(a-b)^2\}$.

14. $(a+1)^3+(b-1)^3\equiv(a+b)\{(a+1)^2+(b-1)^2$
$-(a+1)(b-1)\}$.

15. $(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)-(a+b+c)^2$
$\equiv bc+ca+ab$.

16. $(a+b-c)(b+c)+(b+c-a)(c+a)+(c+a-b)(a+b)$
$\equiv 2(bc+ca+ab)$.

17. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$
$\equiv 2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$.

18. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$+(b-c)(c-a)(a-b)\equiv 0$.

19. $(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y)$
$+(x-y)^2(x+y+z)(x+y-z)\equiv 4xyz^2$.

20. $a(b-c)(1+bc)+b(c-a)(1+ca)+c(a-b)(1+ab)\equiv 0$.

21. $x(x+2y)^3-y(y+2x)^3\equiv(x+y)(x-y)^3$.

22. $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)$
$+(x-c)(x-a)(c-a)\equiv(a-b)(a-c)(b-c)$.

23. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
$\equiv(y+z)(z+x)(x+y)$.

165. সাপেক্ষ অভেদ (Conditional Identity)

যে সকল অভেদের উভয় পক্ষের সমতা অন্য এক বা একাধিক সর্তের উপর নির্ভর করে তাহাদিগকে **সাপেক্ষ অভেদ** বলে। মনে রাখিতে হইবে যে, কেবলমাত্র প্রদত্ত সর্ত সিদ্ধ হইলেই এই সকল অভেদ সত্য হয়, অন্যথা নহে।

উদা. 1. যদি $bx = ay$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) = (ax+by)^2.$$

এ স্থলে $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$ সর্বদা $(ax+by)^2$ এর সমান নহে; প্রতীকগুলির যে সকল মানের বেলায় $bx = ay$ হয়, মাত্র সেই সকল মানের বেলায়ই উহারা পরস্পর সমান হয়।

বাম পক্ষ $= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$

$= a^2x^2 + b^2y^2 + 2b^2x^2$ [যে হেতু, $b^2x^2 = a^2y^2$.]

$= a^2x^2 + b^2y^2 + 2bx.bx$

$= a^2x^2 + b^2y^2 + 2ay.bx$ [যে হেতু, $bx = ay$.]

$= a^2x^2 + b^2y^2 + 2ax.by = (ax+by)^2$.

উদা. 2. যদি $a+b+c = 0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc.$$

যে হেতু, $a+b+c=0$, $\therefore a+b = -c$,

উভয় পক্ষ ঘন করিয়া, $(a+b)^3 = -c^3$;

অথবা, $a^3+b^3+3ab(a+b) = -c^3$;

পক্ষান্তর করিয়া, $a^3+b^3+c^3 = -3ab(a+b)$

$= -3ab(-c) = 3abc$.

উদা. 3. যদি $ab+bc+ca = 0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2.$$

বাম পক্ষ $= (a+b+c)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$= a^2+b^2+c^2$.

প্রশ্নমালা 55

1. যদি $x+y=z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^2+y^2+z^2=2yz+2zx-2xy.$$

2. যদি $x+y+z=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y).$$

3. যদি $xy+x+y=x^2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(1+x)(1+y)=1+x^2.$$

4. $a-b=2c$ হইলে, দেখাও যে, $(b-c)^2=a^2-6ac+9c^2$.

5. $x+y=2$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3+6xy=8$.

6. যদি $x+z=2y$ এবং $zx=y^2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(x+y)(y+z)(z+x)=9y^3-xyz.$$

7. যদি $x+z=2y$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2(x-y)^3=2(y-z)^3.$$

8. $x=y$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$x^2+y^2+4z^2+2xy+8zx=4(x+z)^2.$$

9. যদি $xy+yz+zx=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $1+x^2=(x+y)(x+z),\quad 1+y^2=(y+z)(y+x)$
এবং $1+z^2=(z+x)(z+y)$;

(ii) $xyz(x+y)(y+z)(z+x)=(1-xy)(1-yz)(1-zx)$.

যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

10. $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab=-(ab+bc+ca)$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

11. $a(a+b)(a+c)=b(b+c)(b+a)=c(c+a)(c+b)=abc$.

12. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$.

13. $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$.

14. $a^2-b^2-c^2=2bc$, $b^2-c^2-a^2=2ca$ এবং $c^2-a^2-b^2=2ab$.

15. $a(b^2+c^2-a^2)=b(c^2+a^2-b^2)=c(a^2+b^2-c^2)=-2abc$.

16. $(a-b)(a-c)=2a^2+bc,$
$(b-c)(b-a)=2b^2+ca,$
$(c-a)(c-b)=2c^2+ab.$

17. $(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=0.$

18. $(a+b)^3+c^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2=0.$

19. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$

20. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-(a^3+b^3+c^3).$

21. $a^2(a^2-b^2-c^2)+b^2(b^2-c^2-a^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0.$

22. $a+b=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2=a^3+b^3+ab.$

23. $a+b+c+d=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(a+b)^3+(c+d)^3=0.$

24. $x^2+y^2=xy$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3=0.$

25. $a^2+b^2=ab-(a+b+1)$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+1)^3+(b+1)^3=0.$$

26. $a+b+c+d=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)=0.$$

27. প্রমাণ কর যে, $(2a-3b)(2a+3b)+(3b+4c)(3b-4c)$
$$+4(2c+a)(2c-a)=0.$$

28. $a+b-c=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+b)^3-c^3=(c+1)^2+c(a+b+c).$$

29. $a+b+c=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$a^3+(b+c)^3=(a-1)^2-a(b+c-a).$$

30. যদি $x^2+y^2=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2=1.$$

31. যদি $ab+bc+ca=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=-2abc(a+b+c)$;

(ii) $(b^2-ca)(c^2-ab)+(c^2-ab)(a^2-bc)$
$$+(a^2-bc)(b^2-ca)=0.$$

32. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
(i) $(y+z)(y-z)+x(x+2y)=0$,
(ii) $(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2+(x^2-y^2)^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^2$.

33. যদি a, b, c এইরূপ তিনটি পরস্পর অসমান রাশি হয় যে, $a-\frac{bc}{a}=b-\frac{ac}{b}$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

34. যদি $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ হয়, তাহা হইলে $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ কে a, b এবং c দ্বারা প্রকাশ কর।

35. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$
$$\equiv 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

36. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$
$$\equiv 2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

37. $x=b+c$, $y=c-a$ এবং $z=a-b$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2$.

38. $a+b=x$ এবং $a-b=y$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে x এবং y দ্বারা প্রকাশ কর :—

(i) a^2+b^2. (ii) a^3+b^3. (iii) a^2-b^2. (iv) ab.

39. যদি $a^2+b^2+c^2=1$ এবং $x^2+y^2+z^2=1$ হয়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2+(ax+by+cz)^2=1$.

যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

40. $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3$.

41. $2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)$
$$=2s^2-(a^2+b^2+c^2).$$

42. যদি $x=a+d$, $y=b+d$ এবং $z=c+d$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

ত্রয়োদশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (Highest Common Factor) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lowest Common Multiple)

166. দুই বা তদধিক রাশিকে আর একটি রাশি-দ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তবে শেষোক্ত রাশিকে প্রথমোক্ত রাশিগুলির **সাধারণ গুণনীয়ক** (common factor) বলে। যথা, ab, ax এবং a^2b এই তিনটি রাশির সাধারণ গুণনীয়ক a.

167. গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

দুই বা তদধিক রাশির যতগুলি সাধারণ গুণনীয়ক হইতে পারে, তন্মধ্যে সর্বোচ্চ মাত্রা-বিশিষ্টটিকে ঐ রাশিগুলির **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (highest common factor) বা সংক্ষেপে 'গ. সা. গু.' (H. C. F.) বলে।

যথা, a^2b^3, a^2b^4, a^4b^3 এবং a^3b^2 এই রাশিগুলির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক a^2b^2. a, b, a^2, b^2 এইগুলি উহাদের সাধারণ গুণনীয়ক। গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়কটির সংখ্যাত্মক মান (numerical value) অন্যান্য সাধারণ গুণনীয়কের মান অপেক্ষা বড় না হইতেও পারে। উদাহরণ-স্বরূপ বলা যাইতে পারে যে, যদি $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ হয়, তাহা হইলে $a^2b^2 < a$, অর্থাৎ গ. সা. গু.-টির সংখ্যাত্মক মান অন্য একটি সাধারণ গুণনীয়কের মান অপেক্ষা ছোট।

168. গুণনীয়ক-সাহায্যে গ. সা. গু.-নির্ণয়

দুই বা তদধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হয়; পরে ঐ গুণনীয়ক-সমূহের যেগুলি ঐ রাশিগুলির মধ্যে সাধারণ (common) তাহাদের গুণফল নির্ণয় করিতে হয়। ইহাই গ. সা. গু.-নির্ণয়ের সর্বাপেক্ষা সহজ উপায়।

মন্তব্য। যে সাধারণ গুণনীয়কটির অন্য কোন গুণনীয়ক থাকে না তাহাকে **মৌলিক গুণনীয়ক** (elementary factor) কহে।

উদা. 1. $2a^4b^3$, $4a^4b^5$, $6a^3b^4$ এবং $8a^5b^5$ রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2, a এবং b এই তিনটি মৌলিক গুণনীয়ক।

এই তিনটি রাশির সর্বোচ্চ ঘাত 2, a^3 এবং b^3 দ্বারা রাশিগুলির প্রত্যেকটি বিভাজ্য। সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2a^3b^3$.

উদা. 2. a^3+b^3, a^2-b^2 এবং $(a+b)^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$(a+b)^2=(a+b)(a+b).$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a+b$.

উদা. 3. $4x^2+8xy+3y^2$, $4x^2-9y^2$ এবং $2x^2+7xy+6y^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$4x^2+8xy+3y^2=(2x+3y)(2x+y),$$
$$4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y),$$
$$2x^2+7xy+6y^2=(2x+3y)(x+2y).$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2x+3y$.

প্রশ্নমালা 56

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. a^2, ab এবং a^3.
2. ax, a^2x^2 এবং a^3x^3.
3. m^2n, mn^2 এবং m^2n^2.
4. $12a^3x^3$, $16a^2x^5$ এবং $20a^4x^3$.
5. $108x^2y^3z^5$ এবং $72x^3y^2z^3$.
6. $24a^5b^3c^6d^2$ এবং $12a^2b^3c^3d^7$.
7. $40a^3m^2n^3x$, $32a^2m^3p^2y$ এবং $8a^2m^2n^3p^3$.
8. $18x^2y^3z^4p^5$, $27x^4y^4a^3p^2$ এবং $54x^3y^3a^3$.

9. $14a^3m^3n^4x^3$, $28m^2n^3x^2p^4$, $56n^2x^3p^3q^4$ এবং $84p^4q^5a^4m^2n^4x^4$.

10. $3x^2$ এবং $2x(x+y)$.

11. $x-y$ এবং x^2-y^2.

12. $2x(x+y)$ এবং $4(x+y)^2$.

13. p^2+q^2 এবং p^4-q^4.

14. $4mn(m^2-n^2)$ এবং $m^2n(m+n)$.

15. a^2+1 এবং a^6+1.

16. $3a(x^2+2)$ এবং $4ab(x^4-4)$.

17. $4(a^2-a+1)$ এবং $2(a^3+1)$.

18. $a^2b(a^4-b^4)$ এবং $ab^2(a^3-b^3)$.

19. $x^4+x^2y^2+y^4$ এবং x^3+y^3.

20. $x^2+2xy-3y^2$ এবং $x^2+xy-6y^2$.

21. $4x^3y^2(x^2-16y^2)$ এবং $12x^2y^3(x^3+64y^3)$.

22. $12a^3b^3(a^2+5ab-24b^2)$ এবং $27a^2b^2(a^2-ab-6b^2)$.

23. $m^3n^2(a^6+a^3b^3-2b^6)$ এবং $m^2n^3(a^4+a^2b^2+b^4)$.

24. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এবং $xyz(x+y+z)^2$.

25. $x^3-9x^2-9x+81$ এবং $x^3-3x^2-81x+243$.

26. $x^3+9x^2+26x+24$ এবং $x^3+12x^2+47x+60$.

27. $a^2+b^2-c^2+2ab$ এবং $a^2-b^2-c^2-2bc$.

28. $x(a+x)^2$, $x^2(a^2-x^2)$ এবং $x^3(a^3+x^3)$.

29. $xy(x^2-xy-2y^2)$, $y^2(x^2-4xy+4y^2)$ এবং $4xy(x^2-4y^2)$.

30. $x^2+7x+12$, x^2+6x+8, $x^2+12x+32$ এবং x^2-16.

31. $2(x^2-7x+12)$, $8(x^3-27)$ এবং $12(x^2+3x-18)$.

32. $4a^2b^2(a^2+7ab+10b^2)$, $8a^3b^2(a^2-25b^2)$ এবং $12a^2b^3(a^2+9ab+20b^2)$.

169. যে সকল মিশ্র রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ নহে, তাহাদের গ. সা. গু.

প্রদত্ত রাশিমালার এক বা তদধিকের গুণনীয়ক সহজে নির্ণয় করা সম্ভবপর না হইলে, বিশেষ কৌশল অবলম্বন করিয়া এক বা একাধিক সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদা. $x^2-2x-15$ এবং $x^3+6x^2+11x+6$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এ স্থলে $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$. স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, এই দুইটি গুণনীয়কের মধ্যে $x-5$ দ্বারা দ্বিতীয় রাশিটি বিভাজ্য নহে। অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের যদি কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকে তাহা অবশ্যই $x+3$ হইবে।

বস্তুত, $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$.

ইহা হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, $x+3$ ই একমাত্র সাধারণ গুণনীয়ক।

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+3$.

170. সাধারণ প্রক্রিয়া (The General Process)

প্রদত্ত রাশিমালাসমূহের গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ না হইলে, পাটীগণিতের গ. সা. গু.-নির্ণায়ক 'ভাগ'-প্রক্রিয়ার (division method) অনুরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিয়া উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়। এই প্রক্রিয়ার প্রয়োগ-বিধি অত্যন্ত সহজ, কিন্তু প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে ইহার প্রমাণ উপলব্ধি করা সহজ নহে। নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণসমূহ হইতে প্রক্রিয়াটির প্রয়োগ-সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা জন্মিবে।

এই প্রক্রিয়া গ. সা. গু.-র মিশ্রগুণনীয়ক-নির্ণয়ের পক্ষেই বিশেষ উপযোগী। প্রথমত প্রদত্ত রাশিমালা হইতে উহাদের একপদ গুণনীয়কগুলি অপসারিত করিতে হইবে; এই সকল একপদ গুণনীয়কের গ. সা. গু. এবং ভাগ-প্রক্রিয়া-দ্বারা নির্ণীত অবশিষ্ট অংশসমূহের গ. সা. গু.-র গুণফলই নির্ণেয় গ. সা. গু.

উদা. 1. $x^2+9x+14$ এবং $x^3+10x^2+24x+16$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

রাশিমালা দুইটিকে x এর ঘাতসমূহের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির দ্বারা ভাগ কর। যথা,

$$\begin{array}{r|l}
x^2+9x+14 & x^3+10x^2+24x+16\ (x+1 \\
 & \underline{x^3+\ \ 9x^2+14x} \\
 & \qquad\quad x^2+10x+16 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2+\ \ 9x+14} \\
 & \qquad\qquad\qquad x+2
\end{array}$$

এ স্থলে $x+1$ ভাগফল এবং $x+2$ ভাগশেষ।

অতঃপর, ভাজকটিকে এই ভাগশেষ $x+2$ দ্বারা ভাগ কর। যথা,

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x^2+9x+14 \; (x+7 \\ & \underline{x^2+2x} \\ & \quad 7x+14 \\ & \quad \underline{7x+14} \end{array}$$

সুতরাং, $x+2$ দ্বারা $x^2+9x+14$ রাশিটি বিভাজ্য। অতএব, $x+2$ এবং $x^2+9x+14$ এর গ. সা. গু $x+2$. পুনরায়, $x+2$, $x^2+9x+14$ এর গুণনীয়ক বলিয়া, $x^3+10x^2+24x+16$ এরও গুণনীয়ক হইবে; অতএব ইহাই নির্ণেয় গ. সা. গু. (অনু. 234 দ্রষ্টব্য।)

উদা. 2. $x^6+9x^3-20x^2$ এবং $5x^5+9x^4-64x$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\text{প্রথম রাশিমালা} = x^2(x^4+9x-20);$$
$$\text{দ্বিতীয় রাশিমালা} = x(5x^4+9x^3-64);$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. = (একপদ গুণনীয়কগুলির গ. সা. গু.) $\times$ ($x^4+9x-20$ এবং $5x^4+9x^3-64$ এর গ. সা. গু.).

$x^4+9x-20$ এবং $5x^4+9x^3-64$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার জন্য উভয় রাশিমালাকে x এর ঘাতসমূহের একই ক্রম অনুসারে সাজাইয়া দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির দ্বারা ভাগ করা হইল; যথা,

$$\begin{array}{r|l} x^4+9x-20 & 5x^4+9x^3 \qquad\quad -64 \; (5 \\ & \underline{5x^4 \qquad\quad +45x-100} \\ & \qquad 9x^3-45x+36 \end{array}$$

এ স্থলে ভাগশেষ $9x^3-45x+36=9(x^3-5x+4)$.

পরবর্তী ভাগ-ক্রিয়ায় যাহাতে ভগ্ন (fractional) সহগ না আসে, এই নিমিত্ত এই ভাগশেষ হইতে সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক 9 বাদ দিয়া প্রথম ভাজক $x^4+9x-20$ কে ভাগশেষের x^3-5x+4 অংশ-দ্বারা ভাগ করা হইল; যথা,

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x+4 & x^4 \qquad\quad +9x-20 \; (x \\ & \underline{x^4-5x^2+4x} \\ & \qquad 5x^2+5x-20 \end{array}$$

এ স্থলে পুনরায়, ভাগশেষ $5x^2+5x-20$ হইতে সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক 5

বাদ দিয়া x^2+x-4 কে নূতন ভাজক, এবং x^3-5x+4 কে ভাজ্য ধরিয়া ভাগ-ক্রিয়া সম্পন্ন করা হইল ; যথা,

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-4 & x^3 \qquad -5x+4 \;(x-1 \\ & x^3+x^2-4x \\ \hline & -x^2-\;x+4 \\ & -x^2-\;x+4 \\ \hline \end{array}$$

এই সময়ে কোন ভাগশেষ রহিল না ; সুতরাং, $5(x^2+x-4)$ এবং $9(x^3-5x+4)$ এর গ. সা. গু. x^2+x-4. অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x\times(x^2+x-4)=x^3+x^2-4x$; কারণ x^2 এবং x এর গ. সা. গু. x.

উদা. 3. $3x^3+17x^2-62x+14$ এবং $7x^3+52x^2-46x+8$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এ স্থলে উভয় রাশিমালায় x এর সর্বোচ্চ ঘাত x^3. অতএব, গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের যে-কোনটিকে অপরটির দ্বারা ভাগ করা যায়। কিন্তু এইরূপ ভাগের সময়ে ভগ্ন সহগ আসিতে পারে ; উহা যাহাতে না আসে তাহার জন্য দ্বিতীয় রাশিমালাকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে প্রথমটির দ্বারা ভাগ করা হইল ; যথা,

$$\begin{array}{r|l} & 7x^3+52x^2-46x+8 \\ & 3 \\ \hline 3x^3+17x^2-62x+14 & 21x^3+156x^2-138x+24\;(7 \\ & 21x^3+119x^2-434x+98 \\ \hline & \qquad\quad 37x^2+296x-74 \end{array}$$

ভাগশেষ $=37(x^2+8x-2)$.

সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক 37 বাদ দিয়া x^2+8x-2 কে নূতন ভাজক ধরিয়া $3x^3+17x^2-62x+14$ কে ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকিবে না। অতএব, x^2+8x-2 ই নির্ণেয় গ. সা. গু.

উদা. 4. $4x^3+13x^2-8x-3$ এবং $3x^4+13x^3+9x^2+9x+2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ভাগের সময়ে যাহাতে ভগ্নাংশ না আসে তাহার জন্য দ্বিতীয় রাশিমালাকে 4

দিয়া গুণ করা হইল, এবং লব্ধ গুণফলকে প্রথম রাশিমালা-দ্বারা ভাগ করা হইল, যথা,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^4+13x^3+9x^2+9x+2 \\
 & \underline{\quad 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
4x^3+13x^2-8x-3 & 12x^4+52x^3+36x^2+36x+8 \;(3x \\
 & \underline{12x^4+39x^3-24x^2-\;\;9x \qquad} \\
 & \qquad 13x^3+60x^2+45x+8 \\
 & \qquad \underline{\;4 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad 52x^3+240x^2+180x+32 \;(13 \\
 & \qquad \underline{52x^3+169x^2-104x-39} \\
 & \qquad\quad 71)\;\underline{71x^2+284x+71} \\
 & \qquad\qquad\quad x^2+4x+1
\end{array}
$$

[সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক 71 বাদ দিয়া]

ভাজকটিকে এই ভাগশেষ-দ্বারা ভাগ করা হইলে কোন ভাগশেষ থাকে না।

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^2+4x+1$.

171. উপরের প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিত-রূপে প্রকাশ করিলে স্থান-সংক্ষেপ হইতে পারে :—

উদা. $3x^4+3x^3-8x^2+5x-1$ এবং $6x^4-3x^3+2x^2-2x+1$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{l|r|r|l}
x & 3x^4+3x^3-\;\;8x^2+\;\;5x-1 & 6x^4-3x^3+\;\;2x^2-\;\;2x+1 & 2 \\
 & \underline{3x^4-6x^3+\;\;4x^2-\qquad x\;\;} & \underline{6x^4+6x^3-16x^2+10x-2} & \\
3 & 9x^3-12x^2+\;\;6x-1 & -3\;|\;-9x^3+18x^2-12x+3 & \\
 & \underline{9x^3-18x^2+12x-3} & 3x^3-\;\;6x^2+\;\;4x-1 & x \\
 & 2\;|\;\underline{6x^2-\;\;6x+2} & \underline{3x^3-\;\;3x^2+\qquad x\;\;} & \\
 & 3x^2-\;\;3x+1 & -\;\;3x^2+\;\;3x-1 & -1 \\
 & & \underline{-\;\;3x^2+\;\;3x-1} &
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 3x^2-3x+1$.

172. উপরি উক্ত প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা

উপরের উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, গ. সা. গু.-নির্ণয়কালে নিম্নলিখিত নিয়মানুসারে কার্য করিতে হইবে :—

1. রাশিমালাগুলিকে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষর- (x) এর ঘাত-সমূহের অধঃক্রম (বা ঊর্ধ্বক্রম) অনুসারে সাজাইতে হইবে।

2. উচ্চতর মানের (of higher degree) রাশিমালাটিকে অন্যটির দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। [উভয় রাশি সম মানের (of the same degree) হইলে, যে-কোনটিকে অন্যটির দ্বারা ভাগ করা যায়।]

3. পাটীগণিতের ন্যায়, এই ভাগ-ক্রিয়ার ভাগশেষটিকে নূতন ভাজক এবং প্রথম ভাজকটিকে ভাজ্যরূপে লইয়া দ্বিতীয় বার ভাগ করিতে হইবে। যে পর্যন্ত কোন ভাগশেষ না থাকে সে পর্যন্ত বার বার এইরূপে ভাগ করিতে হইবে। সর্বশেষের ভাজকটিই নির্ণেয় গ. সা. গু.

4. এই সকল ভাগের সময়ে যাহাতে ভগ্নাংশ না আসে তজ্জন্য ভাজ্য কিংবা ভাজককে এমন একটি সংখ্যা বা (একপদ) রাশি-দ্বারা গুণ বা ভাগ করিতে হইবে যাহা অন্যটির গুণনীয়ক নহে।

5. প্রদত্ত রাশিমালাগুলির কোন একপদ গুণনীয়ক থাকিলে, ইহা পরিত্যাগ করিয়া অবশিষ্ট অংশ লইয়া ঐরূপ কার্য করিতে হইবে।

173. তিন বা তদধিক রাশির গ. সা. গু.

দুইটির অধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহাদের যে-কোন দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া, পরে লব্ধ গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশিটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়। এইরূপে এক একটি রাশি লইয়া শেষ পর্যন্ত কার্য্য করিতে হয়।

উদা. x^2-3x+2, $2x^2-x-1$ এবং x^2+2x-3 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এ স্থলে প্রথম রাশিমালা $=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$;

দ্বিতীয় রাশিমালা $=2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$;

$\therefore$ প্রথম দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $=x-1$.

এক্ষণে তৃতীয় রাশিমালা $=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$;

$\therefore$ $x-1$ এবং x^2+2x-3 এর গ. সা. গু.-ও $x-1$; অতএব ইহাই তিনটি রাশিমালার নির্ণেয় গ. সা. গু.

প্রশ্নমালা 57

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $x^2-3x-10$ এবং x^2-4x-5.
2. $2x^2-8x-90$ এবং $x^2-6x-55$.
3. $3x^2+x-2$ এবং $3x^2+4x-4$.
4. $3x^2+5x-2$ এবং $3x^3+5x^2+x-1$.
5. $3x^2+16x-12$ এবং $3x^3+4x^2-28x+16$.
6. $1+x+x^3-x^5$ এবং $1-x^4-x^6+x^7$.
7. x^3-4x^2+4x এবং x^3+x^2-7x+2.
8. $2x^3-7x^2+4x+3$ এবং $2x^2-5x+3$.
9. x^3-3x-2 এবং x^3-4x^2+6x-4.
10. $2x^2-5ax+2a^2$ এবং $x^3+4ax^2-4a^2x-16a^3$.
11. x^3-x^2-3x-1 এবং x^3-5x-2.
12. x^3+2x^2-x-2 এবং x^3+x^2-4x-4.
13. $2x^3-x^2-x-3$ এবং $4x^3-17x+12$.
14. x^3+3x^2-9x+5 এবং $x^3-19x+30$.
15. $2x^3+5x^2+5x+3$ এবং $3x^4+5x^3+5x^2+2x$.
16. $12x^3+11ax^2+6a^2x+a^3$ এবং $21x^3+17ax^2+9a^2x+a^3$.
17. $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ এবং x^3-7x+6.
18. $x^4+8x^3+18x^2+11x+2$ এবং $x^4+9x^3+23x^2+13x+2$.
19. $2x^3-7x^2-46x-21$ এবং $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$.
20. $x^5+11x-12$ এবং x^5+11x^3+54.
21. x^5-x^3+8 এবং x^5-x^2+4.
22. $2x^3-9x^2+13x-6$, $6x^3-13x^2+4x+3$ এবং $12x^3-8x^2-13x-3$.
23. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ এবং $27x^3+27x^2+9x+1$.
24. $x^3-2ax^2-5a^2x+6a^3$, $x^3-2ax^2-4a^2x+8a^3$ এবং $2x^3+9ax^2+7a^2x-6a^3$.
25. $2a^3-2ab^2+a^2b-b^3$, $a^3-ab^2+2a^2b-2b^3$ এবং $a^3-ab^2-2a^2b+2b^3$.

174. সাধারণ গুণিতক (Common Multiple)

একটি রাশিকে দুই বা তদধিক রাশি-দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তবে প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশিগুলির **সাধারণ গুণিতক** বলে। যথা, $4a^3x^2y^3$ রাশিটি ax, a^2xy, x^2y^2 এবং $2a^3y$ রাশিগুলির প্রত্যেকটির দ্বারা বিভাজ্য; সুতরাং, $4a^3x^2y^3$ রাশিটি শেষোক্ত রাশিগুলির 'সাধারণ গুণিতক'।

175. লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lowest Common Multiple)

দুই বা তদধিক রাশির সাধারণ গুণিতকসমূহের মধ্যে যেটি লঘুতম-মাত্রা-বিশিষ্ট তাহাকে ঐ রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** বা সংক্ষেপে **ল. সা.** গু. (L. C. M.) বলে।

যথা, $2a^3x^2y^2$ রাশিটি ax, a^2xy, x^2y^2 এবং $2a^3y$ রাশিগুলির ল. সা. গু.

176. গুণনীয়ক-সাহায্যে ল. সা. গু.-নির্ণয়

যে সমস্ত রাশির গুণনীয়কগুলি সহজেই নির্ণীত হইতে পারে তাহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে রাশিসমূহে বর্তমান উহাদের মৌলিক গুণনীয়ক-গুলির (elementary factor) সর্বোচ্চ ঘাত এবং উহাদের সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক-গুলির ল. সা. গু.-র গুণফল নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 1. $2a^2bx$, $4ab^2c$, $6a^2c^2x$ এবং b^2cx^2 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

a, b, x এবং c উপরি লিখিত রাশিগুলির মৌলিক গুণনীয়ক, এবং রাশিগুলির মধ্যে উহাদের সর্বোচ্চ ঘাত যথাক্রমে a^2, b^2, x^2 ও c^2. 2, 4 ও 6 সংখ্যাত্মক গুণনীয়কগুলির ল. সা. গু. 12. সুতরাং, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 12a^2b^2c^2x^2$.

উদা. 2. $a-x$, $2(a^2-x^2)$, a^3+x^3 এবং $3(a-x)^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$a-x$, $a+x$ এবং a^2-ax+x^2 প্রদত্ত রাশিগুলির মৌলিক গুণনীয়ক,

এবং রাশিগুলির মধ্যে উহাদের সর্বোচ্চ ঘাত যথাক্রমে $(a-x)^2$, $a+x$ এবং a^2-ax+x^2. সংখ্যাত্মক গুণনীয়কগুলির ল. সা. গু. 6.

সুতরাং, নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$= 6(a+x)(a-x)^2(a^2-ax+x^2)$$
$$= 6(a^3+x^3)(a-x)^2.$$

প্রশ্নমালা 58

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. ab, bc, ca.
2. xy, x^2y^2, x^3y^3.
3. $2m^2n$, $3mn^2$, $4m^2n^2$.
4. $3x^3y^2$, $7x^2y^3$, $14x^2y^2$.
5. $6a^2b^2c$, $3ab^2c^2$, $10a^2bc^2$, $12abc$.
6. $2m^2npq$, $3xyp^2q^2$, $4mn^2x^2y$, $5mp^2qx$.
7. $4a^6x^3y^2$, $18b^3y^3z^2$, $20c^6x^3z^2$.
8. $3a^2b^2c^2d^2$, $9a^3b^3x^2y^2$, $10abx^3y^3$, $2c^3d^3xy$.
9. $8m^2n^2x^2y^2$, $4a^2b^2xy$, $12mna^2b^2$.
10. $5a^6b^8m^9n^{10}$, $20p^{16}q^{12}a^2b^3$, $15m^3n^4p^5q^8$.
11. $2(a-x)$, $3(a+x)$, $4(a^2-x^2)$.
12. $4a^2(a+2x)$, $3ax(a^2-4x^2)$, $8(a-2x)^2$.
13. $m+n$, $m-n$, m^2-n^2, m^3+n^3.
14. a^2-b^2, b^2-c^2, $ab+ac+bc+b^2$.
15. a^3+x^3, a^3-x^3, $a^4+a^2x^2+x^4$.
16. $4a^2b^2(b-c)^2$, $5b^2c^2(b^2-c^2)$, $6c^2a^2(b+c)^2$.
17. $3x(x-y)^3$, $7y(x^3-y^3)$, $21xy(x^2+xy+y^2)$.
18. $4mn(m-n)$, $5m^2n^2(m+n)$, $2(m^3+n^3)$.
19. $3a^2x(x^2-1)$, $2ax^2(x^3-1)$, $ax(x^4-1)$.
20. $x^2(a^2+a+1)$, $xy(a^2-a+1)$, $y^2(a^2-1)$.
21. $x+1$, x^2+3x+2, x^2+4x+3.
22. $x-1$, x^2-3x+2, x^2-4x+3.

23. $x^2+5x+6, \quad x^2+8x+15.$

24. $a^2-7a+6, \quad a^2-5a-6.$

25. $m^2-2m-3, \quad m^2-6m+5, \quad m^2-1.$

26. $x^2-4, \quad x^2+4x-12, \quad x^2-4x+4.$

27. $ax(a^2+3ax+2x^2), \quad a^2(a^2-x^2).$

28. $a^2(a^2-ax-2x^2), \quad ax(a^2-3ax+2x^2), \quad x^2(a^2-x^2).$

29. $x^2-4, \quad x^2-x-2, \quad x^2+x-2.$

30. $2x^2-x-1, \quad 2x^2+3x+1, \quad x^2-1.$

31. $a^2-b^2, \quad a^3-b^3, \quad a^4-b^4.$

32. $x^2+x-6, \quad x^2+2x-3, \quad x^2-3x+2.$

33. $x^2+xy+yz+zx, \quad y^2+xy+yz+zx, \quad z^2+xy+yz+zx.$

34. $a^2+b^2-c^2+2ab, \quad a^2-b^2+c^2+2ac.$

35. $x^2-x-6, \quad x^2+x-12, \quad x^2+6x+8.$

36. $8a^3-27b^3, \quad 3a^2-ab-2b^2, \quad 6a^2-5ab-6b^2.$

37. $27x^4+x, \quad 87x^2+8x-7, \quad 27x^3+27x^2+9x+1.$

38. $x^3+8a^3, \quad x^2-4a^2, \quad x^4-16a^4, \quad x^4+4a^2x^2+16a^4.$

177. যে সকল মিশ্র রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ নহে তাহাদের ল. সা. গু.

এইরূপ রাশিমালাসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে উহাদের গ. সা. গু. পূর্ববর্ণিত প্রক্রিয়ানুসারে নির্ণয় করিয়া, পরে ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়।

মনে কর, A এবং B দুইটি রাশিমালা এবং H উহাদের গ. সা. গু. তাহা হইলে, $A=aH$ এবং $B=bH$; এ স্থলে a এবং b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই।

A এবং B এর ল. সা. গু. $=abH$

$$=\frac{aH\times bH}{H}=\frac{A\times B}{H};$$

সুতরাং যদি A এবং B এর ল. সা. গু. L হয়, তাহা হইলে,

$$L = abH = \frac{A \times B}{H} \qquad \cdots (1)$$

অথবা $$L = \frac{A}{H} \times B = \frac{B}{H} \times A \qquad \cdots (2)$$

(1) এবং (2) এর উভয় পক্ষ H দ্বারা গুণ করিলে, নিম্নের সূত্রটি পাওয়া যায় :

$$LH = A \times B \qquad \cdots (3)$$

অর্থাৎ **যে-কোনও দুই রাশির গুণফল, উহাদের ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু.-র গুণফলের সমান।**

অতএব, গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ না হইলে, নিম্নলিখিত-রূপে ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায় :

নিয়ম। রাশিমালাদ্বয়ের গুণফলকে উহাদের গ. সা. গু.-দ্বারা ভাগ কর ; অথবা রাশিমালাদ্বয়ের যে-কোন একটিকে উহাদের গ. সা. গু.-দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফলকে অন্যটির দ্বারা গুণ কর।

শেষের প্রক্রিয়াই অধিক কার্যকরী।

উদা. $3x^3 + x^2 - 8x + 4$ এবং $3x^3 + 7x^2 - 4$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথমে অনু. 170 এর প্রক্রিয়ানুসারে উভয় রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইল। যথা,

$$\begin{array}{rl}
3x^3 + x^2 - 8x + 4\,) & 3x^3 + 7x^2 + 0.x - 4\,(\,1 \\
 & \underline{3x^3 + \;\; x^2 - 8x + 4} \\
2)\; & \underline{6x^2 + 8x - 8} \\
 & 3x^2 + 4x - 4\,)\, 3x^3 + \;\; x^2 - 8x + 4\,(\,x - 1 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{3x^3 + 4x^2 - 4x} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -3x^2 - 4x + 4 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-3x^2 - 4x + 4}
\end{array}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. $= 3x^2 + 4x - 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{3x^3+x^2-8x+4}{3x^2+4x-4}\times(3x^3+7x^2-4)$
$=(x-1)(3x^3+7x^2-4)$
$=3x^4+4x^3-7x^2-4x+4.$

প্রশ্নমালা 59

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. x^3+x^2-2 এবং $x^3+2x^2-3.$
2. $2x^3-5x^2+5x-3$ এবং $3x^3-7x^2+7x-4.$
3. $4x^3-x^2-4x+1$ এবং $3x^3-3x^2+x-1.$
4. $x^3-5ax^2+7a^2x-3a^3$ এবং $3x^2-10ax+7a^2.$
5. x^3-2x+1 এবং $x^3+2x^2-1.$
6. $x^3+6x^2+11x+6$ এবং $x^3+2x^2-x-2.$
7. $4a^3+13a^2-8a-3$ এবং $3a^4+13a^3+9a^2+9a+2.$
8. $3a^3-15a^2x-19ax^2+6x^3$ এবং $6a^3+3a^2x-5ax^2+x^3.$
9. x^3+2x^2-x-2 এবং $x^3+x^2-4x-4.$
10. $ax^3-a^2x^2-4a^4$ এবং $x^4-9a^2x^2+10a^3x.$
11. x^3+2x^2-x-2 এবং $2x^4-x^3-9x^2+4x+4.$
12. $2a^4-2a^3+a^2+3a-6$ এবং $4a^4-2a^3+3a-9.$
13. $3x^4-7x^3-27x^2-6x+2$
এবং $3x^4-13x^3-40x^2-9x+3.$

14. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $x-7$ এবং ল. সা. গু. $x^3-10x^2+11x+70.$ রাশি দুইটির একটি $x^2-5x-14$; অপরটি কত ?

15. দুইটি রাশির গ. সা. গু. x^2-x-2 এবং ল. সা. গু. $x^4-x^3-11x^2+9x+18.$ রাশি দুইটির একটি x^3-4x^2+x+6 ; অপরটি কত ?

16. $3x^3-13x^2+23x-21$ এবং $6x^3+x^2-44x+21$ এর ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. নির্ণয় কর, এবং ইহাদিগকে, রাশিমালা দুইটিতে $x=3$ লিখিলে যে দুইটি ফল পাওয়া যায় তাহাদের ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু.-র সহিত তুলনা কর।

178. গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ নহে এরূপ তিন বা তদধিক রাশিমালার ল. সা. গু.

মনে কর, রাশিমালাগুলি A, B, C……ইত্যাদি। A এবং B এর ল. সা. গু. L নির্ণয় কর। L এবং C এর ল. সা. গু.-ই A, B এবং C এর ল. সা. গু.

কারণ L এর মধ্যে A এবং B এর যাবতীয় গুণনীয়কই বর্তমান আছে, এবং এইগুলি ভিন্ন অন্য কোন গুণনীয়ক নাই। সুতরাং L এবং C এর ল. সা. গু.-র মধ্যে A, B এবং C এর যাবতীয় গুণনীয়কই বর্তমান আছে, এবং এইগুলি ভিন্ন অন্য কোন গুণনীয়ক নাই। অতএব ইহাই A, B এবং C এর ল. সা. গু.

এইরূপে যে-কোন সংখ্যক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়; শেষের ল. সা. গু.-টিই নির্ণেয় ল. সা. গু.

উদা. 1. $2x^2+5x-3$, $2x^3-7x^2+7x-2$ এবং $2x^4+3x^3-14x^2-9x+18$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$2x^2+5x-3$ এবং $2x^3-7x^2+7x-2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়; যথা,

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x^2+5x-3 & 2x^3-7x^2+7x-2 & x+3 \\
 & 2x^3+5x^2-3x & \\
 & -2)\ -12x^2+10x-2 & \\
 & 6x^2-5x+1 & \\
 & 6x^2+15x-9 & \\
 & -10)\ -20x+10 & \\
2x-1 & 2x^2+5x-3 & x+3 \\
 & 2x^2-x & \\
 & 6x-3 & \\
 & 6x-3 & \\
\end{array}
$$

∴ গ. সা. গু. $=2x-1$.

∴ এই দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু.

$$=\frac{(2x^2+5x-3)(2x^3-7x^2+7x-2)}{2x-1}$$

$$=(x+3)(2x^3-7x^2+7x-2)$$

$$=2x^4-x^3-14x^2+19x-6.$$

এইটি এবং তৃতীয় রাশিমালাটির ল. সা. গু.-নির্ণয়কালে, প্রথমে অনু. 170 এ বর্ণিত প্রক্রিয়ানুসারে উহাদের গ. সা. গু. x^3-7x+6 হইল।

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু.

$=2x^4-x^3-14x^2+19x-6$

এবং $2x^4+3x^3-14x^2-9x+18$ এর ল. সা. গু.

$$=\frac{(2x^4-x^3-14x^2+19x-6)(2x^4+3x^3-14x^2-9x+18)}{x^3-7x+6}$$

$=(2x-1)(2x^4+3x^3-14x^2-9x+18)$

$=4x^5+4x^4-31x^3-4x^2+45x-18.$

প্রশ্নমালা 60

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $x^2+9x+20$, $x^2+7x+12$ এবং $x^2+9x+18$.
2. $x^3-x^2-14x+24$, x^3-2x^2-5x+6 এবং x^2-4x+3.
3. x^2+4x+3, $x^2+8x+15$ এবং $x^2-4x-45$.
4. x^2+x-6, x^2+2x-3 এবং x^2-3x+2.
5. $2a^2-3ax-20x^2$, $2a^3+3a^2x-45ax^2-100x^3$ এবং $2a^3-a^2x-11ax^2+10x^3$.
6. $x^3-2x^2-19x+20$, $x^3+2x^2-23x-60$ এবং $x^4+7x^3-4x^2-52x+48$.
7. $3x^2+16x-12$, $3x^3+4x^2-28x+16$ এবং $3x^3-8x^2+x+2$.
8. x^4+7x^2+16, x^3+3x+4 এবং x^3+3x-4.
9. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ এবং $27x^3+27x^2+9x+1$.
10. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ এবং $6x^2-5x-6$.
11. x এর সর্বনিম্ন মানের (of the lowest degree) কোন্ রাশিমালা $2x^2-9x+9$, $6x^2-x-12$ এবং $3x^2-2x-8$ এর প্রত্যেকটির দ্বারা বিভাজ্য ?
12. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $2x+3$ এবং উহাদের ল. সা. গু. $2x^3-3x^2-29x-30$. উহাদের একটি $2x^2+7x+6$ হইলে, অন্যটি কত ?
13. $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$ এবং $x^3-48x+7$ এর প্রত্যেকটি x এর সর্বনিম্ন মানের কোন্ রাশিমালার গুণনীয়ক ?

চতুর্দশ অধ্যায়

সরল ভগ্নাংশ (Simple Fractions)

179. ভগ্নাংশ

a এবং b এর মান যাহাই হউক না কেন, a কে b দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $\frac{a}{b}$ কে **ভগ্নাংশ** বলে। a রাশিটিকে ভগ্নাংশটির **লব** (numerator) এবং b রাশিটিকে ভগ্নাংশটির **হর** (denominator) বলা হয়। যদি $\frac{a}{b}=F$ হয়, তাহা হইলে $a=bF$, অর্থাৎ

লব = ভগ্নাংশ × হর।

180. ভগ্নাংশের চিহ্ন

যে হেতু ভগ্নাংশ একটি ভাগফল, সুতরাং উহার চিহ্নও ভাগ-ক্রিয়ার চিহ্নের নিয়ম (অনু. 55) অনুসারে নির্ণীত হয়। যথা,

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

181. উপপাদ্য

ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে একই রাশি-দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোনও পরিবর্তন হয় না।

মনে কর, $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ এবং m যে-কোন একটি রাশি। প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ এবং (ii) $\frac{ma}{mb}=\frac{ma\div m}{mb\div m}$.

মনে কর, $\frac{a}{b} = F$; তাহা হইলে, অনু. 179 অনুসারে, $a = bF$.

$\therefore \quad ma = mbF$ [উভয় পক্ষকে m দ্বারা গুণ করিয়া] ;

$\therefore \quad \frac{ma}{mb} = F$ [উভয় পক্ষকে mb দ্বারা ভাগ করিয়া] ;

কিন্তু, $F = \frac{a}{b}$; $\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \quad \cdots \quad (i)$

পুনরায়, $a = ma \div m, \quad b = mb \div m$;

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{ma \div m}{mb \div m}.$$

কিন্তু (i) হইতে, $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$;

$$\therefore \quad \frac{ma}{mb} = \frac{ma \div m}{mb \div m}. \quad \cdots \quad (ii)$$

182. উপপাদ্য

ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়েরই চিহ্ন পরিবর্তন করিলে উহার মানের কোনও পরিবর্তন হয় না।

মনে কর, $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ। অনু. 180 অনুসারে,

$\frac{a}{b} = \frac{a \times (-1)}{b \times (-1)}$ [লব এবং হর উভয়কে (-1) দ্বারা গুণ করিয়া]

$= \frac{-a}{-b}$; সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

183. ভগ্নাংশের সরলীকরণ (Simplification)

অনু. 181 এ প্রমাণিত হইয়াছে যে, ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে একই রাশি-দ্বারা গুণ কিংবা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোনও পরিবর্তন হয় না। সুতরাং যদি কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে উহাদের কোন সাধারণ গুণনীয়ক-দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহা হইলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন

হইবে না, কিন্তু উহার আকার পূর্বাপেক্ষা লঘুতর হইবে। লব এবং হর উভয়কে যদি উহাদের যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক-দ্বারা, অর্থাৎ উহাদের গ. সা. গু.-দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহা হইলে ভগ্নাংশটি উহার লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত হইবে।

ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে উহাদের একটি সাধারণ গুণনীয়ক-দ্বারা ভাগ করিবার প্রক্রিয়াকে উক্ত গুণনীয়কটির **অপসারণ** (cancelling) প্রক্রিয়া বলে। (অনু. 53 দ্রষ্টব্য।)

উদা. 1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর : $\dfrac{a^2b}{ab^2}$.

লব এবং হরের গ. সা. গু. $= ab$.

সুতরাং, $$\frac{a^2b}{ab^2} = \frac{a^2b \div ab}{ab^2 \div ab} = \frac{a}{b}.$$

অন্য প্রকারে, $\dfrac{a^2b}{ab^2} = \dfrac{a.a.b}{a.b.b} = \dfrac{a}{b}$ [লব এবং হর হইতে a এবং b সাধারণ গুণনীয়ক দুইটি অপসারণ করিয়া]।

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$.

লব এবং হরের গ. সা. গু. $= (a+x)^2(a^2-ax+x^2)$.

সুতরাং,
$$\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$$
$$= \frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2) \div (a+x)^2(a^2-ax+x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2) \div (a+x)^2(a^2-ax+x^2)}$$
$$= \frac{a-x}{a+x}.$$

অন্য প্রকারে,
$$\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$$
$$= \frac{(a+x)(a^2-ax+x^2)(a+x)(a-x)}{(a+x)(a+x)(a+x)(a^2-ax+x^2)}$$
$$= \frac{a-x}{a+x}.$$

এখানে লব এবং হর হইতে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করা হইয়াছে।

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{(a^2+2a-15)(x^2-x-12)(a^2+4a+3)}{(a^2-2a-3)(ax+3a+3x+9)(x^2-16)}$.

ভগ্নাংশটি $=\dfrac{(a-3)(a+5)(x-4)(x+3)(a+1)(a+3)}{(a-3)(a+1)(x+3)(a+3)(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{a+5}{x+4}$ [সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়া]।

প্রশ্নমালা 61

সরল কর :

1. $\dfrac{ax}{x}$. 2. $\dfrac{abc}{a^2b^2}$. 3. $\dfrac{a^2xy}{ax^2y}$.

4. $\dfrac{4a^3x^2z}{3ax^3z^2}$. 5. $\dfrac{12a^5x^4b^3y^2}{8a^3x^2b^5}$. 6. $\dfrac{36a^3m^2n^3x^2}{20m^4n^4x^2}$.

7. $\dfrac{12p^3q^2c^5d^{10}}{45p^4q^3c^2d^5}$. 8. $\dfrac{20a^8b^7c^6d^5}{120b^4c^3d^2a^{10}}$. 9. $\dfrac{22k^3l^2m^4n^6}{33m^5n^7lk^2}$.

10. $\dfrac{18x^5y^2z^3l^4m^5n^6}{84x^3y^3z^2l^2m^6n^7}$. 11. $\dfrac{a^2-x^2}{a+x}$. 12. $\dfrac{a^3-x^3}{x^2+ax+a^2}$.

13. $\dfrac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a^3-b^3)}$. 14. $\dfrac{3ab(a^2-b^2)}{4bc(a+b)^2}$.

15. $\dfrac{4xy(x^3-y^3)}{12y^2(x^4+x^2y^2+y^4)}$. 16. $\dfrac{x^2y-xy^2}{4(x-y)^2}$.

17. $\dfrac{2ax^2-4ay^2}{x^4-4y^4}$. 18. $\dfrac{4abc^2-6ab^2c}{(3b-2c)^2}$. 19. $\dfrac{(4m-3n)^2}{12mn-9n^2}$.

20. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$. 21. $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2-3a-10}$. 22. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$.

23. $\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$. 24. $\dfrac{x^2y^3(x^2-xy-30y^2)}{x^3y^2(x^2+9xy+20y^2)}$.

25. $\dfrac{4a^2-4ab-15b^2}{2a^2+ab-15b^2}$. 26. $\dfrac{m^2+m-6}{m^2-m-2}$.

27. $\dfrac{4mn(m^2-3m-70)}{6m^2(m^2-4m-60)}$. 28. $\dfrac{x^3-27}{x^2-7x+12}$.

29. $\dfrac{a^3-8x^3}{a^2-4x^2}$. 30. $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2+2x+1)}{(x^2-1)(x^2-x-6)}$.

31. $\dfrac{(a^2+3a+2)(a^2+7a+12)}{(a^2+5a+6)(a^2+9a+20)}$.

32. $\dfrac{(a^3-1)(a^2-4)(a^2-9)}{(a^2+5a+6)(a^2-5a+6)(a^4+a^2+1)}$.

33. $\dfrac{(a^6-b^6)(a^2+ab+b^2)}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}$.

184. লঘিষ্ঠ সাধারণ হরে পরিবর্তন

দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হর-বিশিষ্ট করা আবশ্যক। পাটীগণিতের ন্যায়, ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট করাই সুবিধাজনক।

উদা. 1. $\dfrac{2x}{a^2y}$, $\dfrac{4y}{b^2x}$ এবং $\dfrac{3ab}{x^2y}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট কর।

হরগুলির ল. সা. গু. $= a^2b^2x^2y$;

সুতরাং, $\dfrac{2x}{a^2y} = \dfrac{2x \times b^2x^2}{a^2y \times b^2x^2} = \dfrac{2x^3b^2}{a^2b^2x^2y}$; [ল. সা. গু.-টিকে a^2y দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল b^2x^2 হয়; ইহাই এখানে গুণকরূপে ব্যবহৃত হইয়াছে।]

$$\frac{4y}{b^2x} = \frac{4y \times a^2xy}{b^2x \times a^2xy} = \frac{4a^2xy^2}{a^2b^2x^2y};$$

$$\frac{3ab}{x^2y} = \frac{3ab \times a^2b^2}{x^2y \times a^2b^2} = \frac{3a^3b^3}{a^2b^2x^2y}.$$

উদা. 2. $\dfrac{x-a}{x-b}$, $\dfrac{2x}{x^2-b^2}$ এবং $\dfrac{2a}{x^3-b^3}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট কর।

হরগুলির ল. সা. গু. $= (x-b)(x+b)(x^2+bx+b^2)$
$= (x+b)(x^3-b^3)$;

সুতরাং, $$\frac{x-a}{x-b} = \frac{(x-a)(x+b)(x^2+bx+b^2)}{(x^3-b^3)(x+b)};$$

$$\frac{2x}{x^2-b^2} = \frac{2x(x^2+bx+b^2)}{(x^3-b^3)(x+b)};$$

$$\frac{2a}{x^3-b^3} = \frac{2a(x+b)}{(x+b)(x^3-b^3)}.$$

প্রশ্নমালা 62

নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট কর :—

1. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. 2. $\frac{2a}{3b}, \frac{4ac}{3bd}$. 3. $\frac{3a}{4x}, \frac{5ax}{6by}$.

4. $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$. 5. $\frac{a^2b}{c^2d}, \frac{4a^2c}{5b^2d}$.

6. $\frac{4a^3b^2c}{6xy^2z}, \frac{2xyz^2}{5abc}$. 7. $\frac{x+a}{x-a}, \frac{2x}{x^2-a^2}$.

8. $\frac{4xy}{x^2-y^2}, \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$. 9. $\frac{2a}{3(a^2-b^2)}, \frac{4b}{a^3-b^3}$.

10. $\frac{3a^2-b^2}{a}, \frac{4a^2-3b^2}{b}$. 11. $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{a-b}, \frac{xy}{a^2-b^2}$.

12. $\frac{bc}{b-c}, \frac{ca}{b^2-c^2}, \frac{ab}{b^3-c^3}$.

185. ভগ্নাংশের যোগ এবং বিয়োগ

মনে কর, $\frac{a}{x}$ এবং $\frac{b}{y}$ দুইটি ভগ্নাংশ।

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}$ [ভগ্নাংশ দুইটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট করিয়া].

$=(ay)\div xy+(bx)\div xy$

$=(ay+bx)\div xy$

$=\frac{ay+bx}{xy}$.

এইরূপ, $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{ay-bx}{xy}$.

সুতরাং ভগ্নাংশ-সমূহের যোগফল (বা বিয়োগফল) নির্ণয় করিতে হইলে, ভগ্নাংশগুলিকে প্রথমে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর-বিশিষ্ট করিতে হয়, পরে এই পরিবর্তিত ভগ্নাংশ-সমূহের লবগুলির বৈজিক যোগফলকে (কিংবা বিয়োগফলকে) লঘিষ্ঠ-

সাধারণ হর-দ্বারা ভাগ করিলেই নির্ণেয় যোগফল (বা বিয়োগফল) পাওয়া যায়। নির্ণীত ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিয়া রাখাই সাধারণ রীতি।

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{2a}{x}+\dfrac{x}{3a}$.

রাশিমালাটি $=\dfrac{6a^2}{3ax}+\dfrac{x^2}{3ax}=\dfrac{6a^2+x^2}{3ax}$.

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{1+a}{a}-\dfrac{1+b}{b}$.

রাশিমালাটি

$$=\frac{b(1+a)}{ab}-\frac{a(1+b)}{ab}=\frac{b+ab-a-ab}{ab}=\frac{b-a}{ab}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}$.

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}+\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+ab-b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$.

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1+x+1+1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{x^2-1}.$$

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{1}{a^2+4a+3}-\dfrac{2}{2a^2+5a+3}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{1}{(a+1)(a+3)}-\dfrac{2}{(2a+3)(a+1)}$

$$=\frac{(2a+3)-2(a+3)}{(a+1)(a+3)(2a+3)}$$

$$=-\frac{3}{(a+1)(a+3)(2a+3)}.$$

প্রশ্নমালা 63

সরল কর :

1. $\frac{a}{2}+\frac{ab}{3}$. 2. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$. 3. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}$.

4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{1}{bc}$. 5. $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}$. 6. $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}-\frac{z}{xy}$.

7. $\frac{x+y}{2x}-\frac{x-y}{3y}$. 8. $\frac{x^2-1}{3x}-\frac{x-2}{3}$. 9. $\frac{2x^2-1}{4x}+\frac{x-2}{2}$.

10. $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}$.

11. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-c}$ 12. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$.

13. $\frac{ab}{a-b}+\frac{a-b}{ab}$. 14. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$

15. $\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-5}$. 16. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}-\frac{2x}{x^2-a^2}$.

17. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+3x+2}$.

18. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{5}{x^2+3x+2}$. 19. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}$.

20. $\frac{1}{x^2+4x+3}-\frac{1}{x^2+7x+12}$. 21. $\frac{4}{x^3-8}+\frac{2}{x^2+2x+4}$.

22. $\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2+x-12}$.

23. $\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{5}{x^3-27}$.

24. $\frac{a}{a^2+4ab+3b^2}+\frac{b}{a^2+5ab+6b^2}-\frac{a}{a^2+3ab+2b^2}$.

25. $\frac{a-1}{a-b}+\frac{a+1}{a+b}-\frac{2(a^2-b)}{a^2-b^2}$.

186. ভগ্নাংশের গুণন

মনে কর, $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ দুইটি ভগ্নাংশ, এবং $\frac{a}{b}=x$, $\frac{c}{d}=y$.

তাহা হইলে, $a=bx$, $c=dy$;

$$\therefore \quad ac=bxdy=bd\times xy \; ;$$

উভয় পক্ষকে bd দ্বারা ভাগ করিয়া, $xy=\frac{ac}{bd}$;

$$\therefore \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

সুতরাং দুইটি ভগ্নাংশের গুণফল এমন একটি ভগ্নাংশ হইবে যাহার লব, পূর্বোক্ত ভগ্নাংশ দুইটির লবের গুণফলের, এবং হর, পূর্বোক্ত ভগ্নাংশ দুইটির হরের গুণফলের সমান।

তিন বা তদধিক ভগ্নাংশের গুণফলও উল্লিখিত নিয়ম-দ্বারা পাওয়া যায়।

যথা, $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh} \quad \text{ইত্যাদি।}$$

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{4ab^2c}{3a^2bc^2}\times\dfrac{6a^3bc}{8ab^3c^2}$.

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{4ab^2c\times 6a^3bc}{3a^2bc^2\times 8ab^3c^2}=\frac{24a^4b^3c^2}{24a^3b^4c^4}=\frac{a}{bc^2}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\times\dfrac{a^2-ax+x^2}{(a-x)^2}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{(a^2-x^2)(a^2-ax+x^2)}{(a^3+x^3)(a-x)^2}$

$$=\frac{(a+x)(a-x)(a^2-ax+x^2)}{(a+x)(a^2-a-x+x^2)(ax)^2}=\frac{1}{a-x}.$$

187. ভগ্নাংশের ভাগ

মনে কর, $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ দুইটি ভগ্নাংশ, এবং $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x.$

তাহা হইলে, অনু. 124 অনুসারে, $\frac{a}{b} = x \times \frac{c}{d}.$

উভয় পক্ষকে $\frac{d}{c}$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c}$$

$$= x \times \frac{cd}{cd} \qquad \text{অনু. 186.}$$

$$= x\,,$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

সুতরাং একটি ভগ্নাংশকে আর একটি ভগ্নাংশ-দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, শেষোক্তটির বিপরীত- (reciprocal) দ্বারা পূর্বোক্তকে গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. 1 কে $\frac{x}{y}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$1 \div \frac{x}{y} = 1 \times \frac{y}{x} = \frac{y}{x}.$$

উদা. 2. $\frac{4a^2bc}{3x^2yz}$ কে $\frac{2abc}{3xyz}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\frac{4a^2bc}{3x^2yz} \div \frac{2abc}{3xyz} = \frac{4a^2bc}{3x^2yz} \times \frac{3xyz}{2abc} = \frac{12a^2bcxyz}{6x^2yzabc} = \frac{2a}{x}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\frac{4a^2-9b^2}{(2x-y)^2} \div \frac{(2a-3b)^2}{4x^2-y^2}.$

প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{4a^2-9b^2}{(2x-y)^2} \times \frac{4x^2-y^2}{(2a-3b)^2} = \frac{(4a^2-9b^2)(4x^2-y^2)}{(2x-y)^2(2a-3b)^2}$$

$$= \frac{(2a+3b)(2a-3b)(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(2x-y)(2a-3b)(2a-3b)} = \frac{(2a+3b)(2x+y)}{(2x-y)(2a-3b)}.$$

উদা. 4. সরল কর: $\dfrac{4ab(a^2+ab+b^2)}{a^4-b^4} \times \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \div \dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$.

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{4ab(a^2+ab+b^2)}{a^4-b^4} \times \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \times \dfrac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}$

$$= \frac{4ab\,(a^2+ab+b^2)\,(a+b)\,(a^2-ab+b^2)\,(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)\,(a+b)\,(a-b)\,(a-b)\,(a^2+ab+b^2)\,(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{4ab}{(a-b)^2}.$$

প্রশ্নমালা 64

সরল কর :

1. $\dfrac{4a}{5b} \times \dfrac{5c}{2a}$

2. $\dfrac{4ab}{7xy} \times \dfrac{14x^2}{3a^2}$.

3. $\dfrac{8b^2c^2}{5x^2y^2} \times \dfrac{3xy}{16bc}$.

4. $\dfrac{16a^2x^3}{7b^2y^3} \times \dfrac{14b^3y^2}{24a^3x^2}$.

5. $\dfrac{p^3q^3m^2}{a^3b^3x^2} \times \dfrac{a^2b^2x}{pq^3m^2}$.

6. $\dfrac{4p^{10}a^7}{13q^8b^{15}} \times \dfrac{26q^{10}b^{10}}{36p^9a^9}$.

7. $\dfrac{a^2b^5}{x^2y^5} \div \dfrac{a^3b^3}{x^3y^3}$.

8. $\dfrac{m^4n^3}{c^3d^5} \div \dfrac{m^2n^2}{c^2d^2}$.

9. $\dfrac{45b^2c}{2x^2z} \div \dfrac{15bc^2}{xz}$.

10. $\dfrac{p^2q^3r}{x^3y^2z} \times \dfrac{x^2z^2}{q^2r^2} \div \dfrac{pq}{xy}$.

11. $\dfrac{abc}{xyz} \times \dfrac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2} \div \dfrac{x^3y^3z^3}{a^3b^3c^3}$.

12. $\dfrac{a^2-x^2}{2x} \times \dfrac{3a}{a-x}$.

13. $\dfrac{4(b-c)}{ab} \times \dfrac{bc}{b^2-c^2}$.

14. $\dfrac{(a+x)^2}{a^2-x^2} \times \dfrac{a-x}{a+x}$.

15. $\dfrac{p^2-9q^2}{4pq} \div \dfrac{p+3q}{q}$.

16. $\dfrac{4mn}{m^2-4n^2} \div \dfrac{n}{m-2n}$.

17. $\dfrac{abc}{b^3-c^3} \div \dfrac{bc}{b^2+bc+c^2}$.

18. $\dfrac{a^2-ab}{b^2-bc} \times \dfrac{b^2+ab}{c^2+bc} \times \dfrac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$.

19. $\dfrac{4a(x^3+a^3)}{x^2+ax+a^2} \times \dfrac{x^3-a^3}{x^2-ax+a^2} \times \dfrac{x^2}{2a^2(x^2-a^2)}$.

20. $\dfrac{a^2+6ab+5b^2}{a^2-ab-12b^2} \times \dfrac{a^2+5ab+6b^2}{a^2+7ab+10b^2}$.

21. $\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}\right)\left(\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{ab}{xy}+\dfrac{b^2}{y^2}\right)$.

22. $\dfrac{3x^2-6x}{x^2-4} \times \dfrac{6x+12}{27x^3}$.

23. $\dfrac{x+y+z}{(x+z)^2-y^2} \times \dfrac{z^2-(x-y)^2}{xy-y^2-yz}$.

24. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

25. $\left(\dfrac{a^2-ab}{x^2-xy}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^2+ab}{y^2+xy}\right)^2 \div \dfrac{a^2b^2(a+b)^2}{x^2y^2(x-y)^2}$.

26. $\dfrac{4a^2-9ax-9x^2}{4a^2+19ax+12x^2} \times \dfrac{a^2+6ax+8x^2}{a^2+ax-2x^2}$.

27. $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+5a+6} \cdot \dfrac{a^2+7a+12}{a^2+9a+20} \cdot \dfrac{a^2+11a+30}{a^2+13a+42}$.

28. $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6} \cdot \dfrac{a^2-7a+12}{a^2-9a+20} \cdot \dfrac{a^2-11a+30}{a^2-13a+42}$.

29. $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{(a-b)^2}{a^3+b^3} \cdot \dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3-b^3}$.

30. $\dfrac{x^4-y^4}{x^2y^2(x^3-y^3)} \cdot \dfrac{x-y}{x^3y-xy^3} \cdot \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

31. $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2} \div \dfrac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$.

32. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \cdot \dfrac{a-b}{a(a+b)} \cdot \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

33. $\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \cdot \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

34. $\left(\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}\right)\div\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\times\dfrac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}.$

35. $\dfrac{a^2+5a}{b^2+3b}\cdot\dfrac{b^2+4b+3}{a^2-2a-35}\cdot\dfrac{a^2b-7ab}{ab^2+ab}.$

36. $\dfrac{x^3-4x}{3x^2+5x}\cdot\dfrac{3x^2+8x+5}{x^2+x-6}\cdot\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}.$

37. $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2y^2+y^4}.$

38. $\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}\right)\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{b+c}\right)\div\dfrac{b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$

39. $\dfrac{4(a^2-1)}{3a^2-3a}\cdot\dfrac{a^2+2a+1}{a^2+3a+2}\cdot\dfrac{a^2-10a-24}{a^2-17a+60}\cdot\dfrac{3a^2-15a}{a^3+1}.$

40. $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)\div\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\left(1-\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right).$

পঞ্চদশ অধ্যায়

দুরূহ সরল সমীকরণ

188. সপ্তম অধ্যায়ে বলা হইয়াছে যে, সরল (simple) সমীকরণে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি এবং উহার প্রথম ঘাত বিদ্যমান থাকে; ইহার সমাধান করিতে হইলে, অজ্ঞাত রাশিটির যে বিশেষ মান-দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয় সেই মানটি নির্ণয় করিতে হয়। বর্তমান অধ্যায়ে, সরল সমীকরণ-সম্বন্ধীয় কতকগুলি দুরূহ বিষয়ের আলোচনা করা হইবে।

189. উপপাদ্য। সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভব নহে

মনে কর, $px+q=0$ একটি সরল সমীকরণ। যদি ইহার একাধিক বীজ থাকা সম্ভব হয়, তাহা হইলে মনে কর, α এবং β ইহার দুইটি বিভিন্ন বীজ।

যে হেতু, সমীকরণটির একটি বীজ α,

$$\text{সুতরাং,}\quad p\alpha+q=0.$$

এইরূপ, β একটি বীজ বলিয়া,

$$p\beta+q=0.$$

$\therefore$ $\qquad p(\alpha-\beta)=0$ [প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করিয়া]।

কিন্তু p এর মান শূন্য নহে, সুতরাং $\alpha-\beta=0$, অর্থাৎ $\alpha=\beta$, অর্থাৎ α এবং β একই বীজ।

সুতরাং সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভব নহে। উপপাদ্যটি হইতে বুঝা গেল যে, কোন সরল সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয় অজ্ঞাত রাশির এরূপ একটি মান নির্ণীত হইলে, কেবলমাত্র ঐ মান-দ্বারাই উভয় পক্ষের সমতা রক্ষিত হইবে,—উহা ভিন্ন অন্য কোনও মান-দ্বারা সমতা রক্ষিত হইবে না।

190. সাধারণ সরল সমীকরণ [অনু. 89 দ্রষ্টব্য।]

উদা. 1. সমাধান কর: $(x-2)^2+(x-3)^2=(2x+1)(x-4)$.

$$(x-2)^2+(x-3)^2=(2x+1)(x-4),$$

বা, $x^2-4x+4+x^2-6x+9=2x^2-7x-4$,

বা, $2x^2-10x+13=2x^2-7x-4$,

বা, পক্ষান্তর করিয়া, $-10x+7x=-4-13$,

বা, $-3x=-17$,

বা, $3x=17$;

$\therefore$ $x=\frac{17}{3}$.

উদা. 2. সমাধান কর:

$$x-\left(3x-\frac{2x+5}{10}\right)=\frac{1}{6}\left(2x+67\right)+\frac{5}{3}\left(1+\frac{x}{5}\right).$$

উভয় পক্ষের বন্ধনী অপসারণ করিয়া,

$$x-3x+\frac{2x+5}{10}=\frac{1}{3}x+\frac{67}{6}+\frac{5}{3}+\frac{x}{3},$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$x-3x+\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x=\frac{67}{6}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2},$$

বা, $-\frac{37}{15}x=\frac{74}{6}$;

$\therefore$ $x=-\frac{74}{6}\times\frac{15}{37}=-5$.

উদা. 3. সমাধান কর: $(x-a)^2+(x-b)^2=(2x-a)(x+b)$.

উভয় পক্ষের বন্ধনী অপসারণ করিয়া,

$$x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2=2x^2-ax+2bx-ab,$$

পক্ষান্তর করিয়া, $-2ax-2bx+ax-2bx=-a^2-b^2-ab$,

বা, $-ax-4bx=-a^2-b^2-ab$,

বা, $ax+4bx=a^2+b^2+ab$,

বা, $(a+4b)x=a^2+b^2+ab$;

$\therefore$ $x=\frac{a^2+b^2+ab}{a+4b}$.

প্রশ্নমালা 65

সমাধান কর :

1. $(2x+1)^2+(3x-1)^2=(x-2)(13x-1)$.
2. $(x+1)(x+2)(x+3)=(x+5)(x^2+x-1)$.
3. $(x-1)(x-2)(x-3)=(x^2+x-1)(x-7)$.
4. $\frac{1}{7}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{5}(x+\frac{2}{3})=\frac{43}{40}$.
5. $\frac{1}{3}(2x-3)-\frac{1}{5}(3x-5)+\frac{1}{6}(5x+3)-\frac{1}{10}(7x+5)=4$.
6. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{5}(x+3)=9$.
7. $\frac{1}{4}(4-x)-\frac{1}{5}(5-x)+\frac{1}{6}(6-x)=1$.
8. $\frac{3}{7}(5x-13)-\frac{2}{5}(4x-9)=\frac{1}{3}(x-2)-(10-x)$.
9. $\frac{2}{9}(x-3)+\frac{5}{7}(\frac{2}{3}x+4)=\frac{8}{3}(x-\frac{5}{2})$.
10. $\frac{1}{4}(\frac{7}{3}x-2)-\frac{1}{3}(5x-\frac{1}{2})=\frac{1}{20}(x-8)-3\frac{1}{3}$.
11. $\frac{1}{2}(4x-3)+\frac{1}{3}(5x-7)+\frac{1}{4}(6x-5)=25\frac{1}{12}$.
12. $\frac{1}{13}(x+3)+\frac{1}{3}(2x-17)+\frac{1}{10}(3x-20)=3$.
13. $\frac{1}{3}(4x-1)+\frac{1}{5}(8x-3)-\frac{1}{7}(12x-5)=\frac{41}{105}$.
14. $(x+2a)^2+(x+3a)^2=2(x-a)(x-4a)$.
15. $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=3(x-b)(x-c)$.
16. $(x-a)^2+(x-b)^2=(x+a)^2+(x+b)^2$.
17. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.
18. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$.
19. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$.
20. $\frac{1}{4}(x+3)-\frac{1}{5}(x+4)=\frac{1}{6}(x+5)-\frac{1}{7}(x+6)$.
21. $\frac{1}{6}(x+5)-\frac{1}{9}(x+1)=\frac{1}{4}(x+3)$.
22. $\frac{1}{7}(2x-9)+\frac{1}{8}(3x-8)+\frac{1}{5}(4x-17)=6$.
23. $\frac{\frac{1}{5}x-4}{4}+\frac{\frac{1}{10}x+8}{6}-\frac{\frac{1}{4}x+5}{5}=1$.

24. $\frac{1}{4}(10x-1)+\frac{1}{2}(5x-1)-\frac{3}{4}(7x-1)=0.$
25. $\frac{1}{3}(3x-7)+\frac{1}{4}(7x-11)=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{4})-5.$

191. ভগ্নাংশ-সম্বলিত সমীকরণ

এই জাতীয় সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি ভগ্নাংশগুলির হরে, কিংবা লব এবং হর উভয়েই বিদ্যমান থাকিতে পারে। ইহা সমাধান করিবার পূর্বে, উভয় পক্ষকে উভয়পক্ষীয় ভগ্নাংশগুলির হরের ল. সা. গু.-দ্বারা গুণ করিতে হয়। এইরূপ করিলে সমীকরণটি ভগ্নাংশহীন আকারে পরিণত হইবে; তখন ইহার সমাধান, পূর্ব অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রক্রিয়া-দ্বারা করা যাইতে পারে। কিন্তু নিম্নলিখিত অনুচ্ছেদসমূহে বর্ণিত প্রক্রিয়াগুলি প্রয়োগ করিলে, এই জাতীয় সমীকরণগুলির সমাধান অনেক সহজ হয়।

192. বজ্রগুণন (Cross-multiplication)

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $ad=bc.$

কারণ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ এর উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd,$$

বা, $ad=bc.$

উদা. সমাধান কর : $\frac{2x-5}{x-4}=\frac{2x+1}{x-2}.$

বজ্রগুণন করিয়া, $(2x-5)(x-2)=(2x+1)(x-4),$

বা, $2x^2-9x+10=2x^2-7x-4,$

পক্ষান্তর করিয়া, $-9x+7x=-4-10,$

বা, $-2x=-14;$

$\therefore$ $x=7.$

193. উপপাদ্য

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; কারণ সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি '$ad=bc$' এর সমান। [অনু 192.]

উদা. সমাধান কর : $\dfrac{2x^2-6x+1}{2x^2-4x-1}=\dfrac{x-3}{x-2}$.

উপরের উপপাদ্য হইতে,

$$\frac{2x^2-6x+1}{x-3}=\frac{2x^2-4x-1}{x-2},$$

বা, $$\frac{2x(x-3)+1}{x-3}=\frac{2x(x-2)-1}{x-2},$$

বা, $$2x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{x-2},$$

বা, $$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{x-2};$$

∴ অনু. 192 দ্বারা, $$x-2=-(x-3),$$

বা, $$2x=5;$$

∴ $$x=\tfrac{5}{2}.$$

194. প্রয়োজনমত পক্ষান্তর-করণ এবং পদগুলিকে একত্রীকরণ

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-16}=\dfrac{2x-1}{5}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $$\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16},$$

বা, $$\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-16};$$

বজ্রগুণন করিয়া, $$4(7x-16)=15(2x-4),$$

বা, $$28x-64=30x-60,$$

বা, $$2x=-4;$$

∴ $$x=-2.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$.

যে হেতু, $\frac{3}{x-3}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-3}$;

সুতরাং, $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-3}$,

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}$,

বা, $\frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x-2)}$,

উভয় পক্ষকে $x-3$ দ্বারা গুণ করিয়া এবং 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2},$$

বজ্রগুণন করিয়া, $-(x-2)=x-1$,

বা, $2x=3$;

$\therefore$ $x=\frac{3}{2}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{21}{7x-3}+\frac{12}{3x+5}=\frac{56}{8x+3}$.

দক্ষিণ পক্ষ $=\frac{32}{8x+3}+\frac{24}{8x+3}$;

সুতরাং, $\frac{21}{7x-3}+\frac{12}{3x+5}=\frac{32}{8x+3}+\frac{24}{8x+3}$ ... (i)

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{21}{7x-3}-\frac{24}{8x+3}=\frac{32}{8x+3}-\frac{12}{3x+5}$,

বা, $\frac{135}{(7x-3)(8x+3)}=\frac{124}{(8x+3)(3x+5)}$ ... (ii)

উভয় পক্ষকে $8x+3$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{135}{7x-3}=\frac{124}{3x+5},$$

বজ্রগুণন করিয়া, $135(3x+5)=124(7x-3)$,

বা, $405x+675=868x-372$,

পক্ষান্তর করিয়া, $463x = 1047$;

$$\therefore \quad x = \frac{1047}{463} = 2\frac{121}{463}.$$

দ্রষ্টব্য। (i) এর দক্ষিণ পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির লব 32 এবং 24. উহাদিগকে এইরূপে পাওয়া যায় : $\frac{8 \times 12}{3} = 32$, $\frac{8 \times 21}{7} = 24$. দক্ষিণ পক্ষটিকে ভাঙ্গিয়া এইরূপে লেখা হইয়াছে বলিয়া (ii) এর ভগ্নাংশগুলির লবে x নাই, কারণ $8 \times 21 = 7 \times 24$ এবং $3 \times 32 = 8 \times 12$.

195. ভাগ-দ্বারা সরলীকরণ

কখন কখন ভগ্নাংশের লবগুলিকে উহাদের স্ব স্ব হর-দ্বারা ভাগ করিলে, সমাধানের সুবিধা হয়।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2x-4}{x+2} = 5.$

লবগুলিকে উহাদের স্ব স্ব হর-দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$3 + \frac{5}{x-1} + 2 - \frac{8}{x+2} = 5,$$

পক্ষান্তব করিয়া, $\frac{5}{x-1} = \frac{8}{x+2}$,

বজ্রগুণন করিয়া, $5(x+2) = 8(x-1)$,

বা, $5x + 10 = 8x - 8$,

বা, $-3x = -18$;

$$\therefore \quad x = \frac{-18}{-3} = 6.$$

উদা. 2. সমাধান কর: $\frac{4x-15}{x-4} + \frac{7x-62}{x-9} = \frac{5x-34}{x-7} + \frac{6x-35}{x-6}.$

লবগুলিকে উহাদেব স্ব স্ব হর-দ্বাবা ভাগ করিয়া,

$$4 + \frac{1}{x-4} + 7 + \frac{1}{x-9} = 5 + \frac{1}{x-7} + 6 + \frac{1}{x-6};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-6},$$

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-9}$,

বা, $\frac{-3}{(x-4)(x-7)}=\frac{-3}{(x-6)(x-9)}$,

∴ $\frac{1}{x^2-11x+28}=\frac{1}{x^2-15x+54}$ [−3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, বজ্রগুণন করিয়া, $x^2-11x+28=x^2-15x+54$,

বা, $4x=26$;

∴ $x=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$\frac{2x^2-ax-a^2+b}{2x^2+ax-2bx+a-ab}=\frac{x-a}{x-b}.$$

অনু. 193 এর উপপাদ্য-অনুসারে,

$$\frac{2x^2-ax-a^2+b}{x-a}=\frac{2x^2+ax-2bx+a-ab}{x-b}.$$

ভাগ করিয়া, $2x+a+\frac{b}{x-a}=2x+a+\frac{a}{x-b}$;

∴ $\frac{b}{x-a}=\frac{a}{x-b}$,

∴ $b(x-b)=a(x-a)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $ax-bx=a^2-b^2$,

বা, $x(a-b)=a^2-b^2$,

∴ $x=a+b$.

প্রশ্নমালা 66

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $\frac{1}{x+3}=\frac{2}{3x+2}$. 2. $\frac{2}{x-5}=\frac{7}{x-1}$.

3. $\frac{x}{x+1}=\frac{3x}{3x-5}$.

4. $\frac{b}{x-a}=\frac{c}{x-b}$.

5. $\frac{a}{x-b-c}=\frac{b}{x-c-a}$.

6. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+3}$.

7. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-5}{x-4}$.

8. $\frac{4x-3}{3x+7}=\frac{8x-1}{6x+2}$.

9. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-1}$.

10. $\frac{5}{x+2}+\frac{6}{x-4}=\frac{11}{x-3}$.

11. $\frac{1}{3x+7}+\frac{10}{3x-7}=\frac{11}{3x+1}$.

12. $\frac{2x+3}{3}=\frac{x+4}{8}+\frac{13x^2}{24x+1}$.

13. $\frac{12x+1}{4}=\frac{15x-1}{5}+\frac{2x-5}{3x-1}$.

14. $\frac{14x-3}{9}=\frac{x-36}{2x+5}+\frac{70x+1}{45}$.

15. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$.

16. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-11}$.

17. $\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{2x+5}-\frac{1}{x+3}$.

18. $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$.

19. $\frac{24}{x-12}-\frac{15}{x-3}=\frac{9}{x-7}$.

20. $\frac{40x+3}{16}+\frac{5x-2}{4x-3}=\frac{5x-6}{2}$.

21. $\frac{2x+3}{x-1}+\frac{100x-1}{30}=\frac{10x-1}{3}$.

22. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{6}{2x-9}$.

23. $\dfrac{1}{x-10}+\dfrac{2}{x-9}=\dfrac{6}{2x-19}$.

24. $\dfrac{8}{x-6}-\dfrac{5}{x-5}=\dfrac{3}{x-7}$. 25. $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{13}{12x-11}-\dfrac{1}{12x-23}$.

26. $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=\dfrac{2(a+b)}{2x-a-b}$. 27. $\dfrac{38}{2x-19}-\dfrac{9}{x-10}=\dfrac{10}{x-9}$.

28. $\dfrac{x^2-5x+6}{4x^2-23x+15}=\dfrac{x-2}{7(x-5)}$.

29. $\dfrac{x+7}{x+8}=\dfrac{4x^2+25x-21}{6x^2+43x-40}$. 30. $\dfrac{6x^2+17x+7}{9x^2-3x-20}=\dfrac{3x+7}{3x-5}$.

31. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)}{x-3}$.

32. $\dfrac{2x-6}{x-4}+\dfrac{6x-12}{2x-5}=\dfrac{10x-28}{2x-7}$.

33. $\dfrac{x+a-b}{x-b}+\dfrac{2x-2a+b}{x-a}=\dfrac{6x-a-b}{2x-a-b}$.

34. $\dfrac{3x-8}{x-3}+\dfrac{4x-25}{x-6}=\dfrac{5x-9}{x-2}+\dfrac{2x-11}{x-5}$.

35. $\dfrac{x-4}{x-1}+\dfrac{x-7}{x-3}+\dfrac{x-2}{x-9}=3$.

36. $\dfrac{2x+11}{x+5}-\dfrac{9x-9}{3x-4}=\dfrac{4x+13}{x+3}-\dfrac{15x-47}{3x-10}$.

37. $\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}+\dfrac{x^2-2x-7}{x-4}=\dfrac{2x^2-7x-13}{x-5}$.

38. $\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x^2-5x+3}{x^2-6x+7}$.

39. $\dfrac{2x^2-5x-2}{x-3}+\dfrac{3x^2-x-3}{x-1}=\dfrac{x^2-5x-13}{x-7}+\dfrac{4x^2-19x-6}{x-5}$.

40. $\dfrac{x^2-9x-10}{x^2-10x-11}-\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-3x-10}=\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-8x-9}-\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

196. নিম্নে আরও কতকগুলি উদাহরণ প্রদত্ত হইল :—

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$.

প্রথম প্রক্রিয়া। অনু. 195 এর উদা. 2 এর অনুরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিয়া সমীকরণটি সমাধান করা যায়।

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া। পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3},$$

বা, $$\frac{2x^2-16x+19}{x^2-9x+14}=\frac{2x^2-16x+27}{x^2-9x+18},$$

বা, $$\frac{2x^2-16x+19}{2x^2-16x+27}=\frac{x^2-9x+14}{x^2-9x+18},$$ অনু. 193.

বা, $$1-\frac{8}{2x^2-16x+27}=1-\frac{4}{x^2-9x+18}$$ [ভাগ করিয়া];

উভয় পক্ষ হইতে 1 অপসারিত করিয়া এবং পরে -4 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিয়া,

$$\frac{2}{2x^2-16x+27}=\frac{1}{x^2-9x+18},$$

বা, $$2x^2-18x+36=2x^2-16x+27$$ [বজ্রগুণন-দ্বারা],

বা, $$2x=9;\quad \therefore\quad x=\tfrac{9}{2}=4\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2=\frac{(x+5)(x+1)}{x(x+4)}$.

বন্ধনী অপসারিত করিয়া,

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x};$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x};$$

বা, $$1+\frac{4}{x^2+6x+5}=1+\frac{4}{x^2+4x},$$

বা, $$x^2+6x+5=x^2+4x,$$

বা, $$2x=-5;\quad \therefore\quad x=-\tfrac{5}{2}.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{4\cdot05}{9x}-\frac{\cdot3}{\cdot8-2x}=\frac{1\cdot8}{x}-\frac{3\cdot6}{2\cdot4-6x}$.

প্রথম প্রক্রিয়া। পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{4\cdot05}{9x}-\frac{1\cdot8}{x}=\frac{\cdot3}{\cdot8-2x}-\frac{3\cdot6}{2\cdot4-6x},$$

বা, $$\frac{4\cdot05-16\cdot2}{9x}=\frac{\cdot9-3\cdot6}{2\cdot4-6x},$$

বা, $$\frac{-12\cdot15}{9x}=\frac{-2\cdot7}{2\cdot4-6x},$$

বা, $$\frac{1\cdot35}{x}=\frac{\cdot9}{\cdot8-2x},$$

বা, $$\cdot9x=1\cdot35(\cdot8-2x)=1\cdot08-2\cdot7x,$$

বা, $$3\cdot6x=1\cdot08;$$

$\therefore$ $$x=\cdot3.$$

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া। দশমিকগুলিকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া,

$$\frac{405}{900x}-\frac{3}{8-20x}=\frac{18}{10x}-\frac{36}{24-60x},$$

বা, $$\frac{9}{20x}-\frac{3}{8-20x}=\frac{18}{10x}-\frac{12}{8-20x};$$

$\therefore$ $$\frac{9}{20x}-\frac{18}{10x}=\frac{3}{8-20x}-\frac{12}{8-20x},$$

বা, $$\frac{-27}{20x}=\frac{-9}{8-20x},$$

বা, $$\frac{3}{20x}=\frac{1}{8-20x};$$

$\therefore$ $$20x=24-60x,$$

বা, $$80x=24;$$

$\therefore$ $$x=\tfrac{24}{80}=\tfrac{3}{10}.$$

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{a+c}{x-2b}-\frac{b+c}{x-2a}=\frac{a-c}{x+2b}-\frac{b-c}{x+2a}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{a+c}{x-2b}-\frac{a-c}{x+2b}=\frac{b+c}{x-2a}-\frac{b-c}{x+2a}$,

বা, $$\frac{(a+c)(x+2b)-(a-c)(x-2b)}{x^2-4b^2}$$
$$=\frac{(b+c)(x+2a)-(b-c)(x-2a)}{x^2-4a^2},$$

বা, $$\frac{2cx+4ab}{x^2-4b^2}=\frac{2cx+4ab}{x^2-4a^2},$$

বা, $(2cx+4ab)\left\{\frac{1}{x^2-4b^2}-\frac{1}{x^2-4a^2}\right\}=0$. [পক্ষান্তর করিয়া]

এক্ষণে দুই বা তদধিক রাশির গুণফল শূন্য হইলে, উহাদের মধ্যে অন্তত একটি রাশির মান শূন্য হইবে। a এবং b বিভিন্ন বলিয়া ধনু বন্ধনীস্থিত রাশিমালার মান শূন্য হইতে পারে না ;

সুতরাং, $2cx+4ab=0$,

$$\therefore \quad x=-\frac{2ab}{c}.$$

উদা. 5. সমাধান কর : $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$.

যে হেতু, $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2\cdot\frac{x-a}{x-b}$;

সুতরাং, $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$;

উভয় পক্ষকে $\frac{x-b}{x-a}$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\frac{(x-2a+b)(x-b)}{(x+a-2b)(x-a)},$$

বা, $$\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-2bx+b^2}=\frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2bx+2ab-a^2};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2ax+a^2}=\frac{x^2-2bx+2ab-a^2}{x^2-2bx+b^2}$$

বা, $$1+\frac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}=1+\frac{2ab-a^2-b^2}{x^2-2bx+b^2};$$

$\therefore$ $$x^2-2ax+a^2=x^2-2bx+b^2,$$

বা, $$2x(a-b)=a^2-b^2;$$

$\therefore$ $$x=\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{1}{2}(a+b).$$

উদা. 6. সমাধান কর:

$$\frac{4}{x^2+6x+8}+\frac{x}{x^2+5x+6}-\frac{3}{x^2+7x+12}=\frac{8x-11}{2x-3}-4.$$

বামপক্ষস্থ ভগ্নাংশগুলির হরের গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিয়া,

$$\frac{4}{(x+2)(x+4)}+\frac{x}{(x+2)(x+3)}-\frac{3}{(x+3)(x+4)}=\frac{8x-11}{2x-3}-4,$$

বা, $$\frac{4(x+3)+x(x+4)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

বা, $$\frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

বা, $$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

বা, $$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2x-3};$$

$\therefore$ $$x+4=2x-3;$$

$\therefore$ $$x=7.$$

উদা. 7. সমাধান কর: $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2=\dfrac{x+2a+c}{x+2b+c}.$

বন্ধনী অপসারিত করিয়া,

$$\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+2bx+b^2}=\frac{x+2a+c}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$\frac{x^2+2ax+a^2}{x+2a+c}=\frac{x^2+2bx+b^2}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$x+\frac{a^2-cx}{x+2a+c}=x+\frac{b^2-cx}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$(a^2-cx)(x+2b+c)=(b^2-cx)(x+2a+c),$$

বা, $(a^2-c^2-2bc)x+a^2(2b+c)=(b^2-c^2-2ac)x+b^2(2a+c)$,

বা, $(a^2-b^2+2ac-2bc)x=b^2(2a+c)-a^2(2b+c)$,

বা, $(a-b)(a+b+2c)x=2ab(b-a)+c(b^2-a^2)$,

বা, $(a+b+2c)x=-2ab-c(a+b)$;

$\therefore \quad x=-\dfrac{2ab+bc+ac}{a+b+2c}.$

প্রশ্নমালা 67

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-8}{x-9}-\dfrac{x-9}{x-10}.$

2. $\dfrac{x-6}{x-7}-\dfrac{x-10}{x-11}=\dfrac{x-7}{x-8}-\dfrac{x-11}{x-12}.$

3. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}.$

4. $\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x+6}{x+5}.$

5. $\dfrac{3-2x}{1-2x}-\dfrac{2x-5}{2x-7}=1-\dfrac{4(x^2-1)}{7-16x+4x^2}.$

6. $\left(\dfrac{x-6}{x+7}\right)^2=\dfrac{(x-7)(x-5)}{(x+6)(x+8)}.$

7. $\left(\dfrac{x+10}{x-13}\right)^2=\dfrac{(x+8)(x+12)}{(x-11)(x-15)}.$

8. $\dfrac{x-2}{\cdot 05}-\dfrac{x-4}{\cdot 0625}=56.$

9. $\cdot 5x+\dfrac{\cdot 02x+\cdot 07}{\cdot 03}-\dfrac{x+2}{9}=9\cdot 5.$

10. $\dfrac{x}{3x-\cdot 3}=\dfrac{15x+7\cdot 5}{45x-\cdot 5}.$

11. $\dfrac{a}{bx+b-a}-\dfrac{b}{ax+a-b}=\dfrac{a^2-b^2}{abx+a^2-b^2}.$

12. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}.$

13. $\dfrac{1}{x-b^2-c^2-a^2}-\dfrac{1}{x-b^2-c^2-d^2}$

$$=\frac{1}{x+b^2+c^2-a^2}-\frac{1}{x+b^2+c^2-d^2}.$$

14. $\left(\dfrac{x-5}{x-6}\right)^3=\dfrac{x-4}{x-7}.$ 15. $\left(\dfrac{3x-2a-b}{3x-a-2b}\right)^3=\dfrac{x-a}{x-b}.$

16. $\left(\dfrac{3x-28}{3x-26}\right)^3=\dfrac{x-10}{x-8}.$

17. $\dfrac{12}{x^2+12x+35}+\dfrac{x}{x^2+11x+30}-\dfrac{6}{x^2+13x+42}$

$$=\frac{24x-7}{3x-1}-8.$$

18. $\dfrac{x}{x^2-9x+18}-\dfrac{16}{x^2-4x-12}+\dfrac{5}{x^2-x-6}=6-\dfrac{18x-49}{3x-8}.$

19. $\left(\dfrac{x+6}{x-3}\right)^2=\dfrac{x+14}{x-4}.$ 20. $\left(\dfrac{x-7}{x-11}\right)^2=\dfrac{x-17}{x-25}.$

ষোড়শ অধ্যায়

সরল সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী

197. সরল সমীকরণ-সাহায্যে প্রশ্ন-সমাধান-প্রণালী সপ্তম অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে আরও কতকগুলি সরল সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্ন সমাধান করা হইবে।

উদা. 1. সংখ্যা-বিষয়ক প্রশ্ন।

তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার প্রথম অঙ্ক দ্বিতীয় অঙ্কের, এবং দ্বিতীয় অঙ্ক তৃতীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। সংখ্যাটি উল্টাভাবে লিখিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহা পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা 594 কম। সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, তৃতীয় অঙ্কটি x; তাহা হইলে দ্বিতীয়টি $2x$ এবং প্রথমটি $4x$.

সুতরাং সংখ্যাটি $= 4x.100 + 2x.10 + x = 421x$.

উল্টাভাবে লিখিলে, নূতন সংখ্যাটি

$$= x.\ 100 + 2x.\ 10 + 4x = 124x.$$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $421x - 124x = 594$,

বা, $297x = 594$;

$\therefore \quad x = 2.$

$\therefore$ প্রথম অঙ্ক 8, দ্বিতীয়টি 4 এবং তৃতীয়টি 2. সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা $= 842$.

উদা. 2. সময়- ও কার্য-বিষয়ক প্রশ্ন।

কোন কার্য ক 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। ক 9 দিন কাজ করিলে পর, খ আসিয়া কার্যে যোগদান করিল এবং তাহারা একসঙ্গে কার্যটির অবশিষ্ট অংশ 3 দিনে সম্পন্ন করিল। খ একাকী ঐ কার্য কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ?

মনে কর, খ কার্যটি x দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। যে হেতু ক 1 দিনে কার্যটির $\frac{1}{16}$ অংশ সম্পন্ন করে, সুতরাং সে 9 দিনে কার্যটির $\frac{9}{16}$ অংশ সম্পন্ন করিবে। অতএব কার্যটির অবশিষ্ট $\frac{7}{16}$ অংশ ক ও খ একসঙ্গে 3 দিনে সম্পন্ন করে।

কিন্তু **ক** ও **খ** একসঙ্গে কার্যটির $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{x}\right)$ অংশ 1 দিনে সম্পন্ন করে।

সুতরাং, $3\times\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{16}$,

বা, $\frac{3(x+16)}{16x}=\frac{7}{16}$;

∴ $48(x+16)=7.16x$,

বা, $48x+768=112x$,

বা, $64x=768$,

∴ $x=12$.

সুতরাং **খ** একাকী কার্যটি 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে।

উদা. 3. স্রোতের অনুকূলে এবং প্রতিকূলে গমন-বিষয়ক প্রশ্ন।

স্থির জলে দাঁড় বাহিয়া কোন নৌকার নাবিকগণ ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে যাইতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে যাইতে তাহাদের যে সময় লাগে তাহা, স্রোতের অনুকূলে যাইতে যে সময় লাগে উহার তিনগুণ হইলে স্রোতের বেগ কত নির্ণয় কর।

মনে কর, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় x মাইল।

সুতরাং স্রোতের অনুকূলে যাইবার সময়ে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $8+x$ মাইল, এবং স্রোতের প্রতিকূলে যাইবার সময়ে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $8-x$ মাইল হইবে।

∴ প্রশ্নানুসারে, $8+x=3(8-x)$,

বা, $4x=16$;

$x=4$.

সুতরাং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 4 মাইল।

উদা. 4. বেগ- ও সময়-বিষয়ক প্রশ্ন।

একখানি এক্সপ্রেস ট্রেন অপরাহ্ণ 3 টার সময়ে বৃস্টল হইতে যাত্রা করিয়া অপরাহ্ণ 6 টার সময়ে লণ্ডনে পৌঁছিল। অন্য একখানি সাধারণ ট্রেন লণ্ডন হইতে অপরাহ্ণ 1 টা 30 মিনিটের সময়ে যাত্রা করিয়া অপরাহ্ণ 6 টার সময়ে বৃস্টলে পৌঁছিল। কখন তাহাদের পরস্পর সাক্ষাৎ হইয়াছিল ?

মনে কর, বৃস্টল হইতে লণ্ডনের দূরত্ব x মাইল। তাহা হইলে এক্সপ্রেস ট্রেনখানির বেগ ঘণ্টায় $\frac{1}{3}x$ মাইল এবং সাধারণ ট্রেনখানির বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{4\frac{1}{2}} = \frac{2x}{9}$ মাইল।

1 টা 30 মিনিট হইতে 3 টার মধ্যে সাধারণ ট্রেনখানি $\frac{2}{9}x \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x$ মাইল যায়।

সুতরাং অপরাহ্ণ 3 টা হইতে ট্রেন দুইখানি ঘণ্টায় $\frac{1}{3}x$ মাইল এবং $\frac{2}{9}x$ মাইল বেগে একে অন্যের দিকে যায়।

উহারা একত্র ঘণ্টায় $\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x = \frac{5}{9}x$ মাইল চলে, এবং উহাদের দূরত্ব $\frac{2}{3}x$ মাইল; সুতরাং অপরাহ্ণ 3 টার $\frac{2}{3}x \div \frac{5}{9}x = \frac{2x}{3} \times \frac{9}{5x} = \frac{6}{5}$ ঘণ্টা $= 1$ ঘ. 12 মি. পরে ট্রেন দুইখানির পরস্পর সাক্ষাৎ হইবে, অর্থাৎ অপরাহ্ণ 4 টা 12 মিনিটের সময়ে উহাদের সাক্ষাৎ হইবে।

উদা. 5. ক্রয়- ও বিক্রয়-সম্বন্ধীয় প্রশ্ন।

একটি ঘোড়া এবং একখানি গাড়ী মোট 90 পাউণ্ডে ক্রয় করা হইল। ঘোড়াটিকে শতকরা 12 হারে লাভ এবং গাড়ীখানিকে শতকরা 4 হারে ক্ষতি করিয়া বিক্রয় করিলে ঘোড়া এবং গাড়ীতে সর্বশুদ্ধ শতকরা 6 হারে লাভ হয়। গাড়ীখানি কত মূল্যে ক্রয় করা হইয়াছিল ?

মনে কর, গাড়ীখানির ক্রয়মূল্য x পাউণ্ড; তাহা হইলে ঘোড়াটির ক্রয়-মূল্য $(90 - x)$ পাউণ্ড।

গাড়ীখানি শতকরা 4 হার লোকসানে বিক্রয় করা হইয়াছিল, সুতরাং ক্ষতির পরিমাণ $= \frac{4}{100}x$ পাউণ্ড। অতএব গাড়ীখানির বিক্রয়মূল্য $= x - \frac{4}{100}x = x(1 - \frac{4}{100})$ পাউণ্ড।

ঘোড়ার মূল্যের উপর শতকরা 12 হারে লাভ $= (90 - x).\frac{12}{100}$ পাউণ্ড লাভ। সুতরাং ঘোড়ার বিক্রয়মূল্য $= (90 - x) + (90 - x).\frac{12}{100} = (90 - x)\ (1 + \frac{12}{100})$ পাউণ্ড, সুতরাং ঘোড়া এবং গাড়ীর মোট বিক্রয়মূল্য

$$= x\left(1 - \frac{4}{100}\right) + (90 - x)\ \left(1 + \frac{12}{100}\right) \text{ পাউণ্ড ;}$$

প্রশ্নানুসারে, ইহা 90 পাউণ্ডের উপর শতকরা 6 হারে লাভের সমান ;

সুতরাং, $x(1-\frac{4}{100})+(90-x)(1+\frac{12}{100})=90(1+\frac{6}{100})$,

বা, $\frac{24}{25}x+\frac{504}{5}-\frac{28}{25}x=\frac{477}{5}$,

বা, $\frac{4}{25}x=\frac{504-477}{5}=\frac{27}{5}$,

$\therefore \quad x=\frac{27}{5}\times\frac{25}{4}=\frac{135}{4}=33\frac{3}{4}$.

সুতরাং গাড়ীখানির ক্রয়মূল্য 33 পা. 15 শি.

উদা. 6. মিশ্রণ-বিষয়ক প্রশ্ন।

দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুগ্ধ আছে। ঐ দুইটি পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 এবং 3 : 4. প্রথম পাত্রের 3 গ্যালনের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের কত গ্যালন মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 6 : 7 হইবে ?

মনে কর, দ্বিতীয় পাত্র হইতে x গ্যালন লইতে হইবে।

প্রথম পাত্রের 3 গ্যালনে $\frac{3\cdot 4}{7}=\frac{12}{7}$ গ্যালন দুগ্ধ আছে,

দ্বিতীয় পাত্রের x গ্যালনে $x\,.\,\frac{3}{7}=\frac{3}{7}x$ গ্যালন দুগ্ধ আছে ;

সুতরাং $(3+x)$ গ্যালন নূতন মিশ্রণের মধ্যে $(\frac{12}{7}+\frac{3}{7}x)$ গ্যালন দুগ্ধ আছে।

অতএব নূতন মিশ্রণে দুগ্ধ এবং জলের অনুপাত

$$(\tfrac{12}{7}+\tfrac{3}{7}x):(3+x)-(\tfrac{12}{7}+\tfrac{3}{7}x).$$

প্রশ্নানুসারে এই অনুপাতটি 6 : 7 এর সমান,

$$\therefore \quad \frac{12+3x}{7}:\frac{9}{7}+\frac{4x}{7}=6:7,$$

$$\text{বা,} \quad \frac{12+3x}{9+4x}=\frac{6}{7};$$

$$\therefore \quad 24x+54=21x+84,$$

$$\text{বা,} \quad 3x=30,$$

$$\therefore \quad x=10.$$

সুতরাং প্রথম পাত্রের 3 গ্যালনের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের 10 গ্যালন মিশ্রিত করিতে হইবে।

উদা. 7. ঘড়ি-সম্বন্ধীয় প্রশ্ন।

5 টা এবং 6 টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন একত্র হইবে ?

5 টার সময়ে ঘণ্টার কাঁটা 5 এর উপর এবং মিনিটের কাঁটা 12 এর উপর

থাকে। এক ঘণ্টায় ঘণ্টার কাঁটা 5 টি মিনিটের ঘর এবং মিনিটের কাঁটা 60 টি মিনিটের ঘর যায়। সুতরাং মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটের ঘর গেলে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{1}{12}$ মিনিটের ঘর যায়।

এক্ষণে মনে কর, 5 টা বাজিয়া x মিনিট পরে কাঁটা দুইটি একত্র হইবে। এই সময়ের মধ্যে মিনিটের কাঁটা x টি মিনিটের ঘর, এবং ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ টি মিনিটের ঘর যায়।

যে হেতু কাঁটা দুইটি এই সময়ে একত্র হইবে, সুতরাং

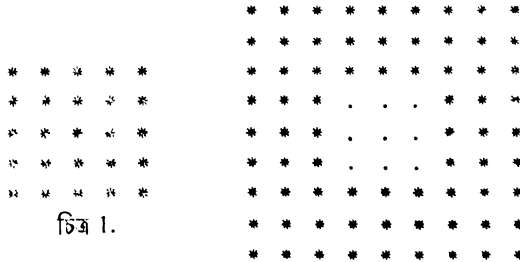
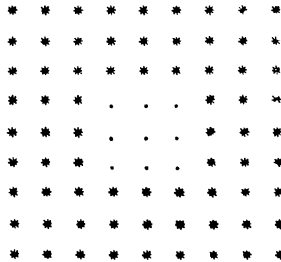
$$x = 25 + \tfrac{1}{12}x,$$

বা, $\frac{11}{12}x = 25$; $\therefore$ $x = \frac{300}{11}$ মিনিট $= 27$ মি. $16\frac{4}{11}$ সে.

সুতরাং 5 টা বাজিয়া 27 মি. $16\frac{4}{11}$ সে. সময়ে কাঁটা দুইটি একত্র হইবে।

উদা. 8. **বর্গ-রচনা-বিষয়ক প্রশ্ন**।

[প্রত্যেক সারি এবং প্রত্যেক পাটিতে সমান-সংখ্যক ব্যক্তির (বা অন্য কোন বস্তুর) সমাবেশকে **সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র** (solid square) বলে। (চিত্র 1.)

উক্ত সমাবেশের ঠিক মধ্যস্থল হইতে যদি একটি সমভাবে অবস্থিত সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র অপসৃত হয়, তাহা হইলে যে সমাবেশ রচিত হইবে তাহাকে **অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র** (hollow square) বলে। শূন্য স্থান হইতে বহিঃসীমা পর্যন্ত একটি পাটিতে (বা একটি সারিতে) যদি a-সংখ্যক ব্যক্তি থাকে তাহা হইলে এই অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটি 'a-গভীরতা-বিশিষ্ট' অথবা ইহার 'গভীরতা a' অথবা ইহা 'a-গভীর' (a-deep) এইরূপ বলা হয়। (চিত্র 2.)

চিত্র 1.

চিত্র 2.

দ্বিতীয় চিত্রের অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের গভীরতা 3. ইহার শূন্য স্থানগুলি বিন্দু-দ্বারা চিহ্নিত হইয়াছে।

যদি কোন অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের গভীরতা b হয়, এবং ইহার বহিঃসারিতে a সংখ্যক ব্যক্তি থাকে তাহা হইলে এই বর্গক্ষেত্রের সমুদয় ব্যক্তির সংখ্যা $a^2-(a-2b)^2$. দ্বিতীয় চিত্রে সবশুদ্ধ $9^2-(9-2.3)^2=9^2-3^2=72$টি '*' চিহ্ন আছে।]

একটি সৈন্যদলে 1000 লোক আছে। ইহাদিগকে একটি অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে সন্নিবিষ্ট করিলে বর্গক্ষেত্রটির গভীরতা 10 হয়। বর্গক্ষেত্রটির বহিঃসারির সৈন্য-সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর, বহিঃসারিতে x-সংখ্যক সৈন্য আছে। অতএব বর্গক্ষেত্রটির শূন্য স্থান পূর্ণ করিতে $(x-20)^2$ -সংখ্যক সৈন্য আবশ্যক হইবে।

সুতরাং অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের সমুদয় সৈন্যসংখ্যা $= x^2-(x-20)^2$.

অতএব প্রশ্নানুসারে,

$$x^2-(x-20)^2=1000,$$

বা, $$40x-400=1000,$$

বা, $$40x=1400;$$

$$\therefore \quad x=35.$$

সুতরাং বহিঃসারির সৈন্যসংখ্যা 35.

উদা 9. একদল যাত্রী একটি হোটেলে আসিয়া দেখিল যে, প্রত্যেকে একটি করিয়া শয়ন-গৃহ অধিকার করিলে 6 টি শয়ন-গৃহ কম পড়ে, এবং দুই জন করিয়া একটি ঘরে শয়ন করিলে 6 টি ঘর খালি থাকে। তিন জন করিয়া একটি ঘরে শয়ন করিলে কয়টি ঘর খালি থাকিবে ?

মনে কর, যাত্রিসংখ্যা x ; তাহা হইলে শয়ন-গৃহের সংখ্যা $x-6$.

দুই জন করিয়া প্রত্যেক ঘরে শয়ন করিলে $\frac{1}{2}x$ টি ঘরের প্রয়োজন হইবে। সুতরাং $(x-6)-\frac{1}{2}x=6$; $\therefore$ $x=24$; $\therefore$ শয়ন-গৃহের সংখ্যা $=18$.

প্রত্যেক ঘরে তিন জন করিয়া শয়ন করিলে $\frac{24}{3}=8$ টি ঘরের প্রয়োজন হইবে. সুতরাং $18-8=10$ টি ঘর পড়িয়া থাকিবে।

উদা. 10. কোন ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, বিস্তার অপেক্ষা 8 ফুট অধিক। ঘরের ভিতরে মেঝের চতুষ্পার্শ্বে 2 ফুট বিস্তার-বিশিষ্ট স্থানের ক্ষেত্রফল 240 বর্গফুট হইলে ঘরের দৈর্ঘ্য কত ?

মনে কর, ঘরের দৈর্ঘ্য x ফুট। তাহা হইলে ইহার বিস্তার $(x-8)$ ফুট, এবং ইহার ক্ষেত্রফল $=x(x-8)$ বর্গফুট।

মেঝের চতুষ্পার্শ্বস্থ 2 ফুট বিস্তার-বিশিষ্ট স্থান বাদ দিলে একটি আয়তক্ষেত্র অবশিষ্ট থাকিবে ; ইহার দৈর্ঘ্য ঘরের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা, এবং ইহার বিস্তার ঘরের বিস্তার অপেক্ষা 4 ফুট কম হইবে।

সুতরাং এই অংশের ক্ষেত্রফল $=(x-4)(x-8-4)=(x-4)(x-12)$ বর্গফুট, অতএব 2 ফুট বিস্তার-বিশিষ্ট স্থানের ক্ষেত্রফল $=x(x-8)-(x-4)(x-12)$ বর্গফুট।

প্রশ্নানুসারে, $x(x-8)-(x-4)(x-12)=240,$

বা, $-8x+16x-48=240,$

বা, $8x=288;$

$\therefore \quad x=36.$

সুতরাং ঘরের দৈর্ঘ্য 36 ফুট।

প্রশ্নমালা 68

1. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যার দ্বিতীয় এবং তৃতীয় অঙ্কের প্রত্যেকটি উহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী অঙ্ক অপেক্ষা 1 বেশি। অঙ্ক তিনটির সমষ্টি 12 হইলে, সংখ্যাটি কত ?

2. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যার প্রথম অঙ্ক তৃতীয় অঙ্কের দ্বিগুণ, এবং দ্বিতীয় অঙ্ক তৃতীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। সংখ্যাটি উল্টাভাবে লিখিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহা পূর্বসংখ্যা অপেক্ষা 396 কম। সংখ্যাটি কত ?

3. 127 কে এমন 4 অংশে বিভক্ত কর যে, প্রথম অংশে 18 যোগ করিলে, দ্বিতীয় হইতে 5 বিয়োগ করিলে, তৃতীয়টিকে 6 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থটিকে $2\frac{1}{2}$ দ্বারা ভাগ করিলে, ফলগুলি একই হইবে।

[সঙ্কেত। সাধারণ ফলটিকে x ধর ; তাহা হইলে প্রথম অংশ $=x-18$ ইত্যাদি।]

4. কোন ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 5 বেশি। উহার লব ও হরে 1 যোগ করিলে যে ভগ্নাংশটি পাওয়া যায় তাহার বিপরীত (reciprocal) ভগ্নাংশের সহিত প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের দ্বিগুণ যোগ করিলে যোগফল 3 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[সঙ্কেত। মনে কর, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{x+5}$.]

5. একটি কার্য ক 12 দিনে এবং ক ও খ একত্র 4 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। খ একাকী কার্যটি কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

6. কোন কার্য ক 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। ক 2 দিন কাজ করিলে পর, খ আসিয়া কার্যে যোগদান করিল এবং তাহারা একত্র কার্যটির অবশিষ্ট অংশ 10 দিনে শেষ করিল। খ একাকী ঐ কার্য কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ?

7. কোন কার্য A, 9 দিনে এবং B উহার দ্বিগুণ সময়ে সম্পন্ন করিতে পারে। A এক দিনে যতটুকু সম্পন্ন করে, C এক দিনে উহার $\frac{3}{4}$ অংশ সম্পন্ন করে। A, B এবং C একত্র সমস্ত কার্য কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

8. একটি চৌবাচ্চায় A এবং B দুইটি নল সংযুক্ত আছে। A র দ্বারা চৌবাচ্চাটি 3 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দেওয়া হইল এবং এক ঘণ্টা পরে B নলটি বন্ধ করা হইল। নলটি বন্ধ করিবার পর 1 ঘ. 24 মি. এ চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইল। B এর দ্বারা চৌবাচ্চাটি কত সময়ে পূর্ণ হইবে ?

9. ক ও খ একত্র 10 ঘণ্টায় একখণ্ড জমির শস্য কাটিতে পারে; ক একাকী 15 ঘণ্টায় পারে। খ একাকী কত ঘণ্টায় পারিবে ?

10. একখণ্ড জমির শস্য খ 12 ঘণ্টায় এবং গ 10 ঘণ্টায় কাটিতে পারে, ক ও খ একত্র ঐ জমির শস্য 6 ঘণ্টা 40 মিনিটে কাটিতে পারে। ক ও গ একত্র কত ঘণ্টায় কাটিতে পারিবে ?

11. স্থির জলে দাঁড় বাহিয়া কোন নৌকার নাবিকগণ ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে যাইতে পারে। অনুকূল স্রোতে দাঁড় বাহিয়া তাহারা এক ঘণ্টায় যত দূর যায় প্রতিকূল স্রোতে তত দূর যাইতে তাহাদের 5 ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

12. স্রোতের প্রতিকূলে কিছু দূর যাইতে একখানি স্টীমারের যে সময় লাগে তাহা, স্রোতের অনুকূলে তত দূর যাইবার সময়ের তিন গুণ। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল হইলে, স্থির জলে স্টীমারের বেগ কত ?

13. স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল হইলে একখানি স্টীমারের স্রোতের প্রতিকূলে কিছু দূর যাইয়া ফিরিয়া আসিতে যে সময় লাগে তাহা, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল হইলে স্টীমারখানির স্রোতের প্রতিকূলে তত দূর যাইবার সময়ের দ্বিগুণ। স্টীমারখানির বেগ স্থির জলে কত ?

14. পূর্বাহ্ণ 8 টার সময়ে দুইখানি ট্রেন A এবং B দুইটি স্টেশন হইতে ঘণ্টায় যথাক্রমে 30 এবং 40 মাইল বেগে পরস্পরের অভিমুখে যাইতে লাগিল। অন্য একখানি ট্রেন পূর্বাহ্ণ 9 টা 30 মিনিটের সময়ে A স্টেশন হইতে যাত্রা করিয়া ঘণ্টায় 32 মাইল বেগে Bএর দিকে অগ্রসর হইল। A এবং Bএর দূরত্ব 200 মাইল হইলে তৃতীয় ট্রেনখানি কখন অন্য ট্রেন দুইখানি হইতে সমান দূরে থাকিবে ?

[সঙ্কেত। মনে কর, তৃতীয় ট্রেনখানি পূর্বাহ্ণ 8 টার x ঘণ্টা পরে ট্রেন দুইখানি হইতে সমান দূরে অবস্থিত হইল; সুতরাং তৃতীয় ট্রেনখানি এই অবস্থানের পূর্বে $x-\frac{3}{2}$ ঘণ্টায় $32(x-\frac{3}{2})$ মাইল পথ অতিক্রম করিয়াছিল।

A B′ C A′ B

মনে কর, পূর্বাহ্ণ 8 টার x ঘণ্টা পরে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ট্রেনখানি যথাক্রমে A′, B′ এবং C তে অবস্থান করে। তাহা হইলে $AA'=30x$ এবং $BB'=40x$. ইহা হইতে AC এর দূরত্ব নির্ণয় কর, এবং উহাকে $32(x-\frac{3}{2})$ এর সহিত সমিত করিয়া একটি সমীকরণ গঠন কর।]

15. AB, 220 মাইল দীর্ঘ একটি রেলপথ, এবং তিনখানি ট্রেন P, Q, R যথাক্রমে ঘণ্টায় 25, 20 এবং 30 মাইল বেগে ইহার উপর দিয়া যায়। P পূর্বাহ্ণ 7 টার সময়ে, Q পূর্বাহ্ণ 8 টা 15 মিনিটের সময়ে A হইতে B এর অভিমুখে এবং R পূর্বাহ্ণ 10 টা 30 মিনিটের সময়ে B হইতে A র অভিমুখে যাত্রা করিল। কখন এবং কোথায় P ট্রেনখানি Q এবং R হইতে সমদূরবর্তী হইবে ?

16. P হইতে Q এর দূরত্ব $3\frac{1}{2}$ মাইল। A ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে গাড়ী করিয়া, এবং B ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পায়ে হাঁটিয়া একই সময়ে P হইতে Q এর অভিমুখে যাত্রা করিল। A, Q এ পৌঁছিবার পর 15 মিনিট অপেক্ষা করিয়া সেই গাড়ীতেই ফিরিয়া আসিল। ফিরিবার সময়ে কোথায় B এর সহিত A র সাক্ষাৎ হইবে ?

17. A এবং B কোন বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে যাত্রা করিয়া একই দিকে যাইতে লাগিল। A ঘণ্টায় 5 বার এবং B ঘণ্টায় 3 বার সম্পূর্ণ পথটি পরিভ্রমণ করিতে পারে। কখন তাহারা সর্বপ্রথম একটি ব্যাসের বিপরীত প্রান্তে আসিবে ?

[সঙ্কেত। যখন তাহারা একটি ব্যাসের বিপরীত প্রান্তে আসিবে তখন তাহাদের দূরত্ব সম্পূর্ণ পথটির অর্ধেকের সমান।]

18. A এবং B, 10 মাইল পরিধি-বিশিষ্ট কোন বৃত্তাকার পথের এক স্থান হইতে একই সময়ে যাত্রা করিয়া, বিপরীত দিকে চলিতে আরম্ভ করিল। A ঘণ্টায় 4 মাইল ও B ঘণ্টায় 5 মাইল যায়। কখন তাহারা দ্বিতীয় বার একটি ব্যাসের বিপরীত প্রান্তে আসিবে ?

[সঙ্কেত। A এবং B একত্র 15 মাইল পথ চলিবে।]

19. কোন ভ্রমণ-প্রতিযোগিতায় A এবং B একটি বৃত্তাকার পথের এক স্থান হইতে যাত্রা করিল। যাত্রা করিবার আধ ঘণ্টার মধ্যে A পথটিকে 3 বার এবং B, $4\frac{1}{2}$ বার পরিভ্রমণ করিল। যদি তাহারা বরাবর তাহাদের স্ব স্ব বেগে চলিতে থাকে, তাহা হইলে কতক্ষণ পরে তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?

20. একব্যক্তি কতকগুলি কমলালেবু কিনিয়াছিল—একটা 2 পয়সা হিসাবে যতগুলি কিনিল, একটা 3 পয়সা হিসাবে ঠিক ততগুলি কিনিয়াছিল। কমলালেবুগুলি গড়ে কি দরে বিক্রয় করিলে শতকরা 20 হারে তাহার লাভ হইবে ?

21. এক ব্যক্তি একটি ঘোড়া এবং একখানি গাড়ী মোট 100 পাউণ্ড মূল্যে ক্রয় করিল। গাড়ীখানিকে শতকরা 40 লাভে, এবং ঘোড়াটিকে শতকরা 5 ক্ষতি করিয়া বিক্রয় করিলে ঐ ব্যক্তির সর্বশুদ্ধ শতকরা 4 হারে লাভ হয়। ঘোড়াটি কত মূল্যে ক্রয় করা হইয়াছিল ?

22. একব্যক্তি 3 পয়সায় একটি হিসাবে কতকগুলি, 2 পয়সায় একটি হিসাবে উহার দ্বিগুণ-সংখ্যক এবং পয়সায় একটি হিসাবে উহার ত্রিগুণ-সংখ্যক কমলালেবু ক্রয় করিল। কমলালেবুগুলি গড়ে কি দরে বিক্রয় করিলে শতকরা 50 হারে লাভ হইবে? যদি লাভের পরিমাণ 1 টা. 11 আ. 6 পা. হয়, তাহা হইলে সর্বশুদ্ধ কতগুলি কমলালেবু ক্রয় করা হইয়াছিল?

23. একব্যক্তি 4500 টাকায় 15 কাঠা জমি ক্রয় করিল। সে উহার 10 কাঠা প্রতি কাঠা 320 টাকা দরে বিক্রয় করিল। অবশিষ্ট জমি কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার মোটের উপর শতকরা 20 হারে লাভ হইবে?

24. দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুগ্ধ আছে। ঐ দুইটি পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3 এবং 3 : 2. প্রথম পাত্রের 10 সেরের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের কত সের মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 5 : 4 হইবে?

25. 140 ঘন ইঞ্চি তাম্র এবং টিনের মিশ্রণের ওজন 42 পাউণ্ড 3 আউন্স। এক ঘন ইঞ্চি তাম্রের ওজন $5\frac{1}{4}$ আউন্স এবং এক ঘন ইঞ্চি টিনের ওজন $4\frac{1}{4}$ আউন্স হইলে, ঐ মিশ্রণে প্রত্যেক ধাতু কত আউন্স করিয়া আছে?

26. এক প্রকার তাম্রমিশ্রিত স্বর্ণে শতকরা 60 ভাগ স্বর্ণ, এবং অন্য এক প্রকার তাম্রমিশ্রিত স্বর্ণে শতকরা 50 ভাগ স্বর্ণ আছে। এই দুই প্রকার স্বর্ণ-দ্বারা প্রস্তুত 10 আউন্স ওজনের একটি দণ্ডে শতকরা 56 ভাগ স্বর্ণ আছে। দণ্ডটিতে প্রত্যেক প্রকারের মিশ্রণ কত আউন্স করিয়া আছে?

27. 1 টা এবং 2 টার মধ্যে কখন্ ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্র হইবে?

28. 3 টা এবং 4 টার মধ্যে কখন্ ঘড়ির কাঁটা দুইটি ঠিক বিপরীত দিকে থাকে?

29. আমি 3 টা এবং 4 টার মধ্যে বাহিরে গিয়াছিলাম। 4 টা এবং 5 টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখি যে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান-পরিবর্তন করিয়াছে। আমি কখন বাহিরে গিয়াছিলাম?

30. একটি সৈন্যদলকে দুইটি বিভিন্ন সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রে (solid rectangle) সন্নিবিষ্ট করা যায়। আয়তক্ষেত্র-দ্বয়ের একটির গভীরতা 5 এবং অন্যটির গভীরতা 10. দ্বিতীয়টির সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা প্রথমটির সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা 15 কম। সৈন্যদলের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

[সঙ্কেত। মনে কর, মোট সৈন্যসংখ্যা x. তাহা হইলে $\frac{1}{5}x = \frac{1}{10}x + 15$.]

31. একটি সৈন্যদলকে দুইটি বিভিন্ন সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রে সন্নিবিষ্ট করা যায়। আয়তক্ষেত্র-দ্বয়ের একটির গভীরতা 9 এবং অন্যটির গভীরতা 6. দ্বিতীয়টির সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা প্রথমটির সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা 8 বেশি। সৈন্যদলের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

32. একটি সৈন্যদলকে অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে (hollow square) সন্নিবিষ্ট করিলে, উহার গভীরতা 3 হয়। সৈন্যদলের লোকসংখ্যা 96 হইলে, ঐ বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারির সৈন্যসংখ্যা নির্ণয় কর।

33. একটি সৈন্যদলকে দুইটি বিভিন্ন অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে সন্নিবিষ্ট করা যায়। বর্গক্ষেত্র-দ্বয়ের একটির গভীরতা 3 এবং অন্যটির গভীরতা 2. দ্বিতীয়টির বহিঃসারির সৈন্যসংখ্যা প্রথমটির বহিঃসারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা 2 অধিক হইলে, সৈন্যদলের লোকসংখ্যা কত?

34. 20 ফুট দীর্ঘ এবং 12 ফুট উচ্চ একটি ঘরের চারটি দেওয়াল কাগজ দিয়া মুড়িতে প্রতি বর্গগজে 8 আ. হিসাবে 48 টাকা ব্যয় হয়। ঘরটির বিস্তার কত?

35. একটি বর্গক্ষেত্রাকার উদ্যানের ভিতরে চারধারে একটি 10 ফুট বিস্তৃত পথ আছে। পথটির কালি 10,000 বর্গফুট হইলে, উদ্যানটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

36. একদল যাত্রী একটি হোটেলে আসিয়া দেখিল যে, প্রত্যেকে একটি করিয়া শয়ন-গৃহ অধিকার করিলে a-সংখ্যক শয়ন-গৃহ কম পড়ে, এবং এক ঘরে দুই জন করিয়া শয়ন করিলে b-সংখ্যক ঘর খালি থাকে। এক ঘরে তিন জন করিয়া শয়ন করিলে কয়খানি ঘর খালি থাকিবে?

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

I

1. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+1$ কে $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}-1$ দ্বারা গুণ কর।

2. x^5-y^5 কে $x-y$ দ্বারা ভাগ কর।

3. যদি $x+y=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^3(y+1)-y^3(x+1)-x+y=0.$$

4. $a+b=x$ এবং $a-b=y$ হইলে, $16\ (a^4+a^2b^2+b^4)$ রাশিমালাটিকে x এবং y দ্বারা প্রকাশ কর।

5. $8x^3-27y^3+18xy+1$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

6. x^3-y^3 এবং $x^4+x^2y^2+y^4$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. x^3+a^3, x^3-a^3, $x^4+a^2x^2+a^4$ এবং x^2-ax+a^2 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. সরল কর: $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{(x+y)^2}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

9. সমাধান কর: $\dfrac{3}{x-6}-\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x+5}=0.$

10. **ক** ও **খ** একসঙ্গে একটি কার্য 6 দিনে শেষ করিতে পারে। **ক** এর একা কার্যটি শেষ করিতে 10 দিন লাগিলে, **খ** এর কত দিন লাগিবে ?

II

1. $a+b+1-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ কে $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+1$ দ্বারা গুণ কর।

2. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ কে $y-z$ দ্বারা ভাগ কর।

3. $729x^3-8y^6$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$

$$=(a+b)(b+c)(c+a).$$

5. x^3-4x^2+5x-2, x^3-3x-2 এবং x^3-7x+6 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. x^2+x-6, x^2+2x-3 এবং x^2-3x+2 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. সরল কর: $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$.

8. সমাধান কর: $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}=0$.

9. সমাধান কর: $\frac{1}{7}(2x-3)+\frac{1}{11}(3x-4)+\frac{1}{3}(4x-5)=7$.

10. দুইখানি ট্রেন একই সময়ে A এবং B স্টেশন হইতে যাত্রা করিয়া ঘণ্টায় 20 এবং 30 মাইল বেগে পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইল। A এবং B এর দূরত্ব 100 মাইল হইলে, কখন্ ট্রেন দুইখানির সাক্ষাৎ ঘটিবে?

III

1. $4x^2+6xy+9y^2$ কে $4x^2-6xy+9y^2$ দ্বারা গুণ কর।

2. $(a+b)^3+(c-a)^3-(b+c)^3$ কে $a+b$ দ্বারা ভাগ কর।

3. $6x^2+7xy-20y^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

4. যদি $x+\dfrac{1}{x}=100$ হয়, তাহা হইলে $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. যদি $a+b+c=10$ এবং $a^2+b^2+c^2=20$ হয়, তাহা হইলে $ab+bc+ca$ এর মান কত?

6. x^2+5x+6, x^2-x-12 এবং x^2-2x-8 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. সরল কর: $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-3a+2}\cdot\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+5a+4}\cdot\dfrac{a+4}{a+2}$.

8. সমাধান কর: $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{c}+\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{x-(a+b+c)}{abc}$.

9. স্রোতের অনুকূলে কিছু দূর যাইতে একখানি স্টীমারের যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে তত দূর যাইতে উহার তিন গুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 মাইল হইলে, স্থির জলে স্টীমারের বেগ কত?

10. 4টা এবং 5টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্র হইবে?

IV

1. $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$ এবং $-a+b+c$ এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

2. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$ কে $2a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর।

3. যদি $a+b+c=8$ এবং $a^2+b^2+c^2=30$ হয়, তাহা হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত?

4. সরল কর : $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc$.

5. x^4+x^2+1 এবং $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}}{\dfrac{1}{y^2z^2}+\dfrac{1}{z^2x^2}+\dfrac{1}{x^2y^2}} \cdot \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

7. সমাধান কর : $\dfrac{2x-3}{11}-\dfrac{3x+4}{5}+\dfrac{4x+7}{7}=1$.

8. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x-5}=\dfrac{3}{x-4}$.

9. একব্যক্তি একখণ্ড জমি ক্রয় করিয়া উহার $\frac{1}{5}$ অংশ শতকরা 5 হারে ক্ষতি করিয়া বিক্রয় করিল। অবশিষ্ট জমি শতকরা কত লাভে বিক্রয় করিলে মোটের উপর শতকরা 5 হারে তাহার লাভ হইবে?

10. একটি সৈন্যদলকে অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে সন্নিবিষ্ট করিলে উহার গভীরতা 4 হয়। সৈন্যদলের লোকসংখ্যা 160 হইলে, ঐ বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারির সৈন্য-সংখ্যা কত?

V

1. যদি $a+b+c=7$ এবং $ab+bc+ca=16$ হয়, তাহা হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত?

2. সরল কর : $(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2$.

3. প্রমাণ কর যে, $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc.$$

4. $a^2+ab+bc+ca$ এবং $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. $81x^4+9604y^4$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

6. সরল কর : $\dfrac{a^4+x^4+ax(a^2+x^2)+a^2x^2}{a^5-x^5} \div \dfrac{a^2+x^2+ax}{a^3-x^3}.$

7. যদি $x=\dfrac{a-b}{m-c}$, $y=\dfrac{b-c}{m-a}$ এবং $z=\dfrac{c-a}{m-b}$ হয়, তাহা হইলে $x+y+z+xyz$ এর মান কত ?

8. সমাধান কর : $\dfrac{2x+9}{5}-\dfrac{x+2}{4(x-\frac{1}{3})}=\dfrac{4x+3}{10}.$

9. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x+b}.$

10. 9 টা এবং 10 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি ঠিক বিপরীত দিকে থাকিবে ?

VI

1. $\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}-3\frac{4}{5}x-\frac{7}{3}x^3+\frac{3}{10}x^2$ কে $\frac{1}{2}x-\frac{7}{3}$ দ্বারা ভাগ কর।

2. গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) $(a^3+1)^2-(a+1)^2$; (ii) $x^3y^3-9x^2y^2+20xy.$

3. যদি $x=\dfrac{1+a}{1-a}$ এবং $y=\dfrac{1-a}{1+a}$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x-y}{1+xy}$ এর মান কত ?

4. সরল কর : $\dfrac{a(b^2-c^2)}{bc}+\dfrac{2b(c^2-a^2)}{ca}-\dfrac{c(2b^2-a^2)}{ab}.$

5. সমাধান কর : $\dfrac{9x^2+18x+3}{18x^2+27x+5}=\dfrac{x+2}{2x+3}.$

6. $4x^2-6yz-(9y^2+z^2)$, $9y^2+4xz-(4x^2+z^2)$ এবং $z^2-12xy-(4x^2+9y^2)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{a+b}{1-ab}+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}} \div \dfrac{\dfrac{a+b}{1-ab}-\dfrac{a-b}{1+ab}.}{1+\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}$

8. সমাধান কর :

$$\frac{1\cdot05x+10}{50}+\frac{1\cdot35x-2}{20}-\frac{1\cdot5x-18}{10}+\frac{1\cdot5x-3}{15}=1\cdot854.$$

9. একব্যক্তি টাকায় 20 টা হিসাবে যতগুলি, টাকায় 30 টা হিসাবে ঠিক ততগুলি কমলালেবু ক্রয় করিল। কমলালেবুগুলি টাকায় 22 টা হিসাবে বিক্রয় করিয়া সে মোটের উপর 2 টাকা লাভ করিল। সে মোট কতগুলি লেবু ক্রয় করিয়াছিল ?

10. কয়েকজন লোককে একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে (solid square) সন্নিবিষ্ট করা যায়। সম্মুখ সারিতে ঐ বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারিব লোকসংখ্যা অপেক্ষা 1 জন লোক কম এবং পার্শ্ব সারিতে 2 জন লোক কম এইরূপ একটি সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রে (solid rectangle) উহাদিগকে সন্নিবিষ্ট করিলে উহাদের 43 জন অবশিষ্ট থাকে। লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

VII

1. $a^3(1-x)+ab(a-b)(x+y)+b^3(1+y)$ কে $a(1-x)+b(1+y)$ দ্বারা ভাগ কর।

2. সরল কর :

$$\left(2-\frac{3x}{y}+\frac{9x^2-2y^2}{y^2+2xy}\right)\div\left\{\frac{1}{y}-\frac{x+y}{(y-2x)(y+x)-4x^2}\right\}.$$

3. যদি $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$ এবং $y=\dfrac{a(b+1)}{ab+1}$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ এর মান কত ?

4. গুণনীয়ক নির্ণয় কর : (a) $x^{12}+x^6-2$;

(b) x^8-16y^8.

5. যদি $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$

6. সমাধান কর:

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$$

7. সমাধান কর: $\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{x-12}{x-11}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-10}{x-9}.$

8. সমাধান কর: $\left(\dfrac{x+a+b}{x-a+b}\right)^2=\dfrac{x+2a+2b}{x-2a+2b}.$

9. দুগ্ধ এবং জলের কোন মিশ্রণে দুগ্ধ এবং জলের অনুপাত 5 : 4. এই মিশ্রণের কত গ্যালনের সহিত 10 সের দুগ্ধ মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে দুগ্ধ এবং জলের অনুপাত 5 : 1 হইবে ?

10. একব্যক্তি কোন শহরে যাইবার নিমিত্ত হাঁটিতে আরম্ভ করিল। সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ যাইবার পর সে দেখিল যে, সমস্ত পথ এরূপ বেগে হাঁটিলে শহরে পৌছিবার নির্দিষ্ট সময়ে সে মাত্র সমস্ত পথের $\frac{5}{6}$ অংশ যাইতে পারে। সে তাহার বেগ ঘণ্টায় এক মাইল বাড়াইয়া দিয়া নির্দিষ্ট সময়ে শহরে পৌছিল। তাহার হাঁটিবার বেগ প্রথমে কত ছিল নির্ণয় কর।

VIII

1. $8x^9-12x^8+6x^7-21x^6+28x^5-9x^4+30x^3-27x^2-27$ কে $2x^3-x^2-3$ দ্বারা ভাগ কর।

2. সরল কর: $\dfrac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\cdot\dfrac{x^3-x}{(x^2-1)^2}+\dfrac{x^2+1}{x^6-1}.$

3. সমাধান কর: $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}-\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2=0.$

4. সরল কর:

$$\frac{x^2-64}{x^2+24x+128}\cdot\frac{x^2+12x-64}{x^3-64}+\frac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}.$$

5. যদি $b^2 = ac$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 b^2 c^2}.$$

6. যদি $x + y + z = 6$ এবং $xy + yz + zx = 9$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} = 0.$$

7. সমাধান কর : $\dfrac{3x-14}{x-5} + \dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{x-9}{x-10} + \dfrac{4x-25}{x-6}$.

8. $m^3 - m^{-\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} + n^{-3}$ কে $m^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ কর।

9. জলের ভিতর ওজন লইলে, 19 পাউণ্ড স্বর্ণেব ওজন 18 পাউণ্ড এবং 10 পাউণ্ড রৌপ্যের ওজন 9 পাউণ্ড হয়। 106 পাউণ্ড ওজনের একতাল রৌপ্য-মিশ্রিত স্বর্ণের জলের ভিতরকার ওজন 99 পাউণ্ড হইলে, তালটিতে কি পরিমাণ স্বর্ণ এবং কি পরিমাণ বৌপ্য আছে ?

10. একটি সৈন্যদলকে দুইটি বিভিন্ন অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রে (hollow square) সন্নিবিষ্ট করা যায়। বর্গক্ষেত্র-দ্বয়ের একটির গভীরতা 5 এবং অন্যটির গভীরতা 7. উভয় বর্গক্ষেত্রে বহিঃসারির সৈন্যসংখ্যা সমান হইলে সৈন্যদলের লোকসংখ্যা কত নির্ণয় কর।

সপ্তদশ অধ্যায়

দুরূহ সূত্রাবলী

198. পূর্ব-প্রমাণিত সূত্রসমূহের পুনরুল্লেখ

ইতিপূর্বে কতকগুলি প্রয়োজনীয় গুণফলের সূত্র প্রমাণিত হইয়াছে। প্রয়োজন মত উল্লেখের সুবিধার জন্য উহাদিগকে নিম্নে একস্থানে লিপিবদ্ধ করা গেল।

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$ অনু. 65.

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$ অনু. 67.

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$ অনু. 69.

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b).$ অনু. 73.

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=a^3-b^3-3ab(a-b).$ অনু. 74.

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$ অনু. 75.

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$ অনু. 76.

(8) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$ অনু. 71.

(9) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$ অনু. 140.

(10) $ab=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2-(a-b)^2\right\}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

অনু. 142.

(11) $(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs.$ অনু. 143.

(12) $(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$ অনু. 144.

(13) $-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$. অনু. 147.

(14) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$. অনু. 146.

(15) $(b+c)(c+a)(a+b)$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$. অনু. 148.

(16) $(a+b+c)(bc+ca+ab)$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$. অনু. 149.

(17) $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$. অনু. 150.

(18) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$. অনু. 151.

(19) $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$. অনু. 152.

(20) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$. অনু. 153.

(21) $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$. অনু. 145.

(22) $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$.
$(b^n-c^n)+(c^n-a^n)+(a^n-b^n)=0$. অনু. 146.

(23) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$.
$a^n(b^n-c^n)+b^n(c^n-a^n)+c^n(a^n-b^n)=0$. অনু. 146.

199. অতিরিক্ত সূত্রাবলী

সাধারণ গুণনক্রিয়া-দ্বারা, অথবা উপরের সূত্রগুলির সাহায্যে সহজেই নিম্নলিখিত ফলগুলি পাওয়া যায় :—

(24) $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.

(25) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

(26) $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2ab+2bc+2ca$.

(27) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$
$$=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

(28) $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$.

(29) $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$.

(30) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

(31) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$.

200. সূত্রাবলীর প্রয়োগ

উদা. 1. $(3x+1)(2x+3)(4x+1)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত গুণনীয়ক-ত্রয়ের যে-কোন দুইটিকে, মনে কর, $(3x+1)$ এবং $(2x+3)$ কে, লইয়া প্রথমে গুণ কর। তাহা হইলে,

$$(3x+1)(2x+3)(4x+1)=(6x^2+11x+3)(4x+1).$$

এক্ষণে মনে কর, $6x^2+11x+3=a$ এবং $4x+1=b$, তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা

$$=ab=\{\tfrac{1}{2}(a+b)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(a-b)\}^2 \qquad \text{সূত্র (10)}$$
$$=\{\tfrac{1}{2}(6x^2+11x+3+4x+1)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(6x^2+11x+3-4x-1)\}^2$$
$$=\{\tfrac{1}{2}(6x^2+15x+4)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(6x^2+7x+2)\}^2.$$

মন্তব্য 1. সূত্র (10) দ্বারা দুইটি গুণনীয়ক-বিশিষ্ট যে-কোন গুণফলকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়, সুতরাং উপরি উক্ত তিনটির মধ্যে যে-কোন দুইটি গুণনীয়কের গুণফলকে একটি গুণনীয়করূপে লওয়া যাইতে পারে। অতএব উপরের উদাহরণের তিনটি বিভিন্ন সমাধান হইবে।

মন্তব্য 2. চার কিংবা তদধিক গুণনীয়ক-বিশিষ্ট গুণফলের ক্ষেত্রে গুণনীয়কগুলিকে যদৃচ্ছাক্রমে দুই ভাগে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক ভাগের গুণফলকে একটি গুণনীয়করূপে লইতে হয়।

উদা. 2. যদি $a=x+k$, $b=y+k$ এবং $c=z+k$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

সূত্র (20) অনুসারে, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(y+k-z-k)^2+(z+k-x-k)^2+(x+k-y-k)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$
$$=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

উদা. 3. সরল কর : $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2-(x+1)(x+2)$
$-(x+1)(x+3)-(x+2)(x+3)$

মনে কর, $x+1=a$, $x+2=b$ এবং $x+3=c$;

তাহা হইলে $b-c=-1$, $c-a=2$, $a-b=-1$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2\}=3.$$

প্রশ্নমালা 69

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :—

1. $(2x+3y)^2-2(x+y)(x+2y)$.
2. $(a+5b)^2+2(3a+4b)(2a-b)$.
3. $(x+3y+z)^2-2(x+2y)(y+z)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :—

4. $(2x+1)(x+2)(x+4)$.
5. $5x(3x+10)$.
6. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)$.
7. $8x^2-12xy+4y^2-14bx-49b^2$.

8. প্রমাণ কর যে, $(x+y+a+b)^2+(x+y-a-b)^2$
$$=2\{(x+y)^2+(a+b)^2\}.$$

9. যদি $x+y+z=9$ এবং $xy+yz+zx=26$ হয়, তাহা হইলে $x^2+y^2+z^2$ এর মান কত ?

10. যদি $x+y=a$ এবং $xy=b$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^3+y^3=a^3-3ab.$$

11. যদি $a-b=x$ এবং $ab=y$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$a^3-b^3=x^3+3xy.$$

12. যদি $u=x+\frac{1}{x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^4+\frac{1}{x^4}=u^4-4u^2+2.$$

সরল কর :

13. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$$+(c-a)(x-c)(x-a).$$

14. $(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c).$

15. প্রমাণ কর যে, $(y-z)(ax+y+z)+(z-x)(ay+z+x)$
$$+(x-y)(az+x+y)=0.$$

201. সূত্র

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

সূত্রটি অনু. 145 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

অনু. 153 এর সূত্র হইতে দেখা যায় যে, সূত্রটি নিম্নলিখিত-রূপেও লিখিত হইতে পারে :—

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে
$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

উদা. প্রমাণ কর যে, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
$=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

মনে কর, $a-b=x$, $b-c=y$ এবং $c-a=z$;
তাহা হইলে, $x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$.
এক্ষণে, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$
$$=0\ ;$$

$\therefore\quad (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

প্রশ্নমালা 70

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

1. $(x+y+1)(x^2+y^2+1-x-y-xy)$.
2. $(x-y-2)(x^2+y^2+xy+2x-2y+4)$.
3. $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a+b+1)$.
4. $(2x-3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2+12yz+6xy-8zx)$.

সরল কর :

5. $(2a-b-c)^3+(2b-c-a)^3+(2c-a-b)^3$
$-3(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$.
6. $(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3-3(a-2b)(2b-3c)(3c-a)$.
7. $2x-3y=1$ হইলে, $8x^3-27y^3-18xy$ এর মান কত হইবে ?
8. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$;
প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.
9. যদি $x=(b-c)(a-d)$, $y=(c-a)(b-d)$ এবং $z=(a-b)(c-d)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.
10. প্রমাণ কর যে, $x^3(cy-bz)^3+y^3(az-cx)^3+z^3(bx-ay)^3$
$=3xyz(cy-bz)(az-cx)(bx-ay)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

11. $m^3 - n^3 + 1 + 3mn$. 12. $x^3 + y^3 + 18xy - 216$.

13. $3s = a + b + c$ হইলে, $(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 - 3(s-a)(s-b)(s-c)$ এর মান কত ?

14. যদি $2s = a + b + c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 - 3(s-a)(s-b)(s-c) = \tfrac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$$

15. $x + y = 3$ হইলে, $x^3 + y^3 - 27 + 9xy$ এর মান কত ?

16. যদি $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $ax + by + cz = (a+b+c)(x+y+z)$.

17. $x + y + z = 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(x-2y)^3 + (y-2z)^3 + (z-2x)^3 = 3(x-2y)(y-2z)(z-2x)$.

202. সূত্র
$$-(b-c)(c-a)(a-b)$$
$$= a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$
$$= bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$$
$$= -\{a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\}.$$

সূত্রগুলি অনু. 146 এবং অনু. 147 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

উদা. 1. সরল কর :
$$(y-z)(a+x)^2 + (z-x)(a+y)^2 + (x-y)(a+z)^2.$$

মনে কর, $a + x = p$, $a + y = q$ এবং $a + z = r$.

তাহা হইলে, $q - r = (a+y) - (a+z) = y - z$;

এইরূপে, $r - p = z - x$ এবং $p - q = x - y$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= p^2(q-r) + q^2(r-p) + r^2(p-q)$
$$= -(q-r)(r-p)(p-q)$$
$$= -(y-z)(z-x)(x-y).$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2 = -(b-c)(c-a)(a-b).$$

মনে কর, $x-a=p$, $x-b=q$ এবং $x-c=r$;

তাহা হইলে, $p-q=b-a$, $q-r=c-b$ এবং $r-p=a-c$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= -p^2(q-r)-q^2(r-p)-r^2(p-q)$

$$=(p-q)(q-r)(r-p)$$
$$=(b-a)(c-b)(a-c)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

প্রশ্নমালা 71

1. প্রমাণ কর যে,

$$(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-a)(x-c)+(a-b)(x-a)(x-b)$$
$$=(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2.$$

2. সরল কর :

$$(x^2-yz)(y-z)+(y^2-zx)(z-x)+(z^2-xy)(x-y).$$

3. প্রমাণ কর যে,

$$(x+a^2+ab+ac)(b-c)+(x+b^2+bc+ba)(c-a)+(x+c^2+cb+ca)(a-b)=0.$$

4. প্রমাণ কর যে, $(x+2y)^2(y+z-2x)+(y+2z)^2(z+x-2y)+(z+2x)^2(x+y-2z)+(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)=0.$

5. প্রমাণ কর যে,

$$(x+a)(x+b)(a-b)+(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)$$
$$=(a+x)(a-x)(b-c)+(b+x)(b-x)(c-a)+(c+x)(c-x)(a-b)$$
$$=(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b).$$

6. প্রমাণ কর যে, $(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$
$$=x^2(y^4-z^4)+y^2(z^4-x^4)+z^2(x^4-y^4).$$

7. $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z)$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

8. সরল কর :
$$(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)$$
$$+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)$$
$$+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b).$$

203 সূত্র

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=(b+c)(c+a)(a+b)+abc \quad (i)$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc \quad (ii)$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc \quad (iii)$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc \quad (iv)$$

সূত্রগুলি অনু. 150 ও 149 এবং অনু. 146, উদা. 3তে আলোচিত হইয়াছে।

204. সূত্র $(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc \quad (i)$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \quad (ii)$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc \quad (iii)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc. \quad (iv)$$

অনু. 148, অনু. 146, উদা. 3 এবং অনু. 150এ সূত্রগুলি আলোচিত হইয়াছে।

উদা. 1. $(x+2y)$, $(2y+3z)$ এবং $(3z+x)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

উপরের সূত্র-অনুসারে,
$$(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$$
$$=x^2(2y+3z)+(2y)^2(3z+x)+(3z)^2(x+2y)+2x(2y)(3z)$$
$$=2x^2y+3x^2z+12y^2z+4xy^2+9xz^2+18yz^2+12xyz.$$

উদা. 2. যদি $s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)^2(s+a)+(s-b)^2(s+b)+(s-c)^2(s+c)+2(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$=(s+a)(s+b)(s+c).$$

মনে কর, $s-a=x$, $s-b=y$ এবং $s-c=z$;

তাহা হইলে,

$$y+z=(s-b)+(s-c)=2s-(b+c)=2s-(s-a)=s+a\ ;$$

এইরূপে, $z+x=s+b$ এবং $x+y=s+c$.

$\therefore$ বাম পক্ষ

$$=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$$
$$=(y+z)(z+x)(x+y)=(s+a)(s+b)(s+c).$$

প্রশ্নমালা 72

1. প্রমাণ কর : $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

2. সরল কর : $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
$$+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)-4xyz.$$

3. সরল কর :
$$(b+c)(c+a)(a+b)-(a+b+c)(ab+bc+ca)+2abc.$$

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :—

4. $(x+y)(y+2z)(2z+x)$. 5. $(x-3y)(3y-4z)(4z+x)$.

6. $(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)$.

7. $(x+3y+2z)(3xy+2zx+6yz)$.

8. প্রমাণ কর যে, $(yz-x^2)(y+z)+(zx-y^2)(z+x)$
$$+(xy-z^2)(x+y)=0.$$

9. প্রমাণ কর যে, $(ab+ac-a^2)(b+c)+(bc+ba-b^2)(c+a)$
$$+(ca+cb-c^2)(a+b)=6abc.$$

10. প্রমাণ কর যে, $(x+3y+4z)(3xy+4zx+12yz)-12xyz$
$$=(x+3y)(3y+4z)(4z+x).$$

205. সূত্র $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$

সূত্রটি অনু. 152 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

206. সূত্র $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

এই সূত্র-সাহায্যে যে-কোন ত্রিপদ রাশির ঘন নির্ণয় করা যায়, সূত্রটি অনু. 151 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

অনুসিদ্ধান্ত $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(b+c)(c+a)(a+b).$

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,

$(a+b+c)^3=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc.$

মনে কর, $b+c-a=x$, $c+a-b=y$ এবং $a+b-c=z$;

তাহা হইলে, $x+y+z=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)$
$$=a+b+c,$$

এবং $y+z=(c+a-b)+(a+b-c)=2a$,

এইরূপে, $z+x=2b$ এবং $x+y=2c$;

$\therefore$ $(a+b+c)^3=(x+y+z)^3$
$$=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+3.2a.2b.2c$$
$$=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc.$$

উদা. 2. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে
$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc$ এর মান কত ?

মনে কর, $s-a=x$, $s-b=y$ এবং $s-c=z$;

$\therefore$ $x+y+z=(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)$
$$=3s-2s=s;$$

এবং $y+z=(s-b)+(s-c)=2s-(b+c)=a$;

এইরূপে, $z+x=b$ এবং $x+y=c$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$
$$=(x+y+z)^3=s^3.$$

প্রশ্নমালা 73

1. $(ax+by+cz)(by+cz-ax)(cz+ax-by)(ax+by-cz)$ গুণফল নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :—

2. $(ax+by+cz)$; 3. $(x-y+z)$; 4. $(2x+y-z)$.

5. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $(a+b+c)^3=(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3$
$+(3c-a-b)^3+24(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

7. যদি $s=x+y+z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$8s^3=(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3(s+x)(s+y)(s+z)$.

8. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$s^3+(s-2a)^3+(s-2b)^3+(s-2c)^3=24(s-a)(s-b)(s-c)$.

207. উদ্‌ঘাতন (Involution) : দ্বিপদের ঘাতমালা

পূর্বে বর্ণিত হইয়াছে যে, কোন রাশিকে ঐ রাশি-দ্বারা এক বা একাধিক বার গুণ করিলে লব্ধ গুণফলকে ঐ রাশির ঘাত (power) বলে। এইরূপ স্থলে রাশিটিকে 'উদ্‌ঘাত' করা হইয়াছে, অথবা উহাকে কোন এক নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করা হইয়াছে এইরূপ বলা হয়। উদ্‌ঘাত করিবার প্রক্রিয়াকে **উদ্‌ঘাতন** বলে, এবং ঐ ঘাতের সমান রাশিমালাটিকে ইহার **বিস্তৃতি** (expansion) বলে। এই বিস্তৃতি-নির্ণয়ের প্রণালীকে **প্রসারণ** বলে।

ইতিপূর্বে দ্বিপদ এবং ত্রিপদ রাশিসমূহের বর্গ (square) এবং ঘন (cube) কিরূপে নির্ণয় করিতে হয় তাহা প্রদর্শিত হইয়াছে। বিস্তৃতি-সম্বন্ধীয় সাধারণ নিয়মাবলীর আলোচনা বর্তমান পুস্তকের আলোচ্য নহে; কেবলমাত্র দ্বিপদ রাশির ঘাতমালার বিস্তৃতি কি প্রকারে সাধারণ গুণন অপেক্ষা সহজে নির্ণয় করা যায় তাহাই এ স্থলে আলোচিত হইবে।

সাধারণ গুণন-ক্রিয়া-দ্বারা, অথবা অনু. 120 তে $a=b=c=\cdots$ লিখিলে, অর্থাৎ গুণনীয়কগুলির দ্বিতীয় পদগুলি পরস্পর সমান ধরিলে, নিম্নলিখিত সিদ্ধান্ত-গুলিতে উপনীত হওয়া যায় :—

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$ ইত্যাদি।

উল্লিখিত সিদ্ধান্ত হইতে $a+b$ আকারের দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাতের বিস্তৃতি (expansion) নির্ণয় করিবার উপযোগী নিম্নলিখিত নিয়মাবলী সহজেই পাওয়া যাইতে পারে :—

1. বিস্তৃতির অন্তর্গত পদসমূহের সংখ্যা দ্বিপদ রাশিটির ঘাতের সূচক অপেক্ষা 1 অধিক হয়।

2. দ্বিপদ রাশিটির ঘাতের যে সূচক থাকে, বিস্তৃতির প্রথম এবং শেষ পদে যথাক্রমে a এবং b এর সেই সূচক থাকে।

3. প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর প্রত্যেক পদে a র সূচক 1 করিয়া কমিয়া যায়, এবং b এর সূচক 1 করিয়া বাড়িয়া যায়।

4. বিস্তৃতির যে-কোন পদে a এবং b এর সূচকের সমষ্টি প্রদত্ত দ্বিপদ রাশিটির সূচকের সমান।

5. প্রথম পদটির সহগ 1 ; পরবর্তী যে-কোন পদের সহগ নির্ণয় করিতে হইলে, সেই পদের অব্যবহিত পূর্বপদের সহগকে তন্মধ্যস্থ a র সূচক-দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে পদটির পূর্ববর্তী পদগুলির সংখ্যা-দ্বারা ভাগ করিতে হয়। শেষ পদের সহগও 1.

লক্ষ্য করিবে যে, প্রথম এবং শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগগুলি পরস্পর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত। যে হেতু, $a-b=a+(-b)$; সুতরাং $a+b$ এর কোন ঘাতের বিস্তৃতিতে b এর স্থলে $-b$ লিখিলেই $a-b$ এর সমঘাতের বিস্তৃতি নির্ণীত হইতে পারে। কোনও পদে $-b$ এর অযুগ্ম ঘাত বর্তমান থাকিলে উহা ঋণ হয়, সুতরাং $a-b$ এর কোন ঘাতের বিস্তৃতিতে পদগুলি যথাক্রমে ধন এবং ঋণ হয়।

উদা. 1. $(x+y)^6$ কে প্রসারণ কর।

এ স্থলে, বিস্তৃতির পদসমূহের সংখ্যা $6+1$, অর্থাৎ 7 হইবে, এবং ইহার প্রথম এবং শেষ পদদ্বয় যথাক্রমে x^6 এবং y^6 হইবে।

প্রথম পদ $= x^6$

দ্বিতীয় পদ $= \frac{1\times 6}{1}x^5y = 6x^5y$;

তৃতীয় পদ $= \frac{6\times 5}{2}x^4y^2 = 15x^4y^2$;

চতুর্থ পদ $= \frac{15\times 4}{3}x^3y^3 = 20x^3y^3$;

পঞ্চম পদ $= \frac{20\times 3}{4}x^2y^4 = 15x^2y^4$;

ষষ্ঠ পদ $= \frac{15\times 2}{5}xy^5 = 6xy^5$;

সপ্তম অথবা শেষ পদ $= \frac{6\times 1}{6}y^6 = y^6$;

সুতরাং নির্ণেয় বিস্তৃতি $= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3$
$+15x^2y^4+6xy^5+y^6$.

উদা. 2. $(x-y)^4$ কে প্রসারণ কর।

এ স্থলে, $(x-y)^4 = \{x+(-y)\}^4$

$$= x^4+\frac{1\times 4}{1}x^3.(-y)+\frac{4\times 3}{2}x^2(-y)^2 + \frac{6\times 2}{3}x(-y)^3+\frac{4\times 1}{4}(-y)^4$$

$$= x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.$$

উদা. 3. সরল কর. $(1+a)^5-(1-a)^5$.

প্রদত্ত রাশিমালা $= (1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5)$
$-(1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5)$

$$= 2(5a+10a^3+a^5) = 2a(5+10a^2+a^4).$$

প্রশ্নমালা 74

প্রসারণ কর :

1. $(2x-1)^4$. 2. $(x-2)^5$. 3. $(ax+b)^6$.

4. $(x+y)^7$এর বিস্তৃতির পদসমূহের সংখ্যাত্মক (numerical) সহগগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে, $(1-x)^9$ এর বিস্তৃতির পদসমূহের সংখ্যাত্মক (numerical) সহগগুলির সমষ্টি শূন্য।

সরল কর :

6. $(2x+1)^4-(2x-1)^4$. 7. $(ax+b)^5+(ax-b)^5$.

8. যদি $x=5$ হয়, তাহা হইলে $x^4+4x^3+6x^2+4x-2$ এর মান কত ?

9. যদি $x=-3$ এবং $y=1$ হয়, তাহা হইলে $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ এর মান কত ?

10. প্রমাণ কর যে, $(3x-2y)^{30}$ এর বিস্তৃতির পদসমূহের সংখ্যাত্মক (numerical) সহগগুলিব বৈজিক সমষ্টি 1. [$x=y=1$ ধর।]

11. প্রমাণ কর যে, $(1-x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম পদসমূহের সংখ্যাত্মক সহগগুলির সমষ্টি যুগ্ম পদসমূহের সংখ্যাত্মক সহগগুলির সমষ্টির সমান।

অষ্টাদশ অধ্যায়

দুরূহ গুণনীয়ক ও অভেদাবলী

208. ইতিপূর্বে দ্বাদশ অধ্যায়ে সহজ সহজ রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়-প্রণালী আলোচিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে দুরূহ রাশিমালাসমূহের গুণনীয়ক নির্ণয় করিবার পক্ষে কতকগুলি অতি প্রয়োজনীয় সূত্র প্রদত্ত হইল। কি প্রকারে এই সকল সূত্র-সাহায্যে কতিপয় অভেদ প্রমাণিত হইতে পারে তাহাও প্রদর্শিত হইবে।

209. ax^2+bx+c আকারের রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়-প্রণালী পূর্বে প্রদর্শিত হইয়াছে। এক্ষণে ax^2+bx+c আকারে পরিবর্তনীয় রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করা হইবে।

উদা. 1. $3x^4-7x^2+2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালায় $x^2=y$ লিখিয়া,

$$3x^4-7x^2+2=3y^2-7y+2$$

$$=3y^2-6y-y+2=3y(y-2)-(y-2)$$

$$=(3y-1)(y-2)=(3x^2-1)(x^2-2).$$

উদা. 2. $5(x^2+1)^2-24(x^2+1)-5$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $x^2+1=y$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=5y^2-24y-5$

$$=(5y+1)(y-5)$$

$$=\{5(x^2+1)+1\}\times(x^2+1-5)$$

$$=(5x^2+6)(x^2-4).$$

উদা. 3. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)-15$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

গুণনীয়ক চারটিকে দুইটি দুইটি করিয়া এরূপভাবে সজ্যবদ্ধ করিতে হইবে যে, প্রত্যেক যুগ্মের গুণফলে x^2 এবং x-সম্বলিত পদ দুইটি একই হয়।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-4)(x+5)\}-15$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-20)-15$

$=(y-6)(y-20)-15$ [$x^2+x=y$ লিখিয়া]

$=y^2-26y+105=(y-5)(y-21)$

$=(x^2+x-5)(x^2+x-21).$

210. বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal Expression)

যে রাশিমালায় প্রথম এবং শেষপদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ সমান হয়, তাহাকে **বিপরীত** রাশিমালা বলে। সমান সহগ-বিশিষ্ট পদসমূহকে একত্র করিয়া উচ্চতর মানের (of higher degree) রাশির পরিবর্তে নিম্নতর মানের রাশি লিখিয়া চতুর্থ মানের বিপরীত রাশিমালাকে ax^2+bx+c আকারে রূপান্তরিত করা যায়। পরে পূর্বপ্রণালী-অনুসারে ইহার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+1)+(5x^3+5x)+8x^2$

$=(x^4+1)+5x(x^2+1)+8x^2$

$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+5x(x^2+1)+8x^2$

$=(x^2+1)^2+5x(x^2+1)+6x^2$

$=y^2+5xy+6x^2$ [$x^2+1=y$ লিখিয়া]

$=(y+2x)(y+3x)$

$=(x^2+1+2x)(x^2+1+3x)=(x+1)^2(x^2+3x+1).$

মন্তব্য। $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$ সমীকরণটিতে x এর স্থানে ইহার বিপরীত (reciprocal) $\frac{1}{x}$ লিখিলে সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না। এই জন্য এইরূপ সমীকরণকে বিপরীত সমীকরণ এবং ইহার বাম পক্ষকে বিপরীত রাশিমালা বলে।

উদা. 2. $4x^4-7x^3y-5x^2y^2+7xy^3+4y^4$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4x^4+4y^4)-(7x^3y-7xy^3)-5x^2y^2$

$=4(x^4+y^4)-7xy(x^2-y^2)-5x^2y^2$

$=4\{(x^2-y^2)^2+2x^2y^2\}-7xy(x^2-y^2)-5x^2y^2$

$=4(x^2-y^2)^2-7xy(x^2-y^2)+3x^2y^2$

$=4a^2-7axy+3x^2y^2$ [$a=x^2-y^2$ লিখিয়া]

$=(4a-3xy)(a-xy)$

$=\{4(x^2-y^2)-3xy\}\{x^2-y^2-xy\}$

$=(4x^2-3xy-4y^2)(x^2-xy-y^2)$.

211. দ্বিতীয় মানের (of the second degree) সমমাত্র (homogeneous) রাশিমালা

তিনটি অক্ষর-বিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের সমমাত্র রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয় নিম্নলিখিত নিয়মানুসারে করিতে হয় :—

1. রাশিটিকে উহার মধ্যস্থ যে-কোন একটি অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজাইতে হয়। (যে অক্ষরের বর্গের সহগ 1, সেই অক্ষরটি মনোনীত করাই সুবিধাজনক।)

2. যে সকল পদে মনোনীত অক্ষরটি না থাকে, তাহাদিগকে ঐ অক্ষরের বর্গের সহগ-দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের এইরূপ দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হয়, যাহাদের বীজগণিতীয় যোগফল উক্ত মনোনীত অক্ষরটির প্রথম ঘাতের সহগের সমান।

3. মনোনীত অক্ষরের প্রথম ঘাতের সহগকে নির্ণীত গুণনীয়কদ্বয়ের বৈজিক সমষ্টিরূপে লিখিয়া অনু. 160 এ বর্ণিত প্রক্রিয়ানুসারে কার্য করিতে হয়।

উদা. 1. $x^2+3y^2+2z^2+4xy+3zx+7yz$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

এ স্থলে, x^2 এর সহগ 1; সুতরাং রাশিমালাটিকে x এর ঘাতসমূহের ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজানই সুবিধাজনক।

এইরূপভাবে সাজাইলে, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(3y^2+2z^2+7yz)+(4y+3z)x+x^2.$$

এক্ষণে, $3y^2+2z^2+7yz$ এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $4y+3z$ হয়। গুণনীয়কদ্বয় $(3y+z)$ এবং $(y+2z)$.

মনে কর, $A=3y+z$ এবং $B=y+2z$;

তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা $=AB+(A+B)x+x^2$

$$=(A+x)(B+x)$$

$$=(x+3y+z)(x+y+2z).$$

উদা. 2. $2x^2-4y^2-3z^2-7xy-xz+13yz$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

x এর ঘাতসমূহের উর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(13yz-4y^2-3z^2)-(7y+z)x+2x^2$;

এ স্থলে, x^2 এর সহগ 2; সুতরাং $2(13yz-4y^2-3z^2)$ এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $-(7y+z)$ হয়। পরীক্ষা-দ্বারা দেখা যায় যে, $2(13yz-4y^2-3z^2)=(y-3z)(2z-8y)$, এবং $-(7y+z)=(y-3z)+(2z-8y)$.

এক্ষণে মনে কর, $A=y-3z$ এবং $B=z-4y$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(y-3z)(z-4y)+\{(y-3z)+2(z-4y)\}x+2x^2$$

$$=AB+(A+2B)x+2x^2=A(B+x)+2x(B+x)$$

$$=(A+2x)(B+x)=(2x+y-3z)(x-4y+z).$$

212. দুই অক্ষর-বিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের সাধারণ (general) রাশিমালা

এই জাতীয় রাশিমালার গুণনীয়ক-নির্ণয়-প্রণালী পূর্ব অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রণালীরই অনুরূপ; কারণ পূর্ব অনুচ্ছেদের সমমাত্র রাশিমালায় উহার তিনটি অক্ষরের যে-কোন একটির পরিবর্তে 1 লিখিলে এই জাতীয় রাশিমালা পাওয়া যায়।

উদা. $2a^2+2b^2+3-5ab-7a+5b$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(2a^2-5ab+2b^2)-(7a-5b)+3$
$=(2a-b)(a-2b)-(7a-5b)+3.$

এক্ষণে, $3(2a^2-5ab+2b^2)$ কে এমন দুইটি গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $-7a+5b$ হয়। পরীক্ষা-দ্বারা দেখা যায় যে, উহারা $(3b-6a)$ এবং $(2b-a)$.

মনে কর, $A=2a-b$ এবং $B=a-2b$,

তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা $=AB-(3A+B)+3$
$=(A-1)(B-3)$
$=(2a-b-1)(a-2b-3).$

213. তিন অক্ষর-বিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের সাধারণ (general) রাশিমালা

উদা. $x^2+2y^2+3z^2+3xy+4xz+5yz-6x-10y-14z+8$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

অনু. 211 এর প্রক্রিয়া-অনুসারে রাশিমালাটির দ্বিতীয় মানের পদগুলির গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিয়া রাশিমালাটিকে

$(x+y+z)(x+2y+3z)-(6x+10y+14z)+8$ আকারে লেখা যাইতে পারে।

এক্ষণে, $8(x+y+z)(x+2y+3z)$ এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $-(6x+10y+14z)$ হয়। গুণনীয়কদ্বয় $-(2x+2y+z)$ এবং $-(4x+8y+12z)$.

মনে কর, $A=x+y+z$ এবং $B=x+2y+3z$;

তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা
$=AB-2A-4B+8=A(B-2)-4(B-2)$
$=(A-4)(B-2)=(x+y+z-4)(x+2y+3z-2).$

প্রশ্নমালা 75

নিম্নলিখিত রাশিমালা-সমূহের গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

1. $10a^4x^4+19a^2x^2y^2-15y^4$.
2. $3(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)+2$.
3. $x(x+2)(x+3)(x+5)+8$.
4. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
5. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$.
6. $x^4-4x^3-10x^2-4x+1$.
7. $x^8-5x^6-12x^4-5x^2+1$.
8. $x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$.
9. $3x^2-y^2-z^2-2yz-2zx-2xy$.
10. $6x^2-8y^2-6z^2+2xy+16yz+5zx$.
11. $4x^2-12xy+9y^2-4x+6y-3$.
12. $x^2-2y^2-xy-2x-5y-3$.
13. $3x^2+zx+8x+6xy+2yz-2y+3z-3$.
14. $2x^2-xy+3zx-3x-y^2+3yz-3y-2z^2+4z-2$.

214. পরীক্ষা-দ্বারা দ্বিপদ গুণনীয়ক-নির্ণয়

যে-কোন রাশি উহার প্রত্যেক গুণনীয়ক-দ্বারা বিভাজ্য ; সুতরাং $x+a$ দ্বিপদ রাশিটি কোন রাশিমালার গুণনীয়ক কিনা তাহা নির্ণয় করিতে হইলে, $x+a$ দ্বারা ঐ রাশিমালাটি বিভাজ্য কিনা কেবলমাত্র তাহাই নির্ণয় করিতে হয়।

মনে কর, x^3+2x^2+3x-4 কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল Q, এবং x-বর্জিত ভাগশেষ R হয়।

তাহা হইলে, $x^3+2x^2+3x-4=(x-2)\times Q+R$.

ইহা একটি অভেদ, সুতরাং x এর মান যাহাই হউক না কেন ইহার উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে। অতএব উভয় পক্ষে $x=2$ লিখিয়া,

$$2^3+2.2^2+3.2-4=0\times Q+R=R\,;$$

$$\therefore\quad R=8+8+6-4=18.$$

ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে, x^3+2x^2+3x-4 কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকে, রাশিমালাটিতে x এর পবিবর্তে 2 লিখিলে তাহা পাওয়া যায়। যদি এইরূপে দেখা যায় যে, ভাগশেষ শূন্য হইয়াছে, তাহা হইলে বুঝিতে হইবে যে রাশিমালাটি উক্ত দ্বিপদ বাশি-দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব কোন রাশিমালা কোন দ্বিপদ রাশি $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য কিনা, অর্থাৎ দ্বিপদ রাশিটি ঐ রাশিমালার গুণনীয়ক কিনা তাহা নির্ণয় কবিতে হইলে, বাশিমালাটিতে $x+a=0$, অর্থাৎ $x=-a$ লিখিয়া দেখিবে যে, বাশিমালাটিব মান শূন্য হয় কিনা। যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয় তবে বুঝিতে হইবে যে, $x+a$ প্রদত্ত বাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

উদা. 1. $x-1$ দ্বিপদ রাশিটি x^3+3x^2-x-3 রাশিমালার গুণনীয়ক কিনা তাহা উপরি উক্ত নিয়মানুসারে নির্ণয় কব।

প্রদত্ত রাশিমালায় $x=1$ লিখিলে রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, সুতরাং $x-1$ উক্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

দ্রষ্টব্য। x-সমন্বিত কোন রাশিমালায় x এর পরিবর্তে 1 লিখিলে, রাশিমালাস্থ যে-কোন পদের মান সেই পদের সহগেব সমান হয়। সুতরাং কোনও রাশিমালায় সচিহ্ন সহগগুলির এবং ধ্রুবক রাশিটির বৈজিক যোগফল শূন্য হইলে, $x-1$ রাশিমালাটিব একটি গুণনীয়ক হইবে।

উদা. 2. $2x^3-9x^2+7x+6$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

x এর পরিবর্তে 1 লিখিলে রাশিমালাটির মান শূন্য হয় না; সুতরাং $x-1$ রাশি রাশিমালাটির গুণনীয়ক নহে।

x এর পরিবর্তে -1 লিখিলেও রাশিমালাটির মান শূন্য হয় না; সুতরাং $x+1$ও রাশিমালাটির গুণনীয়ক নহে।

রাশিমালায় $x=2$ লিখিলে, $2\times2^3-9\times2^2+7\times2+6=0$;

$$\therefore\quad x-2 \text{ একটি গুণনীয়ক।}$$

$x=3$ লিখিলে, $2\times3^3-9\times3^2+7\times3+6=0$;

$\therefore$ $x-3$ও একটি গুণনীয়ক। $x=-\frac{1}{2}$ লিখিলে দেখা যায় যে, অবশিষ্ট গুণনীয়কটি $2x+1$ হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=(x-2)(x-3)(2x+1)$.

215. ব্যাবহারিক প্রণালী

সময়ে সময়ে ঐরূপ পরীক্ষা-দ্বারা একটি দ্বিপদ গুণনীয়ক নির্ণয় করিলে, এবং পদগুলি সুবিধামত সঙ্ঘবদ্ধ করিলে অবশিষ্ট গুণনীয়কগুলি নির্ণয় করা যাইতে পারে। নিম্নের উদাহরণে এই প্রক্রিয়াটি প্রদর্শিত হইল।

উদা. x^3-3x^2+3x-2 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

x এর পরিবর্তে 1 লিখিলে রাশিমালাটির মান শূন্য হয় না; সুতরাং $x-1$ উহার গুণনীয়ক নহে।

$x=2$ লিখিলে রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, কারণ

$$2^3-3\times2^2+3\times2-2=0;$$

$$\therefore \quad x-2 \text{ একটি গুণনীয়ক।}$$

এ স্থলে সহজেই দেখা যায় যে, অন্য গুণনীয়কটি একটি ত্রিপদ রাশি হইবে। ইহা নির্ণয় করিবার জন্য $(x-2)$ কে নিম্নলিখিতরূপে তিনবার লেখ—

$$(x-2) \qquad (x-2) \qquad (x-2)$$

রাশিমালার প্রথম পদ x^3 পাইতে হইলে, প্রথম গুণনীয়কটিকে x^2 দ্বারা গুণ করিতে হইবে। অতএব,

$$x^2(x-2), \qquad (x-2), \qquad (x-2)$$

এইরূপ লেখ।

প্রথম গুণফলটি নির্ণয় করিলে x^3-2x^2 হয়; কিন্তু রাশিমালাটিতে $-3x^2$ এর প্রয়োজন; সুতরাং দ্বিতীয় বন্ধনীস্থ রাশিকে $-x$ দ্বারা গুণ করিতে হইবে।

$$x^2(x-2)-x(x-2), \qquad (x-2)$$

অতএব এইরূপ হইল।

প্রদত্ত রাশিমালায় x এর সহগ $+3$ রহিয়াছে, কিন্তু এ স্থলে x এর সহগ হইতেছে $+2$; $+3$ পাইতে হইলে তৃতীয় বন্ধনীস্থ রাশিকে 1 দ্বারা গুণ করিয়া রাখিতে হইবে। অতএব,

$$x^3-3x^2+3x-2=x^2(x-2)-x(x-2)+(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2-x+1).$$

তৃতীয় বা তদপেক্ষা উচ্চতর মানের রাশির একাধিক দ্বিপদ গুণনীয়ক থাকিলে উহাদিগকে উপরি উক্ত নিয়ম-অনুসারে নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা 76

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. x^3+x^2+x+1.
2. $x^3-6x^2+11x-6$.
3. x^3-7x-6.
4. $x^6+x^4-x^2-1$.
5. x^3-3x+2.
6. $3a^4-5a^3-8$.

$x-1, x-2$ এবং $x+1$ নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের গুণনীয়ক কিনা নির্ণয় কর :—

7. x^3+x^2-2x-8.
8. $x^3-5x^2-14x-8$.
9. $1-6x+12x^2-7x^3$.
10. $2x^3-3x^2+3x-1$.
11. a^3+7a^2-38 রাশিমালাটি $a-2$ দ্বারা বিভাজ্য কিনা নির্ণয় কর।
12. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$ এর সরল গুণনীয়কসমূহ নির্ণয় কর।

216. গুণনীয়ক-নির্ণয়ের বিবিধ প্রণালী

অনেক ক্ষেত্রে গুণনীয়ক-নির্ণয়ের কোন সাধারণ নিয়ম নির্দেশ করা সম্ভব হয় না ; এই সকল স্থলে পদগুলিকে আবশ্যক মত স্থানান্তরিত, বিশ্লেষণ এবং সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হয়। নিম্নে কতিপয় উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

I. পদগুলিকে আবশ্যক মত বিশ্লেষণ এবং সুবিধা মত সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া গুণনীয়ক-নির্ণয় :

উদা. 1. $8x^3+4x-3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(8x^3-1)+(4x-2)$
$=(2x-1)(4x^2+2x+1)+2(2x-1)$
$=(2x-1)(4x^2+2x+3)$.

উদা. 2. a^3+a^2+a-84 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^3-64)+(a^2-16)+(a-4)$
$=(a-4)(a^2+4a+16)+(a-4)(a+4)+(a-4)$
$=(a-4)\{(a^2+4a+16)+(a+4)+1\}$
$=(a-4)(a^2+5a+21).$

উদা. 3. $4x^4-12x^3+15x^2-9x+2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4x^4-12x^3+9x^2)+(6x^2-9x)+2$
$=(2x^2-3x)^2+3x(2x-3)+2$
$=x^2(2x-3)^2+3x(2x-3)+2$
$=a^2x^2+3ax+2$ [$a=2x-3$ লিখিয়া]
$=(ax+1)(ax+2)$
$=\{x(2x-3)+1\}\{x(2x-3)+2\}$
$=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x+2)$
$=(2x-1)(x-1)(2x^2-3x+2).$

II. পদগুলিকে আবশ্যক মত বিশ্লেষণ এবং অনু. 213 এ বর্ণিত প্রক্রিয়া অবলম্বন করিয়া গুণনীয়ক-নির্ণয় :

উদা. 1. $x^4+7x^3+21x^2+32x+20$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+7x^3+12x^2)+(9x^2+32x)+20$
$=(x^2+4x)(x^2+3x)+(9x^2+32x)+20.$

এক্ষণে $20(x^2+4x)(x^2+3x)$ এর এমন দুইটি গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $9x^2+32x$ হয়। স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, উহারা $5(x^2+4x)$ এবং $4(x^2+3x)$.

মনে কর, $A=x^2+4x$ এবং $B=x^2+3x$;

তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা $=AB+(5A+4B)+20$
$=(A+4)(B+5)$
$=(x^2+4x+4)(x^2+3x+5)$
$=(x+2)^2(x^2+3x+5).$

উদা. 2. x^4-7x^2+1 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4-9x^2)+2x^2+1$

$=(x^2-3x)(x^2+3x)+2x^2+1$

$=(x^2-3x)(x^2+3x)+\{(x^2-3x)+(x^2+3x)\}+1$

$=(x^2-3x)(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)$

$=(x^2-3x+1)(x^2+3x+1).$

উদা. 3. $x^3+8y^3+1-6xy$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3+8y^3)+(x^2-2xy+4y^2)-(x^2+4xy+4y^2)$
$+(x+2y)-(x+2y-1)$

$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)+(x^2-2xy+4y^2)$
$-\{(x+2y)(x+2y)-(x+2y)\}-(x+2y-1)$

$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2)-(x+2y)(x+2y-1$
$-(x+2y-1)$

$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2)-(x+2y-1)$
$(x+2y+1)$

$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2-x-2y+1).$

উদা. 4. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-24$

$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$

$=(m+10)(m+12)-24$ [$x^2+7x=m$ লিখিয়া]

$=m^2+22m+96$

$=(m+6)(m+16)$

$=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)$

[যে হেতু $m=x^2+7x$]

$=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16).$

প্রশ্নমালা 77

নিম্নলিখিত রাশিমালা-সমূহের গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

1. $x^3+4x^2-5.$
2. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y).$
3. $a^3-a^2-a-15.$
4. $3x^3-17x^2+19x+11.$

5. $x^3-12x-16.$ 6. $2x^3+3x^2+x+15.$

7. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1.$

8. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-48.$ 9. $9x^3+12x^2+7x+2.$

10. $(x+1)(x+5)(x+6)(x+2)-12.$

11. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-120.$

12. $x(x+1)(x+2)(x+3)-35.$

13. $(ab+1)^4-4ab(ab+1)^2-(a^2-b^2)^2.$

14. $x^2(y^2-z^2)+4xyz-(y^2-z^2).$ 15. $x^4-9x^2+30x-25.$

16. $2x^4+7x^3+16x^2+17x+12.$ 17. $a^4b-31a^2b^3+9b^5.$

18. $x^4+12x^3+18x^2-108x+17.$

19. $x^4+8x^3+12x^2-16x+3.$

20. $x^4+6x^3+5x^2-12x+3.$

217. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ এর গুণনীয়ক-নির্ণয়

মনে কর, $x=a+b+c$; তাহা হইলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=x(ab+bc+ca)-abc$

$=x^3-x^3+x(ab+bc+ca)-abc$

$=x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ca)-abc$

$=(x-a)(x-b)(x-c)$ [অনু. 144, উদা. 2.]

$=(a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)$

$=(b+c)(c+a)(a+b).$ [অনু. 150 দেখ]

অন্য প্রকারে, প্রদত্ত রাশিমালা

$=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$

$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$ [গুণ করিয়া,]

$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$

$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=(b+c)(c+a)(a+b).$

218. $E+2abc$ এবং $E+3abc$ এর **গুণনীয়ক-নির্ণয়**

এ স্থলে $E \equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$
$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

(i) $E+2abc = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$= a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+b^2c+bc^2$
[a র অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]
$= a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$
$= (b+c)(c+a)(a+b)$. [অনু. 148 দেখ ।]

(ii) $E+3abc = bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$= \{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}$
$+\{ab(a+b)+abc\}$
$= bc(b+c+a)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$
$= (a+b+c)(bc+ca+ab)$. [অনু. 149 দেখ ।]

অনুসিদ্ধান্ত $(E+3abc)-(E+2abc) = abc$
$= (a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)$;
পক্ষান্তর করিয়া, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$
$= (b+c)(c+a)(a+b)$.

219. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ এর **গুণনীয়ক-নির্ণয়**

প্রদত্ত রাশিমালা $= a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$
[a র অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]
$= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$= (b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$= (b-c)(a-b)(a-c) = -(b-c)(c-a)(a-b)$.

সুতরাং অনু. 146, উদা. 4 অনুসারে,

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) \quad (i)$$
$$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\} \quad (ii)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b). \quad (iii)$$

অনুসিদ্ধান্ত। লব্ধ ফলে a, b এবং c এর পরিবর্তে যথাক্রমে a^2, b^2 এবং c^2 লিখিয়া,

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(b+c)(c-a)(c+a)(a-b)(a+b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

220. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ এর গুণনীয়ক-নির্ণয়

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3(b-c)-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3$

[a র অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]

$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$
$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$$
$$=(b-c)(b^2c-ab^2+bc^2-abc-ac^2+a^3)$$

[b এর অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$$
$$=(b-c)(c-a)(bc-ac+b^2-a^2)$$

[c এর অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b+a)(b-a)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b-a)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

উদা. 1. সরল কর : $(b-c)(x^2+ax+a^2)+(c-a)(x^2+bx+b^2)$
$+(a-b)(x^2+cx+c^2)$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$
$+x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=x^2.\,0+x.\,0+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
$=(y+z)(z+x)(x+y)$.

বাম পক্ষ $=\{x(y+z)^2-2xyz\}+\{y(z+x)^2-2xyz\}+z(x+y)^2$
$=x\{(y^2+z^2+2yz)-2yz\}+y\{(z^2+x^2+2zx)-2zx\}$
$+z(x+y)^2$
$=\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)\}+z(x+y)^2$
$=\{xy^2+xz^2+yz^2+yx^2\}+z(x+y)^2$
$=\{z^2(x+y)+xy(x+y)\}+z(x+y)^2$
$=(x+y)\{z^2+xy+z(x+y)\}$
$=(y+z)\,(z+x)\,(x+y)$.

221. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ এর **গুণনীয়ক-নির্ণয়**

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$
[a র অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]
$=(b-c)\,\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$
$=(b-c)\,\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}$
[b এর অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]
$=(b-c)\,(c-a)\,\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$
$=(b-c)\,(c-a)\,\{c(b^2-a^2)+ab(b-a)\}$
[c এর অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া]
$=(b-c)\,(c-a)\,(b-a)\,\{c(b+a)+ab\}$
$=-(b-c)\,(c-a)\,(a-b)\,(ab+bc+ca)$.

প্রদত্ত রাশিমালাকে $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$ এইরূপে
অথবা, $-\{a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)\}$ এইরূপে
লেখা যায় ; অতএব

$$
\begin{aligned}
& a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2) \\
&= b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b) \\
&= -\{a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)\} \\
&= -(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca).
\end{aligned}
$$

প্রশ্নমালা 78

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-3abc.$
2. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc.$
3. $bc(b+c)-ca(c-a)-ab(b-a)-3abc.$
4. $x^2(y-z)+y^2(x-z)+z^2(x+y)-2xyz.$
5. $(x+y-z)(xy-zx-yz)+xyz.$
6. $(a^2+1)(b-c)+(b^2+1)(c-a)+(c^2+1)(a-b).$
7. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2).$
8. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3).$
9. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b).$
10. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$
11. $(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b).$
12. $(a+1)^3(b-c)+(b+1)^3(c-a)+(c+1)^3(a-b).$
13. $(x^2-bc)(b-c)+(x^2-ca)(c-a)+(x^2-ab)(a-b).$
14. $(a^3-1)(b-c)+(b^3-1)(c-a)+(c^3-1)(a-b).$
15. $bc(b-c)(x-a)^2+ca(c-a)(x-b)^2+ab(a-b)(x-c)^2.$
16. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$
17. $(1+b)(1+c)(b-c)+(1+c)(1+a)(c-a)$
$+(1+a)(1+b)(a-b).$

18. $x^6(y^2-z^2)+y^6(z^2-x^2)+z^6(x^2-y^2)$.

19. $(a^3+k)(b-c)+(b^3+k)(c-a)+(c^3+k)(a-b)$.

20. $(1+ab)(a+b)(a-b)+(1+bc)(b+c)(b-c)$
$$+(1+ca)(c+a)(c-a).$$

21. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$.

22. $x^2y^2(x^2-y^2)+y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2)$.

23. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

24. $ab(a-b)(1+c^2)+bc(b-c)(1+a^2)+ca(c-a)(1+b^2)$.

25. $(ax+y)(b^3-c^3)+(bx+y)(c^3-a^3)+(cx+y)(a^3-b^3)$.

26. $a^4(b^3-c^3)+b^4(c^3-a^3)+c^4(a^3-b^3)$.

27. $xy(x^3-y^3)+yz(y^3-z^3)+zx(z^3-x^3)$.

28. $(a^3+bc)(b-c)+(b^3+ca)(c-a)+(c^3+ab)(a-b)$.

29. $(y-z)(y+z)^2+(z-x)(z+x)^2+(x-y)(x+y)^2$.

30. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$.

প্রমাণ কর যে,

31. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=\mathrm{E}+6abc$.

32. $a^3+b^3+c^3+24abc$
$$=(a+b+c)^3-3\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}.$$

222. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ এর গুণনীয়ক-নির্ণয়

$$(a+b+c)^3=\{a^3+(b+c)^3\}$$
$$=a^3+3a(b+c)(a+b+c)+(b+c)^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)$$
$$+6abc;$$

$$\therefore\quad (a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$$
$$=3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\}$$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

223. $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর গুণনীয়ক-নির্ণয়

যে হেতু, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$;

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)\{a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\} \quad \cdots \quad (i)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}. \quad \cdots \quad (ii)$$

উদা. $x^3-y^3-3xy-1$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3x(-y)(-1)$

$$=\{x+(-y)+(-1)\}\{x^2+(-y)^2+(-1)^2-x(-y)-(-y)(-1)-(-1)x\}$$
$$=(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x).$$

প্রশ্নমালা 79

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

1. $x^3-y^3+z^3+3xyz.$
2. $2x^3+y^3-3x^2y.$
3. $27x^3-8y^3-1-18xy.$
4. $1-x^3-y^3-3xy.$
5. $(a-b)^3-(b-c)^3+(c-a)^3+3(b-c)(c-a)(a-b).$
6. $x=20,\ y=18$ এবং $z=16$ হইলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান কত ?
7. $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
8. $(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(3z-x)^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
9. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
10. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

11. $x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$ এবং $z=c+a-2b$ হইলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান কত ?

12. যদি $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}$ এর মান কত ?

13. $(a+2b-c)^3-(a+b)^3-(b-c)^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

14. $x=(a-b)(b-c)$, $y=(b-c)(c-a)$ এবং $z=(c-a)(a-b)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

15. যদি $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$ এবং $z=c^2-ab$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

16. প্রমাণ কর যে, $(by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3$
$$-3(by+az)(bz+ax)(bx+ay)$$
$$=(a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

17. $a+b+c=5$ এবং $ab+bc+ca=4$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত ?

224. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর **গুণনীয়ক-নির্ণয়**

প্রদত্ত রাশিমালা $=4b^2c^2-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
$$=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4-2c^2a^2-2a^2b^2+2b^2c^2)$$
$$=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$
$$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c).$$

225. a^5+b^5 এর **গুণনীয়ক-নির্ণয়**

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^5+a^4b-a^4b-ab^4+ab^4+b^5$
$$=a^4(a+b)-ab(a^3+b^3)+b^4(a+b)$$
$$=(a+b)\{a^4-ab(a^2-ab+b^2)+b^4\}$$
$$=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

এইরূপে, $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

প্রশ্নমালা 80

1. $2y^2z^2+8z^2x^2+8x^2y^2-16x^4-y^4-z^4$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
2. $a^4-(b^2-c^2)^2+b^4-(c^2-a^2)^2+c^4-(a^2-b^2)^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
3. $x=2\cdot5$, $y=3\cdot4$ এবং $z=4\cdot8$ হইলে, $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$ এর মান কত ?
4. প্রমাণ কর যে, $2(y+z)^2(z+x)^2+2(z+x)^2(x+y)^2$
$$+2(x+y)^2(y+z)^2-(x+y)^4-(y+z)^4-(z+x)^4$$
$$=16xyz(x+y+z).$$
5. x^7+y^7 এবং x^7-y^7 এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
6. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=16s(s-a)(s-b)(s-c).$$
7. $b+c-a=3$, $c+a-b=5$ এবং $a+b-c=7$ হইলে, $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$ এর মান নির্ণয় কর।
8. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

226. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$$
$$=(ax+by-1)^2+(ay-bx)^2.$$

বাম পক্ষ
$$=(x^2-2ax+a^2)+(y^2-2by+b^2)+a^2(x^2+y^2)$$
$$+b^2(x^2+y^2)-(a^2+b^2)-(x^2+y^2-1)$$
$$=(a^2x^2+b^2y^2-2ax-2by+2abxy+1)$$
$$+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$$
$$=(ax+by-1)^2+(ay-bx)^2.$$

উদা. 2. $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$ এবং $c=z^2-xy$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $c^2-ab=z(ax+by+cz)$.

$$\begin{aligned}c^2-ab&=(z^2-xy)^2-(x^2-yz)(y^2-zx)\\&=(z^4+x^2y^2-2xyz^2)-(x^2y^2-y^3z-x^3z+xyz^2)\\&=z^4-3xyz^2+y^3z+x^3z\\&=z(x^3+y^3+z^3-3xyz)\\&=z\{(x^3-xyz)+(y^3-xyz)+(z^3-xyz)\}\\&=z\{x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)\}\\&=z(ax+by+cz).\end{aligned}$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$$
$$=\{(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2.$$

মনে কর, $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$ এবং $z=a+b-2c$;

তাহা হইলে, $x+y+z=0$, এবং প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$2(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

এক্ষণে, $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=0$,

অথবা, $$x^2+y^2+z^2=-2(yz+zx+xy);$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া,

$$(x^2+y^2+z^2)^2=4(yz+zx+xy)^2 \quad \cdots \quad (1)$$

অথবা, $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$
$$=4(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2),$$

অথবা, $$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4&=2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+8xyz(x+y+z)\\&=2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\\&\qquad\qquad [\text{যে হেতু } x+y+z=0]\\&=2\{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)\}\\&=2(yz+zx+xy)^2; \quad \cdots \quad (2)\end{aligned}$$

(1) এবং (2) হইতে

$$\begin{aligned}2(x^4+y^4+z^4)&=4(yz+zx+xy)^2\\&=(x^2+y^2+z^2)^2.\end{aligned}$$

অতএব প্রদত্ত অভেদটি প্রমাণিত হইল।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)$
$$-(b+c)(c+a)(a+b)=2(a+b+c)^3+2abc.$$

মনে কর, $x=a+b+c$; তাহা হইলে $2a+b+c=x+a$,
$$2b+c+a=x+b \text{ এবং } 2c+a+b=x+c.$$

আবার $b+c=a+b+c-a=x-a$, $c+a=x-b$, $a+b=x-c$,

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-a)(x-b)(x-c)$
$$=\{x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\}$$
$$-\{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\}$$
$$=2(a+b+c)x^2+2abc$$
$$=2(a+b+c)^3+2abc \quad [\text{যে হেতু } a+b+c=x].$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $2x(y+z-x)+(z+x-y)(x+y-z)$
$$=2y(z+x-y)+(x+y-z)(y+z-x)$$
$$=2z(x+y-z)+(y+z-x)(z+x-y).$$

মনে কর, $a=y+z-x$, $b=z+x-y$ এবং $c=x+y-z$;
তাহা হইলে, $a+b=2z$, $b+c=2x$ এবং $c+a=2y$.

প্রথম রাশিমালা $=(b+c)a+bc=ab+bc+ac$;
দ্বিতীয় রাশিমালা $=(c+a)b+ca=ab+bc+ac$;
তৃতীয় রাশিমালা $=(a+b)c+ab=ab+bc+ac$;

প্রত্যেক রাশিমালা $ab+bc+ac$ এর সমান; অতএব উহারা পরস্পর সমান।

প্রশ্নমালা 81

প্রমাণ কর যে,

1. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4abc$$

2. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)$
$$+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2abc(a+b+c).$$

3. $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$
$$=(1+abc)(1-a^2-b^2-c^2-2abc).$$

4. $(b+c)(c+a)(a+b)-a^3-b^3-c^3$
$$=4abc+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

5. $(b-c+a^2)(b+c)+(c-a+b^2)(c+a)+(a-b+c^2)(a+b)$
$$=(b^2-c^2+a)(b^2+c^2)+(c^2-a^2+b)(c^2+a^2)$$
$$+(a^2-b^2+c)(a^2+b^2).$$

6. $(1+xy)(1-xy)(x-y)+(1+yz)(1-yz)(y-z)$
$$+(1+zx)(1-zx)(z-x)$$
$$=(yz+zx+xy)(y-z)(z-x)(x-y).$$

7. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$$=3xyz(y-z)(z-x)(x-y).$$

8. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$
$$=3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

9. $(y^2+yz+z^2)(y-z+x)+(z^2+zx+x^2)(z-x+y)$
$$+(x^2+xy+y^2)(x-y+z)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$$

10. $a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)$
$$+c(a-b)(x-a)(x-b)=-x(b-c)(c-a)(a-b).$$

11. $(3x-y-z)^3+(3y-z-x)^3+(3z-x-y)^3$
$$-3(3x-y-z)(3y-z-x)(3z-x-y)$$
$$=16(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

12. $b+c$, $c+a$ এবং $a+b$ রাশিগুলির যে-কোন একটির মান শূন্য হইলে, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ রাশিমালাটির মানও শূন্য হইবে।

227. সাপেক্ষ অভেদ (Conditional Identities)

উদা. 1. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. এই অতি প্রয়োজনীয় ফলটি নিম্নলিখিত চারটি বিভিন্ন উপায়ে প্রমাণিত হইতে পারে :—

(i) $a+b+c=0$; $\quad\therefore\ a+b=-c$;

ঘন করিয়া, $(a+b)^3=-c^3$, অথবা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$,

অথবা, $a^3+b^3+c^3+3ab(-c)=0,$

অথবা, $a^3+b^3+c^3-3abc=0.$

(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=-\{3abc-a^3-b^3-c^3\}$$
$$=-\{3abc+a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)\}$$
$$=-\{3abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}$$
$$=-(a+b+c)(ab+bc+ca)=0.$$

(iii) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$;

$$\therefore \quad 0^3=a^3+b^3+c^3+3(-a)(-b)(-c)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

(iv) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}$$
$$=0\times\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}=0.$$

উদা. 2. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab) \quad \cdots \quad (i)$$
$$=\tfrac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2) \quad \cdots \quad (ii)$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \quad (iii)$$

যে হেতু, $a+b+c=0$, অর্থাৎ $a+b=-c$;

$$\therefore \quad (a+b)^5=(-c)^5;$$

অথবা, $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5$;

$$\therefore \quad a^5+b^5+c^5=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$
$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=-5ab(-c)(a^2+ab+b^2)=5abc\{(a+b)^2-ab\}$$
$$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=-5abc(ab+bc+ca) \quad \cdots \quad (i)$$
$$=-\tfrac{5}{2}abc(2ab+2bc+2ca)=+\tfrac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2) \quad \cdots \quad (ii)$$

$[a+b+c=0; \quad \therefore \ 2ab+2bc+2ca=-(a^2+b^2+c^2)]$

$$=+\tfrac{5}{2}(a^2+b^2+c^2)\times\tfrac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) \quad \text{[উদা. 1]}$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$$

উদা. 3. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2.$$

$a+b+c=0$; $\therefore$ $a+b=-c$ এবং $(a+b)^7=(-c)^7$,

অথবা, $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7=-c^7$,

অথবা, $a^7+b^7+c^7=-7ab\{a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5\}$
$$=-7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$
$$=-7ab(-c)(ab+bc+ca)^2$$
$$=7abc(ab+bc+ca)^2.$$

উদা. 4. যদি $x+y+z+w=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^3+y^3+z^3+w^3=3(yzw+zxw+xyw+xyz).$$

যে হেতু, $x+y+z+w=0$, অর্থাৎ $x+y=-(z+w)$;

$\therefore$ $(x+y)^3=-(z+w)^3$,

বা $x^3+3xy(x+y)+y^3=-\{z^3+3zw(z+w)+w^3\}$;

বা $x^3+y^3+z^3+w^3=-3zw(z+w)-3xy(x+y)$
$$=-3zw(-x-y)-3xy(-z-w)$$
$$=3\{zw(x+y)+xy(z+w)\}$$
$$=3\{yzw+zxw+xyw+xyz\}.$$

উদা. 5. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)=abc.$$

$2(s-a)(s-b)(s-c)$
$$=2\{s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc\}$$
$$=2\{s^3-2s.s^2+(ab+bc+ca)s-abc\}$$
$$=-2s^3+2s(ab+bc+ca)-2abc.$$

আবার, $a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)$

$$=a\{s^2-(b+c)s+bc\}+b\{s^2-(c+a)s+ca\}+c\{s^2-(a+b)s+ab\}$$

$$=(a+b+c)s^2-\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\}s+3abc$$

$$=2s^3-2(ab+bc+ca)s+3abc\ ;$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=-2s^3+2s(ab+bc+ca)-2abc+2s^3-2(ab+bc+ca)s+3abc=abc.$

প্রশ্নমালা 82

যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

1. $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)=4(bc+ca+ab)^2.$
2. $(a^3+b^3+c^3)^3=27a^3b^3c^3.$
3. $(2b-c)^3+(2c-a)^3+(2a-b)^3=3(2b-c)(2c-a)(2a-b).$
4. $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc=0.$
5. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0.$
6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0.$
7. $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=2\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^4+b^4+c^4}{4}.$
8. $a^2(a^2-b^2-c^2)+b^2(b^2-c^2-a^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0.$
9. $(b-c)(b^3+c^3-xa^3)+(c-a)(c^3+a^3-xb^3)+(a-b)(a^3+b^3-xc^3)=0.$
10. $2\{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\}=3(a^4+b^4+c^4).$
11. $(ax-by)^3+(bx-cy)^3+(cx-ay)^3=3(ax-by)(bx-cy)(cx-ay).$
12. $(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3=3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab).$

নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রমাণ কর :—

13. $(y-z)(y+z-2x)^3+(z-x)(z+x-2y)^3$
$$+(x-y)(x+y-2z)^3=0.$$

14. $(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4$
$$=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2.$$

15. $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$
$$=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c).$$

16. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).$$

17. $(b+c-2a)(c+a-2b)+(c+a-2b)(a+b-2c)$
$$+(a+b-2c)(b+c-2a)=3\{(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)$$
$$+(c-a)(a-b)\}.$$

18. যদি $a+b+c+d=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$a^3+b^3+c^3+d^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=0.$$

19. যদি $a+b+c=s$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(s-a)+(s-b)+(s-c)=2s$;

(ii) $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2+s^2$;

(iii) $(a-b)(as+b^2-ac)+(b-c)(bs+c^2-ab)$
$$+(c-a)(cs+a^2-bc)=0$$

(iv) $s^3-3(s-a)(s-b)(s-c)=a^3+b^3+c^3$;

(v) $a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)=(s-a)(s-b)(s-c)$
$$-2abc ;$$

(vi) $a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)+3abc$
$$=\tfrac{1}{2}s(s^2-a^2-b^2-c^2).$$

20. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$$=\tfrac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc) ;$$

(ii) $s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$
$$=ab+bc+ca.$$

21. যদি $3s = a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4 = 2(s-b)^2(s-c)^2+2(s-c)^2(s-a)^2 + 2(s-a)^2(s-b)^2.$$

22. যদি $bc+ca+ab=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
(i) $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$;
(ii) $(1-bc)(1-ca)(1-ab) = abc(b+c)(c+a)(a+b)$.

23. যদি $x+y+z=1$ হয়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(x+yz)(y+z) = (y+zx)(z+x) = (z+xy)(x+y) = (1-x)(1-y)(1-z).$$

24. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(ax+by)^2-(bx+cy)(cx+ay) = (bx+cy)^2-(cx+ay)(ax+by) = (cx+ay)^2-(ax+by)(bx+cy).$$

25. $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=4$ এবং $xyz=5$ হইলে, $(x+yz)(y+zx)(z+xy)$ এর মান কত ?

26. যদি $x=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(x-a)(x-b)(x-c) = (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$$

27. যদি $a+b+c=0$, অথবা $x+y+z=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(ax+by+cz)^3+(ay+bz+cx)^3+(az+bx+cy)^3 = 3(ax+by+cz)(ay+bz+cx)(az+bx+cy)$

28. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2 = a^2+b^2+c^2.$$

29. যদি $x=a^3+a^2$, $y=a^2+a$ এবং $z=a+1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(x+y)(x+z)(x^2-yz) = (x+y+z)(x-z)(x^2+y^2)$.

ঊনবিংশ অধ্যায়

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) এবং বিভাজ্যতা (Divisibility)

228. অপেক্ষক ও চল (Functions and Variables)

যদি কোন রাশিমালার মান এক বা একাধিক রাশির মানের উপর নির্ভর করে, তাহা হইলে ঐ রাশিমালাটিকে উক্ত রাশির বা রাশিগুলির **অপেক্ষক** (function) বলে, এবং উক্ত রাশিগুলিকে **চল** (variable) বলা হয় (অনু. 27 দ্রষ্টব্য)। অপেক্ষকে একটি মাত্র চল থাকিলে, সেই চল সাধারণত x দ্বারা সূচিত হয়। অপেক্ষকে চল ব্যতীত অন্য যে সকল সংখ্যাত্মক বা আক্ষরিক রাশি থাকে, তাহাদিগকে ধ্রুবক (constant) বলে।

কোন অপেক্ষকের পদগুলি মূলচিহ্নযুক্ত না হইলে অপেক্ষকটিকে মূলদ (rational) বলা হয়, এবং x এর ঘাতসমূহের সূচকগুলি পূর্ণ ধনসংখ্যা হইলে, ইহাকে x এর পূর্ণ (integral) অপেক্ষক বলা হয়।

যথা, ax^2+bx+c, px^3+qx^2+rx+s ইহারা x এর **মূলদ** এবং **পূর্ণ অপেক্ষক** (rational integral function); এখানে a, b, c, p, q ইত্যাদি ধ্রুবক।

বর্তমানে কেবলমাত্র মূলদ এবং পূর্ণ অপেক্ষক-সম্বন্ধেই আলোচনা করা হইবে। ইহারা সাধারণত $f(x)$ বা $\mathrm{F}(x)$ দ্বারা সূচিত হয়।

অপেক্ষকের চলটি, যেমন এ স্থলে x, কোন বিশেষ মানবিশিষ্ট হইলে উহার প্রতীকের মধ্যেও x এর পরিবর্তে সেই মানটি লিখিতে হয়।

যেমন, যদি $f(x)\equiv 3x^2+5x+7$ হয়, তাহা হইলে $f(2)\equiv 3.2^2+5.2+7$; অর্থাৎ $x=2$ হইলে অপেক্ষকটির যে মান হয় তাহা $f(2)$ দ্বারা সূচিত হয়।

সাধারণ ভাবে, x এর মান a হইলে, অপেক্ষকটির মান $f(a)$ দ্বারা সূচিত হয়।

229. ভাগসম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. px^2+qx+r কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-বর্জিত ভাগশেষটি pa^2+qa+r হইবে।

সাধারণ ভাগক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$\begin{array}{l} x-a)\,px^2+qx+r\,(px+(ap+q) \\ \quad\;\; \underline{px^2-apx} \\ \qquad\quad (ap+q)x+r \\ \qquad\quad \underline{(ap+q)x-a(ap+q)} \\ \qquad\qquad pa^2+qa+r \end{array}$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

px^2+qx+r কে $f(x)$ দ্বারা সূচিত করিলে, ভাগশেষটি $f(a)$ দ্বারা সূচিত হইবে।

বিকল্প প্রমাণ। মনে কর, উক্ত ভাগক্রিয়ায় Q ভাগফল এবং R ভাগশেষ হইল। মনে রাখিতে হইবে যে, R এর কোন পদেই x থাকিবে না।

সুতরাং, $f(x)\equiv px^2+qx+r=(x-a)\times Q+R.$

ইহা একটি অভেদ; সুতরাং x এর মান যাহাই হউক না কেন, ইহার উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

অতএব, উক্ত অভেদের উভয় পক্ষে $x=a$ লিখিয়া,

$$f(a)\equiv pa^2+qa+r=(a-a)\times Q+R=0\times Q+R\,;$$

$$\therefore\quad R=f(a)\equiv pa^2+qa+r.$$

উপপাদ্য 2. $f(x)\equiv px^3+qx^2+rx+s$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে x-বর্জিত ভাগশেষটি pa^3+qa^2+ra+s হইবে।

সাধারণ ভাগক্রিয়া-দ্বারা দেখা যায় যে,

$$\begin{array}{l} x-a)\,px^3+qx^2+rx+s\,(px^2+(pa+q)x+(pa^2+qa+r) \\ \quad\;\; \underline{px^3-pax^2} \\ \quad\;\; (pa+q)x^2+rx \\ \quad\;\; \underline{(pa+q)x^2-(pa+q)ax} \\ \qquad\quad (pa^2+qa+r)x+s \\ \qquad\quad \underline{(pa^2+qa+r)x-(pa^2+qa+r)a} \\ \qquad\qquad\qquad pa^3+qa^2+ra+s \end{array}$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

ভাগশেষ $= f(a) \equiv pa^3 + qa^2 + ra + s.$

বিকল্প প্রমাণ। মনে কর, উক্ত ভাগক্রিয়ায় ভাগফল Q এবং x-বর্জিত ভাগশেষ R হইল।

$$\therefore \quad f(x) \equiv px^3 + qx^2 + rx + s = (x-a) \times Q + R.$$

ইহা একটি অভেদ ; সুতরাং x এর মান যাহাই হউক না কেন, ইহার উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

$\therefore$ উভয় পক্ষে $x = a$ লিখিয়া,

$$f(a) \equiv pa^3 + qa^2 + ra + s = (a-a) \times Q + R = 0.Q + R\ ,$$

$$\therefore \quad R = f(a) \equiv pa^3 + qa^2 + ra + s.$$

উক্ত উপপাদ্য দুইটি **ভাগশেষ উপপাদ্য** নামক একটি সাধারণ উপপাদ্যের বিশেষ রূপ। এই উপপাদ্যটি পরবর্তী অনুচ্ছেদে আলোচিত হইবে।

উদা. $5x^3 + 3x^2 - 7x + 4$ কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\text{ভাগশেষ} = 5.3^3 + 3.3^2 - 7 \times 3 + 4$$
$$= 135 + 27 - 21 + 4 = 145.$$

230. ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

x-যুক্ত কোন মূলদ (rational) এবং পূর্ণ (integral) রাশিমালাকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করিলে, রাশিমালাটিতে x এর পরিবর্তে a লিখিয়া x-বর্জিত ভাগশেষটি পাওয়া যায়।

প্রত্যেক মূলদ এবং পূর্ণ রাশিমালাকে $f(x) \equiv px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m$ এই আকারে লেখা যায় ; এ স্থলে n একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা ; ইহার দ্বারা রাশিমালার মান (degree) সূচিত হয়।

মনে কর, যে পর্যন্ত ভাগশেষে x-ঘটিত কোনও পদ না থাকে সেই পর্যন্ত উক্ত রাশিমালাকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা হইলে, Q ভাগফল হয় এবং R ভাগশেষ থাকে। তাহা হইলে,

$$f(x) \equiv px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m = (x-a) \times Q + R\ ;$$

মনে রাখিতে হইবে যে, R এর কোনও পদে x নাই।

ইহা একটি অভেদ ; সুতরাং x এর মান যাহাই হউক না কেন, উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে। x এর পরিবর্তে কোন মান লিখিলে R এর কোনও পরিবর্তন হইবে না, কারণ R এ x যুক্ত কোন পদ নাই।

এক্ষণে মনে কর, x এর পরিবর্তে a লিখিলে Q এর মান Q′ হয়। অতএব উক্ত অভেদের উভয় পক্ষে $x-a$ লিখিয়া,

$$\begin{aligned} f(a) \equiv pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m &= (a-a) \times Q' + R \\ &= 0 \times Q' + R \\ &= R\,; \end{aligned}$$

$\therefore$ ভাগশেষ $R = f(a) \equiv pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m.$

231. গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem)

x এর পরিবর্তে a লিখিলে, যদি x এর কোন মূলদ পূর্ণ রাশিমালার মান (value) শূন্য হয়, তাহা হইলে বুঝিতে হইবে যে, $(x-a)$ উক্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক, অর্থাৎ রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

এই উপপাদ্যটি পূর্ব অনুচ্ছেদোক্ত ভাগশেষ উপপাদ্য হইতে অনায়াসেই প্রমাণ করা যায়; কারণ উক্ত উপপাদ্য হইতে জানা যায় যে, $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগশেষ $f(a)$ থাকে, কিন্তু এ স্থলে $f(a)=0$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য, অর্থাৎ $x-a$ উহার একটি গুণনীয়ক।

অনুসিদ্ধান্ত। $f(-a)=0$ হইলে, $f(x)$ অপেক্ষকটি $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

উদা. 1. a র মান কত হইলে x^3+x^2-5x-a রাশিটি $x-2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

যদি $f(x) \equiv x^3+x^2-5x-a$ রাশিটি $x-2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে $f(2)$ এর মান শূন্য হইবে।

কিন্তু $\quad f(2) = 2^3+2^2-5\times2-a = 2-a;$

$\therefore\ 2-a=0$, বা $a=2$.

উদা. 2. কোন্ সর্ত সিদ্ধ হইলে x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশি দুইটির $x+a$ আকারের একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে ?

$x+a$ উভয় রাশিরই গুণনীয়ক ; সুতরাং,

$$(-a)^2+p(-a)+q=0, \text{ অর্থাৎ } a^2-pa+q=0, \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$(-a)^2+p'(-a)+q'=0, \text{ অর্থাৎ } a^2-p'a+q'=0; \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে, বজ্রগুণন-দ্বারা,

$$\frac{a^2}{p'q-pq'}=\frac{a}{q-q'}=\frac{1}{p-p'};$$

$$\therefore \quad a^2=\frac{p'q-pq'}{p-p'} \text{ এবং } a=\frac{q-q'}{p-p'};$$

$$\therefore \quad \frac{p'q-pq'}{p-p'}=a^2=\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2,$$

বা $\quad (p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2$, ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

প্রশ্নমালা 83

1. যদি $f(x)\equiv x^3-3x+5$ হয়, তাহা হইলে $f(2)$, $f(-3)$ এবং $f(5)$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

2. (*i*) যদি $f(n)=n^2+2n$ হয়, তাহা হইলে $f(n+1)-f(n)$ এর মান কত ?

(*ii*) যদি $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $x=f(y)$.

3. ভাগ না করিয়া অন্য উপায়ে, নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণের ভাগশেষ নির্ণয় কর :—

(*i*) $(x^3-2x^2+3x-5)\div(x-2)$;

(*ii*) $(x^4+3x^2+6x+7)\div(x+3)$;

(*iii*) $(x^5-8x^3+6x^2-4)\div(x+2)$.

4. প্রমাণ কর যে, $x-y$, $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$ এর প্রত্যেকটি $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay)-(ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$ রাশিটির একটি গুণনীয়ক।

5. ভাগ না করিয়া, অন্য উপায়ে প্রমাণ কর যে,

(i) $x-1$ দ্বিপদ রাশিটি $x^{12}-1$, x^4-2x^2+1 এবং $x^5+2x^4-3x^3+4x-4$ এর প্রত্যেকটির গুণনীয়ক ;

(ii) $x-2$ রাশিটি $x^3-7x^2+11x-2$ এবং x^4-3x^2+2x-8 এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক ,

(iii) $x^3+3x^2+6x+18$ এবং $x^3+6x^2+10x+3$ রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটির $(x+3)$ একটি গুণনীয়ক।

6. যদি $x^2-3px+q^2$ রাশিটি $x-p$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $2p^2=q^2$.

7. p এর মান কত হইলে, $x^5-61x+p$ রাশিটি $x+1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

8. x^3+3x^2+4x+p এবং x^3+x^2+8 রাশি দুইটিকে $x+3$ দ্বারা ভাগ করা হইলে, উভয় ক্ষেত্রে একই ভাগশেষ থাকে। p এর মান নির্ণয় কর।

9. ভাগ না করিয়া, অন্য উপায়ে প্রমাণ কর যে, $3a^3-2a^2b-13ab^2+10b^3$ রাশিটি $a-2b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

10. b এবং c এর মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ বর্তমান থাকিলে, x^3+bx+c এবং x^3+cx+b এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে ?

11. যদি $x+p$ রাশিটি ax^2+bx+c এবং cx^2+bx+a রাশি দুইটির গ. সা. গু. হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a+b+c=0$, অথবা $a+c=b$.

12. কোন্ সর্ত সিদ্ধ হইলে, $x^3+(p+q)x+a$ রাশিটি $x+p+q$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

13. a র মান (শূন্য ভিন্ন) কত হইলে, x^2+x-a এবং x^3-x-a র একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে ?

14. প্রমাণ কর যে, $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ রাশিটি $a+b$ এবং $x+y$ উভয় রাশি-দ্বারাই বিভাজ্য।

15. প্রমাণ কর যে, $a=1$ না হইলে, $x^{2n+1}+1$ রাশিটি $x+a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে না।

232. বিভাজ্যতা (Divisibility) সম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. n যুগ্ম কিংবা অযুগ্ম যে-কোন ধন, পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, $a^n - b^n$ সর্বদাই $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

মনে কর, $a^n - b^n$ কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করা হইলে, ভাগফল Q হয় এবং a-বর্জিত ভাগশেষটি R হয়।

$\therefore \quad a^n - b^n \equiv (a-b) \times Q + R$, একটি অভেদ।

এক্ষণে R এর মধ্যে a-যুক্ত কোন পদ না থাকায়, a র যে-কোন মান ধরিলেও R এর কোন পরিবর্তন হইবে না। কিন্তু Q এর মধ্যে a থাকায়, এইরূপ করিলে Q এর মান পরিবর্তিত হইবে। মনে কর, $a=b$ লিখিলে, Q এর মান Q′ হয়। অতএব উক্ত অভেদে $a=b$ লিখিয়া,

$$b^n - b^n = (b-b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R,$$

অথবা, $$R = 0.$$

ভাগশেষ R শূন্য হওয়ায় উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).$$

উদা. $a^2 - b^2, a^3 - b^3, a^4 - b^4, a^5 - b^5$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

উপপাদ্য 2. n ধন এবং যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে, $a^n - b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে; কিন্তু n ধন এবং অযুগ্ম পূর্ণ-সংখ্যা হইলে বিভাজ্য হইবে না।

পূর্ব উপপাদ্যে ব্যবহৃত প্রতীক-সমূহ ব্যবহার করিয়া,

$a^n - b^n \equiv (a+b) \times Q + R$ অভেদটি পাওয়া যায়।

এক্ষণে R এর মধ্যে a-যুক্ত কোন পদ না থাকায়, a র যে-কোন মান ধরিলেও R এর কোনও পরিবর্তন হইবে না। অতএব উক্ত অভেদে $a=-b$ লিখিয়া,

$$(-b)^n - b^n = (-b+b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

এক্ষণে, n যুগ্ম হইলে, $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$;

কিন্তু, n অযুগ্ম হইলে, $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$;

∴ n যুগ্ম হইলে, $R = 0$; কিন্তু n অযুগ্ম হইলে ভাগশেষ R শূন্য হয় না, $-2b^n$ হয়।

∴ n যুগ্ম হইলে, $a^n - b^n$ রাশিমালাটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, n অযুগ্ম হইলে হয় না।

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-1}).$$

উদা. $a^2 - b^2$, $a^4 - b^4$ প্রভৃতি রাশিগুলি $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য; কিন্তু $a^3 - b^3$, $a^5 - b^5$ প্রভৃতি রাশিগুলি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 3. n ধন এবং অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে, $a^n + b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে, কিন্তু n যুগ্ম হইলে হইবে না।

পূর্বে ব্যবহৃত প্রতীক-সমূহ ব্যবহার করিয়া,

$a^n + b^n \equiv (a+b) \times Q + R$ অভেদটি পাওয়া যায়।

উভয় পক্ষে $a = -b$ লিখিয়া,

$$(-b)^n + b^n = (-b+b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

এক্ষণে, n অযুগ্ম হইলে, $(-b)^n + b^n = -b^n + b^n = 0$;

কিন্তু, n যুগ্ম হইলে, $(-b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$;

অতএব, n অযুগ্ম হইলে $R = 0$ হয়, কিন্তু যুগ্ম হইলে $R = 0$ হয় না;

∴ n অযুগ্ম হইলে $a^n + b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, কিন্তু n যুগ্ম হইলে হয় না।

সহজেই প্রমাণিত হইতে পারে যে,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}).$$

উদা. $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$ প্রভৃতি রাশিসমূহ $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য; কিন্তু $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$ প্রভৃতি রাশিসমূহ $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 4. n যুগ্ম কিংবা অযুগ্ম যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন, a^n+b^n কখনই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে না।

পূর্বের প্রতীক-সমূহ ব্যবহার করিয়া,

$a^n+b^n=(a-b)\times Q+R$ অভেদটি পাওয়া যায়।

উভয় পক্ষে $a=b$ লিখিয়া,

$$b^n+b^n=(b-b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R;$$

$\therefore\ R=2b^n$. স্পষ্টই দেখা যায় যে, n এর কোন মানের দ্বারা R এর মান শূন্য হইতে পারে না; অতএব a^n+b^n কখনই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য হয় না।

উদা. a^2+b^2, a^3+b^3 a^4+b^4, প্রভৃতি রাশিসমূহ $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

প্রশ্নমালা 84

নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণে, প্রথম রাশি দ্বিতীয় রাশি দ্বারা বিভাজ্য কিনা স্থির কর, এবং বিভাজ্য হইলে ভাগফল নির্ণয় কর:—

1. a^3-b^3, $a+b$.
2. a^4+b^4, $a-b$.
3. a^5+b^5, $a-b$.
4. x^5+y^5, $x+y$.
5. n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে $(1-x)^2$ রাশিটি $1-x-x^n+x^{n+1}$ এর গুণনীয়ক হইবে।
6. n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে, 7^n-1 সর্বদাই 6 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।
7. n একটি অযুগ্ম ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে 3^n+2^n সংখ্যাটির শেষ অঙ্কটি 5 হইবে।
8. কোন সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে সংখ্যাটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।
9. n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, $4^{2n+1}+1$ রাশিটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।
10. প্রমান কর যে, n ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(a+2b)^{2n+1}+a^{2n+1}$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

11. n একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, $9^{2n+1}+1$ সংখ্যাটির শেষ অঙ্ক শূন্য হইবে।

12. প্রমাণ কর যে, $a-b$, $b-c$, $c-a$ র প্রত্যেকটি $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ এর একটি গুণনীয়ক।

13. n যে-কোন পূর্ণ সংখ্যাই হউক না কেন, $(2x+y)^n-(x+2y)^n-x^n+y^n$ রাশিটি সর্বদাই x^2-y^2 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

14. যদি n একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে m এর আকার কিরূপ হইলে a^m-x^m রাশিটি a^n+x^n এবং a^n-x^n উভয়ের দ্বারাই বিভাজ্য হইবে?

15. n যে-কোন ধন, পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, $(a-1)a^n+(b-1)b^n$ রাশিটি কখনই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে না।

16. n একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ রাশিটি $(x-1)^2$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

17. n একটি ধন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ রাশিটি $ab-bc+cd-da$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

18. ax^3+bx^2+cx+d কে $x-p$ দ্বারা ভাগ করা হইলে যে x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি পাওয়া যায় তাহা সাধারণ ভাগক্রিয়া ভিন্ন অন্য উপায়ে, নির্ণয় কর।

এই প্রকারেই প্রমাণ কর যে, $a+c=d$ হইলে, $x^6+ax^5+cx^3+dx^2-1$ রাশিটি $x+1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

গুণনীয়ক উপপাদ্য-দ্বারা প্রমাণ কর যে,

19. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

20. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$.

21. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

22. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$
$$=-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

বিংশ অধ্যায়

দুরূহ গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.

233. দুইটি মিশ্র রাশিমালার গ. সা. গু.

ত্রয়োদশ অধ্যায়ে দুই বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয়-কালে যে প্রক্রিয়াটি অবলম্বন করা হইয়াছিল তাহার অন্তর্নিহিত সাধারণ তত্ত্ব নিম্নলিখিত প্রতিজ্ঞা-দ্বয়ের উপর প্রতিষ্ঠিত :—

1. যদি A র একটি গুণনীয়ক H হয়, তবে mA, অর্থাৎ A র যে-কোন গুণিতকেরও একটি গুণনীয়ক H হইবে।

কারণ যদি A কে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল a হয় তবে $A=aH$, সুতরাং $mA=maH$; $\therefore$ mA র একটি গুণনীয়ক H.

2. A এবং B এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক H হইলে, ইহা A এবং B এর যে-কোন গুণিতকের সমষ্টি, অথবা অন্তরেরও (যথা, $ma \pm nb$ এর) একটি গুণনীয়ক হইবে।

মনে কর, $A=pH$ এবং $B=qH$. তাহা হইলে $mA=mpH$ এবং $nB=nqH$.

$$\therefore \quad mA \pm nB = mpH \pm nqH = (mp \pm nq)H.$$

সুতরাং দেখা যায়, $mA \pm nB$ এরও একটি গুণনীয়ক H.

234. গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম

যে দুই রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে তাহাদের কোনটিরই একপদ গুণনীয়ক না থাকিতে পারে, অথবা তাহাদের একটির কিংবা দুইটিরই একপদ গুণনীয়ক থাকিতে পারে। এই দুইটি বিষয় পর পর আলোচিত হইবে।

প্রথমত, মনে কর, A ও B এই রাশিদ্বয়ের কোনটিরই একপদ গুণনীয়ক নাই।

A এবং B কে উহাদের কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতসমূহের উর্ধ্বক্রম, অথবা অধঃক্রম-অনুসারে সাজাও, এবং মনে কর যে, সাধারণ অক্ষরটির হিসাবে B অপেক্ষা A নিম্নতর মানের রাশিমালা নহে। A কে B দ্বারা ভাগ কর, এবং মনে কর, এই ভাগক্রিয়ায় ভাগফল p এবং ভাগশেষ C হইল। এখন C এর একটি একপদ গুণনীয়ক m হইলে, $C=mD$; m কে পরিত্যাগ করিয়া D কে একটি নূতন ভাজক এবং B কে একটি নূতন ভাজ্যরূপে লও। B কে D দ্বারা ভাগের সময় ভগ্নাংশ পরিহার করিবার জন্য প্রয়োজন হইলে, B কে একটি উপযুক্ত একপদ গুণনীয়ক n দ্বারা গুণ করিয়া nB কে D দ্বারা ভাগ কর। এই ভাগক্রিয়ার ভাগফল q এবং ভাগশেষ E হইলে, আবার D কে E দ্বারা ভাগ কর। মনে কর, যেন এইবার ভাগফল r হইল, কিন্তু কিছুই অবশিষ্ট রহিল না।

পূর্বোক্ত উপপাদ্য-অনুসারে, A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহের প্রত্যেকটি $A-Bp$, অর্থাৎ mD এর একটি গুণনীয়ক ; সুতরাং D এরও একটি গুণনীয়ক। অতএব A এবং B এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক B এবং D এরও একটি সাধারণ গুণনীয়ক। পক্ষান্তরে B এবং D এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক $Bp+mD$, অর্থাৎ A রও একটি গুণনীয়ক হইবে, সুতরাং A এবং B এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। অতএব, A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহ এবং B এবং D এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহ ঠিক এক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, D এবং E এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহ এবং B এবং D এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহ, কাজেই A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহ, সম্পূর্ণরূপে এক। উপরের ভাগক্রিয়ায় আরও ভাগশেষ থাকিলে, এই নিয়মেই অগ্রসর হইতে হয়। A, B, D এবং E রাশিসমূহের মান (degree) ক্রমশ কমিতে থাকে, কিন্তু তথাপি A ও B, B ও D, D ও E প্রভৃতির সাধারণ গুণনীয়ক সকল একই।

D কে E দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না বলিয়া, D এবং E এর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক E ; সুতরাং A এবং B এর গ. সা. গু. E.

দ্বিতীয়ত, মনে কর, A এবং B উভয়েরই একপদ গুণনীয়ক আছে, অর্থাৎ $A=aX$ এবং $B=bY$; a এবং b যথাক্রমে A এবং B এর একপদ গুণনীয়ক-

সমূহের গুণফল। a এবং b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে, X এবং Y এর গ. সা. গু.-ই A এবং B এর গ. সা. গু. হইবে। কিন্তু a এবং b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে, X এবং Y এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি ভিন্ন উহা A এবং B এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। এক্ষণে, X এবং Y এর গ. সা. গু. প্রথমোক্ত প্রক্রিয়া-দ্বারা নির্ণয় করা যায়। এইরূপে নির্ণীত X এবং Y এর গ. সা. গু.-কে a এবং b এর সাধারণ গুণনীয়কগুলির দ্বারা গুণ করিলেই A এবং B এর গ. সা. গু. নির্ণীত হইবে।

দ্রষ্টব্য 1. a এবং b এর কোন একটির মান 1 হইলেও অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের মাত্র একটির একপদ গুণনীয়ক থাকিলেও এই নিয়ম প্রয়োগ করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য 2. সুবিধার জন্য, যে-কোন ভাগশেষ হইতে উহার একপদ গুণনীয়ক অপসারণ করা যায়, অথবা প্রদত্ত রাশিমালা এবং অবশিষ্টকে কোন একপদ গুণনীয়ক-দ্বারা গুণ করা যায়।

235. উপপাদ্য

কোন দুইটি রাশির সাধারণ গুণনীয়কসমূহের প্রত্যেকটি উহাদের গ. সা. গু.-রও গুণনীয়ক হইবে।

মনে কর, A এবং B রাশি দুইটির গ. সা. গু. E.

$$\begin{array}{r|l|l} B & A & p \\ & Bp & \\ \hline & C=mD & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} D & nB & q \\ & qD & \\ \hline & E & \end{array}$$

এক্ষণে, A এবং B এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক a হইলে,

$$A = p'a \text{ এবং } B = q'a\,;$$

এ স্থলে, p' এবং q' উভয়েই ধন, পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \quad C = mD = A - Bp = p'a - pq'a = (p' - pq')a\,;$$

$$\therefore \quad D = \frac{p' - pq'}{m}.a = k.a.$$

পুনরায়, $E = nB - qD = nq'a - kqa = (nq' - kq)a$;

$\therefore$ E এর একটি গুণনীয়ক a.

দ্রষ্টব্য। E রাশিটি A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়কগুলির গুণফল।

236. তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু.—প্রথম প্রক্রিয়া

মনে কর, A, B এবং C এই তিনটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। A এবং B এর গ. সা. গু. H হইলে, H এবং C এর গ. সা. গু.-ই A, B এবং C এর গ. সা. গু. হইবে।

কারণ A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়কগুলির দ্বারাই H গঠিত; H এর অন্য কোনও গুণনীয়ক নাই। কাজেই H এবং C এর সাধারণ গুণনীয়কগুলির ভিতর A, B এবং C এর সাধারণ গুণনীয়কগুলির প্রত্যেকটি থাকিবে, ইহা ভিন্ন অন্য কোনও গুণনীয়ক থাকিবে না। সুতরাং H এবং C এর গ. সা. গু.-ই A, B এবং C এর গ. সা. গু. হইবে।

এই নিয়মেই যে-কোন সংখ্যক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে পারা যায়। রাশির সংখ্যা তিনের অধিক হইলে অন্য প্রণালীতেও উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

A, B, C এবং D এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমত A এবং B এর গ. সা. গু. X, এবং C ও D এর গ. সা. গু. Y নির্ণয় করিয়া, পরে X এবং Y এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিলেই চলিবে। অন্যান্য সময়েও এইরূপ করা যায়।

237. দ্বিতীয় প্রক্রিয়া

অনেক ক্ষেত্রে, পূর্বোক্ত প্রক্রিয়া অপেক্ষা আরও সহজে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়। এই প্রক্রিয়ায়, প্রদত্ত রাশি দুইটি হইতে নিম্নতর মানের এমন দুইটি রাশি নির্ণয় করিতে হয় যাহাদের গ. সা. গু. প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.-র সমান। নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি হইতে ইহার সত্যতা উপলব্ধ হইবে।

যদি A এবং B রাশিদ্বয়ের কোনও একপদ গুণনীয়ক না থাকে, এবং l, m, p, q এরূপ চারটি সংখ্যা হয় যে, $lq-mp \neq 0$, তাহা হইলে $lA+mB$ এবং $pA+qB$ এর গ. সা. গু. হইতে উহার সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক বাদ দিলেই A এবং B এর গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

মনে কর, A এবং B এর গ. সা. গু. H. যে হেতু, A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক-সমূহের প্রত্যেকটি $lA+mB$ এবং $pA+qB$ এই উভয় রাশিরই একটি গুণনীয়ক, সুতরাং উহা শেষোক্ত রাশিদ্বয়েরও একটি সাধারণ গুণনীয়ক।

পুনরায়, $q(lA+mB)-m(pA+qB)=(lq-mp)A \quad \cdots \quad (1)$

এবং $l(pA+qB)-p(lA+mB)=(lq-mp)B \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) হইতে দেখা যায় যে, $(lA+mB)$ এবং $(pA+qB)$ এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক $(lq-mp)A$ এবং $(lq-mp)B$ এই উভয় রাশিরই একটি গুণনীয়ক। এক্ষণে, $lq-mp$ একটি সংখ্যাত্মক রাশি বলিয়া, উক্ত রাশিদ্বয়ের সংখ্যাত্মক-ভিন্ন অন্যান্য সাধারণ গুণনীয়কগুলি A এবং B উভয়েরই গুণনীয়ক হইবে, অর্থাৎ A এবং B এরও সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

সুতরাং $lA+mB$ এবং $pA+qB$ এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি হইতে সংখ্যাত্মক গুণনীয়কগুলি বাদ দিলেই A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি পাওয়া যাইবে ; অর্থাৎ $lA+mB$ এবং $pA+qB$ এর গ. সা. গু. হইতে সংখ্যাত্মক গুণনীয়ক বাদ দিলেই A এবং B এর গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য। l, m, p, q যে-কোন সংখ্যাত্মক মান-বিশিষ্ট হইতে পারে, শুধু $lq-mp \neq 0$. ইহাদের বিশেষ বিশেষ মান ধরিলে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের পরিবর্তে সমান গ. সা. গু.-বিশিষ্ট সরলতর রাশি পাওয়া যায়।

ব্যবহারক্ষেত্রে, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন পদগুলিকে পর্যায়ক্রমে অপসারণ করিয়া পরে অনু. 170 এ বর্ণিত নিয়মানুসারে কার্য করিতে হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $l=1, m=1, p=1$ এবং $q=-1$ লিখিয়া দেখা যায় যে, $A+B$ এবং $A-B$ এর গ. সা. গু.-ই A এবং B এর গ. সা. গু.।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $l=1, m=\pm1, p=0$ এবং $q=1$ লিখিয়া দেখা যায় যে, $A\pm B$ এবং B এর গ. সা. গু.-ই A এবং B এর গ. সা. গু.

এইরূপে, $A\pm B$ এবং A র গ. সা. গু.-ই A ও B এর গ. সা. গু.

উদা. $x^4-115x+24$ এবং $24x^4-115x^3+1$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর, $A\equiv x^4-115x+24$ এবং $B\equiv 24x^4-115x^3+1$;

তাহা হইলে, $24A-B=24(x^4-115x+24)-(24x^4-115x^3+1)$
$=115x^3-2760x+575$
$=115(x^3-24x+5)$;

এবং $A-24B=(x^4-115x+24)-24(24x^4-115x^3+1)$
$=-575x^4+2760x^3-115x$
$=-115x(5x^3-24x^2+1)$;

∴ A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A'\equiv x^3-24x+5$ ও $B'\equiv 5x^3-24x^2+1$ এর গ. সা. গু. একই।

পুনরায়, $5A'-B'=5(x^3-24x+5)-(5x^3-24x^2+1)$
$=24x^2-120x+24=24(x^2-5x+1)$;

এবং $A'-5B'=(x^3-24x+5)-5(5x^3-24x^2+1)$
$=-24x^3+120x^2-24x$
$=-24x(x^2-5x+1)$;

সুতরাং A′ এবং B′ এর গ. সা. গু. x^2-5x+1.

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-5x+1$.

প্রশ্নমালা 85

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $3x^3-5x^2+7$ এবং $6x^4-7x^3-5x^2+14x+7$.
2. $3a^3+5a^2+5a+2$ এবং $2a^3+5a^2+5a+3$.
3. $x^4+2x^3-7x^2+16x+15$ এবং $x^4-9x^3+20x^2-21x-15$.
4. $2x^4+19x^3+20x^2-31x+8$ এবং $2x^4+7x^3-64x^2+62x-16$.
5. $2x^3-7x^2-46x-21$ এবং $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$.
6. $8x^4+3x+10$ এবং $10x^4+3x^3+8$.
7. $8x^4-21x^3+1$ এবং $x^4-21x+1$.
8. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ এবং $5x^4-3x^2-8x-3$.
9. $x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ এবং x^4-4x+3.

10. $6x^4+25x^3+25x^2+13x+3$
এবং $3x^4+11x^3+13x^2+7x+2.$

11. $x^3-4x^2+x+6,\ x^3-3x^2-4x+12$
এবং $x^3-7x^2+16x-12.$

12. $x^4-x^3+x^2+x-2,\ x^4+2x^2+x+2$
এবং $2x^4-5x^3+8x^2-7x+2.$

13. $x^3-4x^2+5x-2,\ x^3-3x-2$ এবং $x^3-7x+6.$

14. $x^4-8x^3+28x^2-53x+42,\ x^4+6x^3-42x^2+129x-154$
এবং $x^4+3x^3-38x^2+123x-189.$

15. $x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-9,\ x^4-x^2+6x-9$
এবং $x^4+2x^3-5x^2-6x+9$

238. তিন বা তদধিক মিশ্ররাশির ল. সা. গু.-নির্ণয়

অনু. 178 অনুসারে A, B, C, D,······প্রভৃতি রাশিসমূহের ল. সা. গু.-নির্ণয়েব নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া যায় :—

1. A এবং B এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর ; মনে কর, ইহা L.
2. L এবং C এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর ; মনে কর, ইহা M.
3. M এবং D এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর ; মনে কর, ইহা N.

এইরূপে অগ্রসর হইয়া সর্বশেষে প্রাপ্ত ল. সা. গু.-টিই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদা. $2x^3+5x^2-22x+15,\ \ x^2+4x-5$ এবং $2x^3+11x^2-x-30$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. $2x^3+5x^2-22x+15$; আবার, $2x^3+5x^2-22x+15$ এবং শেষের রাশিমালাটির ল. সা. গু. $2x^4+9x^3-12x^2-29x+30.$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=2x^4+9x^3-12x^2-29x+30.$

239. উপপাদ্য

দুই কিংবা তদধিক রাশির কোন সাধারণ গুণিতক উহাদের ল. সা. গু.-রও একটি গুণিতক।

মনে কর, A এবং B রাশি দুইটির একটি সাধারণ গুণিতক m, এবং উহাদের ল. সা. গু. L, এবং মনে কর, m কে L দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল r এবং (সম্ভব-স্থলে) ভাগশেষ s হয়। (L এর মান s অপেক্ষা উচ্চতর)

সুতরাং $m = r\text{L} + s$; $\therefore$ $s = m - r\text{L}$.

এক্ষণে, m এবং L উভয়েই A এবং B দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য; সুতরাং $m - r\text{L}$ ও (অর্থাৎ s) A এবং B দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। $\therefore$ A এবং B এর একটি সাধারণ গুণিতক s, কিন্তু s অপেক্ষা L উচ্চতর মানের বলিয়া, A এবং B এর ল. সা. গু. L হইতে পারে না, কিন্তু ইহা কল্পনার (assumption) বিপরীত। কাজেই m, L দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য, কোনও ভাগশেষ থাকিবে না, অর্থাৎ m, L এর একটি গুণিতক।

প্রশ্নমালা 86

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $x^3 - 7x^2 - 80x + 576$, $3x^2 - 14x - 80$ এবং $3x^2 + 17x - 90$.
2. $x^5 + x^3 + x^2 + 1$, $x^4 - x^3 + x - 1$ এবং $x^5 + 2x^4 - x - 2$.
3. $27x^4 + x$, $87x^2 + 8x - 7$ এবং $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.
4. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $x^2 - x - 2$ এবং ল. সা. গু. $x^4 - 5x + 4$, উহাদের একটি $x^3 - 2x^2 - x + 2$ হইলে, অপরটি কত?
5. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $5x^5 - 9x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 12x + 2$ এবং গ. সা. গু. $5x^2 + 6x + 1$. রাশি দুইটি নির্ণয় কর।
6. যদি $x^2 + ax + b$ এবং $x^2 + a'x + b'$ এর গ. সা. গু. $x + c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, উহাদের ল. সা. গু. $x^3 + (a + a' - c)x^2 + (aa' - c^2)x + (a - c)(a' - c)c$ হইবে।

একবিংশ অধ্যায়

দুরূহ ভগ্নাংশ

240. ভগ্নাংশের সরলীকরণ (Simplification of Fractions)

ইতিপূর্বে ভগ্নাংশ-সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নসমূহের আলোচনা করা হইয়াছে ; বর্তমান অধ্যায়ে দুরূহ প্রশ্নাবলীর আলোচনা করা হইবে, এবং সরলীকরণের কতিপয় নূতন প্রক্রিয়া প্রদর্শিত হইবে।

উদা. 1. সরল কর :

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)}.$$

মনে কর, $b-c=x$, $c-a=y$ এবং $a-b=z$;

তাহা হইলে, $x+y+z=0$;

$\therefore$ লব $=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$$=-2(xy+yz+zx);$$

এবং হর $=z(-y)+x(-z)+y(-x)=-(xy+yz+zx)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{-2(xy+yz+zx)}{-(xy+yz+zx)}=2.$$

উদা. 2. সরল কর :

$$\frac{(a+b)^3-c^3}{(a+b)^2-c^2}+\frac{(b+c)^3-a^3}{(b+c)^2-a^2}+\frac{(c+a)^3-b^3}{(c+a)^2-b^2}-2(a+b+c).$$

প্রথম ভগ্নাংশ $=\dfrac{(a+b-c)\{(a+b)^2+c(a+b)+c^2\}}{(a+b-c)(a+b+c)}$

$$=\frac{(a+b)^2+c(a+b)+c^2}{a+b+c}.$$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ

$$=\frac{(b+c-a)\{(b+c)^2+a(b+c)+a^2\}}{(b+c-a)(a+b+c)}=\frac{(b+c)^2+a(b+c)+a^2}{a+b+c}.$$

তৃতীয় ভগ্নাংশ

$$=\frac{(c+a-b)\{(c+a)^2+b(c+a)+b^2\}}{(c+a-b)(a+b+c)}=\frac{(c+a)^2+b(c+a)+b^2}{a+b+c}.$$

প্রথম তিনটি পদের সমষ্টির লব

$$=\{(a+b)^2+c(a+b)+c^2\}+\{(b+c)^2+a(b+c)+a^2\}$$
$$+\{(c+a)^2+b(c+a)+b^2\}$$
$$=3(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca).$$

$\therefore$ প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি

$$=\frac{3(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=\frac{3(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=3(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=3(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}-2(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

উদা. 3. সরল কর :

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^2+x-2}+\frac{2}{x^2+3x+2}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)+3(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{7x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

241. আংশিক ভগ্নাংশ-দ্বারা (Partial Fractions) সরলীকরণ

অনেক সময়ে একটি ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণ করিয়া উহাকে সরল করা যায়। ভগ্নাংশের হর দুইটি গুণনীয়কের গুণফল হইলে, উহা বিশ্লেষণ করিয়া ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টি- বা অন্তর-রূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. সরল কর : $\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$.

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}=\frac{x-y}{x-y}\left(\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x}\right)=\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x};$$

$$\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}=\frac{y-z}{y-z}\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y}\right)=\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y};$$

$$\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}=\frac{z-x}{z-x}\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z}\right)=\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z};$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+x}=0.$

প্রশ্নমালা 87

সরল কর :

1. $\frac{2-x}{1-2x}-\frac{2+x}{1+2x}-\frac{1-6x}{4x^2-1}.$

2. $\frac{b-1}{b+2}-\frac{b+1}{b-2}-\frac{12}{4-b^2}+\frac{6}{2+b}.$

3. $\frac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}.$

4. $\dfrac{(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3+(z+x)(z-x)^3+(x+y)(x-y)^3}$.

5. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{a}{x^2-a^2}+\dfrac{x}{x^2+a^2}+\dfrac{2x^3}{x^4+a^4}$.

6. $\dfrac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{x^4+3x^3y+4x^2y^2+3xy^3+y^4}$.

7. $\dfrac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$.

8. $\dfrac{a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}{a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)}$.

9. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2a}+\dfrac{1}{x+3a}-\dfrac{1}{x+4a}$.

10. $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^2}{x^4-y^4}$.

11. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8-1}$.

12. $\dfrac{1}{x^2+x-6}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}+\dfrac{3}{x^2-7x+10}$.

13. $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$.

14. $\dfrac{1}{(x+2)(2x+1)}+\dfrac{1}{(2x+1)(4x+1)}+\dfrac{1}{(4x+1)(6x+1)}$.

15. $\dfrac{1}{(x+a)(2x+3a)}+\dfrac{1}{(2x+3a)(3x+5a)}+\dfrac{1}{(3x+5a)(5x+7a)}$.

16. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

17. $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-10x+24}+\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-35}+\dfrac{x^2-x-6}{x^2-13x+42}$.

18. $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}+\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

19. $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$.

20. $\dfrac{1}{(x^2+x+7)(x^2+2x+6)}+\dfrac{1}{(x^2+2x+6)(x^2+3x+5)}$

$$+\frac{1}{(x^2+3x+5)(x^2+4x+4)}.$$

21. $1+\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{bx}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$$+\frac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

22. $1+\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a^2}{ab-b^2}+\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}.$

23. $\dfrac{9y^2-(4z-2x)^2}{(2x+3y)^2-16z^2}+\dfrac{16z^2-(2x-3y)^2}{(3y+4z)^2-4x^2}+\dfrac{4x^2-(3y-4z)^2}{(4z+2x)^2-9y^2}.$

24. $\dfrac{yz(y-z)(y^2+z^2)+zx(z-x)(z^2+x^2)+xy(x-y)(x^2+y^2)}{y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)+x^2y^2(x-y)}.$

25. $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$

26. $\dfrac{7x^3-2x^2y-63xy^2+18y^3}{5x^4-3x^3y-43x^2y^2+27xy^3-18y^4}.$

242. চক্রক্রম ভগ্নাংশ (Fractions involving Cyclic Order)

অক্ষরগুলি চক্রক্রমে লিখিত হইলে, একশ্রেণীর ভগ্নাংশের সরলীকরণের বিশেষ সুবিধা হয়।

উদা. সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

প্রথম হরে অক্ষরগুলি চক্রক্রমে লিখিত হয় নাই। কিন্তু $a-c=-(c-a)$, সুতরাং $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$; শেষের রাশিতে অক্ষরগুলি চক্রক্রমে আছে।

অতএব $\qquad \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}=-\dfrac{a^2}{(a-b)(c-a)},$

এইরূপে, $$\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}=-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)},$$

এবং $$\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)},$$

হরগুলির ল. সা. গু. $=(a-b)(b-c)(c-a)$;

∴ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=-\left\{\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$=-\left\{\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

243. চক্রক্রম ভগ্নাংশের কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত

নিম্নলিখিত ফলগুলির সাহায্যে অতি সহজে চক্রক্রম-ঘটিত বহু দুরূহ ভগ্নাংশ সরল করা যায় :—

1. যদি $\frac{1}{(a-b)(a-c)}=X$, $\frac{1}{(b-c)(b-a)}=Y$ এবং $\frac{1}{(c-a)(c-b)}=Z$ হয়,

তাহা হইলে, (i) $X+Y+Z=0$; (ii) $aX+bY+cZ=0$;

(iii) $bcX+caY+abZ=1$; (iv) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$;

(v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$;

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$.

2. যদি $P=\frac{1}{(a-b)(a-c)(x\pm a)}$, $Q=\frac{1}{(b-a)(b-c)(x\pm b)}$

$R=\frac{1}{(c-a)(c-b)(x\pm c)}$ এবং $S=\frac{1}{(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)}$ হয়,

তাহা হইলে, (i) $P+Q+R=S$; (ii) $a^2P+b^2Q+c^2R=Sx^2$.

উদা। 1. সরল কর : $\frac{a(a+1)+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+1)+1}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(c+1)+1}{(c-a)(c-b)}$.

রাশিমালাটি $= \left\{\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$+\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$+\left\{\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$=(a^2X+b^2Y+c^2Z)+(aX+bY+cZ)+(X+Y+Z)$

$=1+0+0=1.$

উদা 2. সরল কর :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

রাশিমালাটি $= -\frac{a}{(a-b)(c-a)(x-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)(x-b)}$

$-\frac{c}{(c-a)(b-c)(x-c)}$

$$= -\frac{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

শেষোক্ত ভগ্নাংশের লব $=a(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}$

$+b(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}+c(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}$

$=a(b-c)x^2-a(b^2-c^2)x+abc(b-c)$

$+b(c-a)x^2-b(c^2-a^2)x+bca(c-a)$

$+c(a-b)x^2-c(a^2-b^2)x+cab(a-b)$

$=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}x^2$

$-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}x$

$+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$

$=\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}x$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)x.$

$\therefore$ রাশিমালাটি $= -\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)x}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$

244. প্রতিসম রাশিমালা (Symmetrical Expression)

কোন রাশিমালার দুইটি অক্ষরের স্থান-বিনিময় করিয়া লিখিলেও যদি রাশিমালাটির কোন পরিবর্তন না হয়, তাহা হইলে রাশিমালাটি ঐ দুই অক্ষরে 'প্রতিসম' এইরূপ বলা হয়। যেমন, a^2+b^2+2ab রাশিমালাটি a এবং b এ প্রতিসম।

এইরূপ তিনটি অক্ষরের যে-কোন দুই অক্ষরের স্থান-বিনিময় করিলেও যদি রাশিমালাটি পূর্ববৎ থাকে তাহা হইলে রাশিমালাটি ঐ তিন অক্ষরে 'প্রতিসম' এইরূপ বলা হয়। যথা, $a^3+b^3+c^3-3abc$ একটি প্রতিসম রাশিমালা, ইহা a, b এবং c এই তিন অক্ষরে প্রতিসম।

উদা. সরল কর : $\dfrac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$.

হরগুলির ল. সা. গু. $=(a+b)(b+c)(c+a)$

∴ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{(a^2+bc)(b+c)+(b^2+ca)(c+a)+(c^2+ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2\{(b+c)(c+a)(a+b)-2abc\}}{(a+b)(b+c)(c+a)}=2-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

প্রশ্নমালা 88

সরল কর:

1. $\dfrac{ax}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{bx}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{cx}{(c-a)(c-b)}$.

2. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.

3. $\dfrac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$.

4. $\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}.$

5. $\dfrac{bc(x+a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(x+b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab(x+c)}{(c-a)(c-b)}.$

6. $\dfrac{(b+c-x)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a-x)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(a+b-x)}{(c-a)(c-b)}.$

7. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$$

সরল কর:

8. $\dfrac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$

9. $\dfrac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(x-b)^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}.$

10. $\dfrac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{ca(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{ab(c-a)(c-b)}.$

11. $\dfrac{x^2yz+1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xy^2z+1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xyz^2+1}{(z-y)(z-x)}.$

12. $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-y)(z-x)}.$

13. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$

14. $\dfrac{(a-x)(a-y)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(b-x)(b-y)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(c-x)(c-y)}{(c-a)(c-b)}.$

15. $\dfrac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{pb^2+qb+r}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{pc^2+qc+r}{(c-a)(c-b)}.$

16. $\dfrac{b^2-ca}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c^2-ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{a^2-bc}{(c-a)(a-b)}.$

17. $\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(b-c)}.$

18. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}.$

19. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3}{a-c}+\dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3}{b-a}+\dfrac{(c-a)^3+(a-b)^3}{c-b}.$

20. $\dfrac{1}{a^2+2bc-b^2-c^2}+\dfrac{1}{b^2+2ca-c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+2ab-a^2-b^2}$

21. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$

22. $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}.$

23. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)(x+b)}$

$+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$

24. $\dfrac{b+c-a}{(b+c)(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a-b}{(c+a)(a-b)(b-c)}$

$+\dfrac{a+b-c}{(a+b)(b-c)(c-a)}.$

25. $\dfrac{(x+1)^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{(y+1)^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{(z+1)^2}{(z-x)(z-y)}.$

26. $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$

27. $\dfrac{x+y}{(x^2-yz)(y^2-zx)}+\dfrac{y+z}{(y^2-zx)(z^2-xy)}$

$+\dfrac{z+x}{(z^2-xy)(x^2-yz)}.$

28. $$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

29. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2.$$

245. জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fractions)

যে ভগ্নাংশের লব, অথবা হর, অথবা উভয়ই ভগ্নাংশ হয়, তাহাকে জটিল ভগ্নাংশ বলে।

যথা, $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$, $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ইহাদের প্রত্যেকটি জটিল ভগ্নাংশ।

জটিল ভগ্নাংশ সরল করিতে হইলে, প্রয়োজন মত লব এবং হর উভয়কে পৃথক্ পৃথক ভাবে সরল করিয়া লইয়া লবকে হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}.$

লব $=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ এবং হর $=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)\div\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

উদা. 2. সরল কর :

$$\frac{\frac{a+b}{1-ab}+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}\div\frac{\frac{a+b}{1-ab}-\frac{a-b}{1+ab}}{1+\frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}.$$

প্রথম ভগ্নাংশের লব

$$=\frac{(a+b)(1+ab)+(a-b)(1-ab)}{1-a^2b^2}=\frac{2a(1+b^2)}{1-a^2b^2};$$

প্রথম ভগ্নাংশের হর

$$=1-\frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}=\frac{1-a^2b^2-a^2+b^2}{1-a^2b^2}=\frac{(1+b^2)(1-a^2)}{1-a^2b^2};$$

∴ প্রথম ভগ্নাংশ

$$=\frac{2a(1+b^2)}{1-a^2b^2}\div\frac{(1+b^2)(1-a^2)}{1-a^2b^2}=\frac{2a}{1-a^2} \qquad \cdots \qquad (1)$$

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{2b}{1-b^2}$ $\qquad \cdots \qquad (2)$

∴ (1) এবং (2) হইতে, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{2a}{1-a^2}\div\frac{2b}{1-b^2}=\frac{a(1-b^2)}{b(1-a^2)}.$$

246. ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction)

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cdots}}}$$

এইরূপ আকার-বিশিষ্ট ভগ্নাংশকে ক্রমিক ভগ্নাংশ বলে।

এই জাতীয় ভগ্নাংশ সরল করিতে হইলে, পাটীগণিতের ন্যায় ভগ্নাংশের নিম্নভাগ হইতে কার্য আরম্ভ করিয়া ক্রমে উপরের দিকে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. সরল কর :

$$\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{1-x}}}.$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশ

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x-x^2-x}{1-x}}}=\frac{x}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x^2}{x-1}}}=\frac{x}{x-\dfrac{x(x-1)}{x^2}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3-x(x-1)}{x^2}}=\frac{x^3}{x^3-x^2+x}=\frac{x^3}{x(x^2-x+1)}=\frac{x^2}{x^2-x+1}.$$

247. জটিল ভগ্নাংশ-ঘটিত সমীকরণ

উদা. 1. সমাধান কর :

$$1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{2}{3}.$$

বাম পক্ষস্থ ক্রমিক ভগ্নাংশটি সরল করিলে x হয় ;

$\therefore\ x=\frac{2}{3}$, নির্ণেয় বীজ।

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\frac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}=1.$$

বাম পক্ষ সরল করিলে $\dfrac{a^2+x^2}{2ax}$ হয় ;

$$\therefore\ a^2+x^2=2ax,\ \text{বা}\ (a-x)^2=0\ ;\ \therefore\ x=a.$$

প্রশ্নমালা 89

সরল কর :

1. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}$. 2. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}$. 3. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$.

4. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}$. 5. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\times\left\{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y+z}{y-z}+\dfrac{z+x}{z-x}+3}$. 7. $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}+\dfrac{1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

8. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$.

9. $\dfrac{x-\dfrac{x-y}{1+xy}}{1+\dfrac{x(x-y)}{1+xy}}$. 10. $\dfrac{\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2}\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)}$.

11. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$. 12. $x+1-\dfrac{x}{x+2-\dfrac{x+1}{x+\dfrac{1}{x+2}}}$.

13. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{2-x}}}$. 14. $\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a-1}}}$.

15. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2y-x}{x-y}}}}$. 16. $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1+x+\dfrac{x}{1-x+x^2}}}$.

17. $$\frac{y^2 - zx}{y+z-\dfrac{y(x+y+z)}{y+z-\dfrac{zx}{x+y}}}.$$

18. $$\frac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)} \times \frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}}.$$

19. যদি $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}$ এর সরলতম মান কত ?

20. $x=\dfrac{1}{t+1}$ হইলে, $\dfrac{x^2-2}{x+1}$ কে t দ্বারা প্রকাশ কর, এবং লব্ধ ফলটি সরল কর।

21. $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}$ হইলে, $\dfrac{ay}{a+y}$ এর মান কত ?

22. $x=\dfrac{a}{b}$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির সরলতম মান কত হইবে নির্ণয় কর :—

(i) $\dfrac{x^2+2x}{4x-1}$; (ii) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}}$.

23. $x=\dfrac{2a-3b}{a-b}$ হইলে, $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}$ এর মানকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

24. $x=\dfrac{a+b}{a+ab}$ হইলে, $\dfrac{1-x}{1+x}$ এর সরলতম মান কত হইবে ?

25. $x=\dfrac{a+b}{1-ab}$ এবং $y=\dfrac{a-b}{1+ab}$ হইলে, $\dfrac{x+y}{1-xy}$ এবং $\dfrac{x-y}{1+xy}$ এর মান কত হইবে ? লব্ধ ফলদ্বয় সরল করিয়া রাখ।

26. $x=\dfrac{t-1}{t+1}$ এবং $y=\dfrac{t+1}{t-1}$ হইলে, $\dfrac{(x-y)^2}{(x-y^2)}$ এর মান কত ?

27. $y=\frac{ax+b}{cx-a}$ হইলে, $\frac{ay+b}{cy-a}$ র মান x দ্বারা প্রকাশ কর।

28. $x=\frac{3ab}{b-a}$ হইলে, $\frac{1}{x-2a}+\frac{2}{x+b}+\frac{1}{b}$ এর মান কত ?

29. $x=\frac{1+a}{1-a}$ এবং $y=\frac{1-a}{1+a}$ হইলে, $\frac{x-y}{1+xy}$ এর মান কত হইবে ?

30. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

(i) $4=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}$; (ii) $1=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}}$;

(iii) $\dfrac{\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}+\frac{9}{4}=0$; (iv) $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+x+\cfrac{2x^2}{1-x}}}$;

(v) $\cfrac{6}{7-\cfrac{6}{7-\cfrac{6}{7-x}}}=1$; (vi) $2=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-x}}}$.

248. ভগ্নাংশের অভেদ (Fractional Identities)

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}.$$

বাম পক্ষ হইতে $\frac{3}{x}$ বিয়োগ করিয়া,

$$\left\{\frac{a}{x(a+x)}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{b}{x(b+x)}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{c}{x(c+x)}-\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{a-(a+x)}{x(a+x)}+\frac{b-(b+x)}{x(b+x)}+\frac{c-(c+x)}{x(c+x)}$$

$$= -\frac{x}{x(a+x)} - \frac{x}{x(b+x)} - \frac{x}{x(c+x)}$$

$$= -\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x} - \frac{1}{c+x};$$

∴ বাম পক্ষ $= \frac{3}{x} - \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+c}$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$
$= (b+c)(c+a)(a+b)$.

মনে কর, $b-c=x$, $c-a=y$ এবং $a-b=z$;

তাহা হইলে, $x+y+z=0$; ∴ $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

পুনরায়, মনে কর, $b^2-c^2=X$, $c^2-a^2=Y$ এবং $a^2-b^2=Z$;

তাহা হইলে, $X+Y+Z=0$; ∴ $X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$;

∴ বাম পক্ষ $= \frac{X^3+Y^3+Z^3}{x^3+y^3+z^3} = \frac{3XYZ}{3xyz}$

$$= \frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

উদা. 3. যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}.$$

যে হেতু, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, অর্থাৎ $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$;

∴ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$,

বা $(b+c)(c+a)(a+b)=0$;

∴ গুণনীয়ক তিনটির অন্তত একটি শূন্য হইবে।

$b+c=0$ হইলে, $\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$; ∴ $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$;

$$\therefore \left(\frac{1}{b}\right)^{2n+1} = \frac{1}{b^{2n+1}} = \left(-\frac{1}{c}\right)^{2n+1} = -\frac{1}{c^{2n+1}},$$

কারণ $2n+1$ একটি অযুগ্ম সংখ্যা ;

$$\therefore \quad \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = 0.$$

আবার, $b^{2n+1} = (-c)^{2n+1}$; $\quad \therefore \; b^{2n+1} + c^{2n+1} = 0$;

$$\therefore \qquad \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}} \qquad \left[\because \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = 0\right]$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} \qquad [\because \; b^{2n+1} + c^{2n+1} = 0]$$

অথবা, $$= \frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}} \qquad [\because \; b+c=0]$$

এইরূপে, $c+a=0$, অথবা $a+b=0$ হইলেও অভেদটি প্রমাণ করা যায়।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

বাম পক্ষ $$= \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{1}{a^2}(c^2+b^2) + a^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{bc}{a^2}\left(\frac{c^2+b^2}{bc}\right) + \frac{a^2}{bc}\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{bc}{a^2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \frac{a^2}{bc}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{bc}{a^2}+\frac{a^2}{bc}\right)$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{a^2}{bc}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{bc}{a^2}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\frac{c}{a}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

উদা. 5. যদি $abc=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+(a+b)(b-c)(a-c)=1.$$

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(a+b-c)\left(\frac{bc+ca-ab}{abc}\right)$$

$=(a+b-c)(bc+ca-ab)$ [$\because$ $abc=1$]

$=-(a+b+x)(bx+xa+ab)$ [$x=-c$ লিখিয়া]

$=-\{(a+b)(b+x)(x+a)+abx\}$ [অনু. 203]

$=-(a+b)(b-c)(a-c)+abc$;

$$\therefore\quad (a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+(a+b)(b-c)(a-c)=abc=1.$$

উদা. 6. যদি $xy+yz+zx=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3.$$

যে হেতু $xy+yz+zx=1$;

$\therefore$ উভয় পক্ষে x^2 যোগ করিয়া, $x^2+xy+yz+zx=1+x^2$,

অর্থাৎ, $(x+y)(x+z)=1+x^2$; $\therefore$ $\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}=1.$

এইরূপে, $\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}=1$ এবং $\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1$;

$$\therefore\quad \frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1+1+1=3.$$

উদা. 7. যদি $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ এবং $y = \dfrac{2a-1}{2a+1}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$xy - 1 = 3(x-y).$$

$$xy - 1 = \frac{(a-1)(2a-1)}{(a+1)(2a+1)} - 1 = \frac{(a-1)(2a-1)-(a+1)(2a+1)}{(a+1)(2a+1)}$$

$$= \frac{(2a^2-3a+1)-(2a^2+3a+1)}{(a+1)(2a+1)} = \frac{-6a}{(a+1)(2a+1)};$$

আবার, $3(x-y) = 3\left\{\dfrac{(a-1)}{a+1} - \dfrac{(2a-1)}{2a+1}\right\}$

$$= 3\left\{\frac{(a-1)(2a+1)-(a+1)(2a-1)}{(a+1)(2a+1)}\right\}$$

$$= \frac{-6a}{(a+1)(2a+1)}; \quad \therefore \quad xy-1 = 3(x-y).$$

উদা. 8. যদি $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = 1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

যে হেতু, $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = 1;$

সুতরাং $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{ab}{c+a} + \dfrac{ac}{a+b} = a$ [উভয় পক্ষ a দ্বারা গুণ করিয়া]

$\dfrac{ab}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{bc}{a+b} = b$ [,, b ,, ,,]

এবং $\dfrac{ac}{b+c} + \dfrac{bc}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} = c$ [,, c ,, ,,]

যোগ করিয়া,

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) + \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{bc}{a+b}\right) + \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}\right)$$

$$+ \left(\frac{bc}{c+a} + \frac{ab}{c+a}\right) = a+b+c,$$

অথবা, $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+(a+b+c)=a+b+c\,;$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

প্রশ্নমালা 90

1. যদি $x=\frac{4ab}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$

2. যদি $x+y=2z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1 \text{ এবং } \frac{x}{x-z}+\frac{y}{y-z}=2.$$

3. যদি $y=\frac{1+x}{1-x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=4\,\frac{xy+1}{x-y}.$$

4. যদি $\frac{a-b}{1+ab}+\frac{c-d}{1+cd}=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc} \text{ এবং } \frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}.$$

5. যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

6. যদি $\frac{a-1}{x}-\frac{a-2}{y}=\frac{1}{b}$ এবং $\frac{b-1}{x}-\frac{b-2}{y}=\frac{1}{a}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{c-1}{x}-\frac{c-2}{y}=\frac{c}{ab}.$

7. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

8. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

9. $x^2+y^2=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x\left(1+\frac{x}{y}\right)+y\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

10. $xyz=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$$
$$=4+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

যদি $x+y+z=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

11. $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2z^2}+\frac{y^2}{z^2x^2}+\frac{z^2}{x^2y^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2.$

12. $\frac{xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{yz}{y^2+yz+z^2}+\frac{zx}{z^2+zx+x^2}=-1.$

13. $\frac{x^2}{2x^2+yz}+\frac{y^2}{2y^2+zx}+\frac{z^2}{2z^2+xy}=1.$

14. $$\frac{1}{(x^2-yz)(y^2-zx)}+\frac{1}{(y^2-zx)(z^2-xy)}$$
$$+\frac{1}{(z^2-xy)(x^2-yz)}=\frac{3}{(xy+yz+zx)^2}.$$

15. যদি $x+y+z=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3.$$

যদি $x+y+z=xyz$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

16. $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

17. $\dfrac{y+z}{1-yz}+\dfrac{z+x}{1-zx}+\dfrac{x+y}{1-xy}=\dfrac{y+z}{1-yz}\times\dfrac{z+x}{1-zx}\times\dfrac{x+y}{1-xy}$.

18. $\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1$.

যদি $xy+yz+zx=xyz$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

19. $\dfrac{x+y}{xy(z-1)}+\dfrac{y+z}{yz(x-1)}+\dfrac{z+x}{zx(y-1)}=1$.

20. $\dfrac{1}{x-yz}+\dfrac{1}{y-zx}+\dfrac{1}{z-xy}=\dfrac{4xyz}{(x-yz)(y-zx)(z-xy)}$.

21. যদি $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{xyz}{abc}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}-1=\frac{2abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

22. যদি $x=a+b+\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)}$ এবং $y=\dfrac{a+b}{4}+\dfrac{ab}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(x-a)^2-(y-b)^2=b^2$.

23. যদি $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$ এবং $z=c(a-b)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{3xyz}{abc}.$$

যদি $2s=a+b+c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

24. $\dfrac{a}{s-a}+\dfrac{b}{s-b}+\dfrac{c}{s-c}+2=\dfrac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

25. $c^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\dfrac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$.

26. $\dfrac{s-a}{(s-b)(s-c)}+\dfrac{s-b}{(s-c)(s-a)}+\dfrac{s-c}{(s-a)(s-b)}$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

27. $\dfrac{a(b-c)(s-a)}{(s-b)(s-c)}+\dfrac{b(c-a)(s-b)}{(s-c)(s-a)}+\dfrac{c(a-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)}=0.$

28. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\right)$

$$=1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right).$$

29. যদি $\dfrac{y+x}{y-x}+\dfrac{y+z}{y-z}=2$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$.

30. যদি $\dfrac{a^2(b-c)}{a-d}=\dfrac{b^2(a-c)}{b-d}$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$;

অথবা $a=b$.

31. $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}+3=x+y+z$ এবং $x+y+z\neq 0$;

প্রমাণ কর যে,

$$\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}+(x+y+z)=(xy+yz+zx).$$

32. যদি $\dfrac{a}{x}(b-c)+\dfrac{b}{y}(c-a)+\dfrac{c}{z}(a-b)=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{a}(y-z)+\frac{y}{b}(z-x)+\frac{z}{c}(x-y)=0$$

33. যদি $ab+bc+ca=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

34. যদি $a^2 = by + cz$, $b^2 = cz + ax$ এবং $c^2 = ax + by$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{x+a} + \frac{y}{y+b} + \frac{z}{z+c} = 1.$$

35. যদি $\dfrac{1}{x^2(y+z)} + \dfrac{1}{y^2(z+x)} + \dfrac{1}{z^2(x+y)} = \dfrac{1}{xyz}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} = 0.$$

36. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = a + b + c.$$

37. যদি $x = \dfrac{a+1}{a-1}$, $y = \dfrac{b+1}{b-1}$ এবং $z = \dfrac{c+1}{c-1}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}{(1+yz)(1+zx)(1+xy)} = \frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}.$$

38. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a-b}{m+ab} + \frac{b-c}{m+bc} + \frac{c-a}{m+ca} = \frac{m(a-b)(b-c)(c-a)}{(m+ab)(m+bc)(m+ca)}.$$

39. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a(x-b)(x-c)}{bc(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-c)(x-a)}{ca(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-a)(x-b)}{ab(c-a)(c-b)} = \frac{x^2}{abc}.$$

দ্বাবিংশ অধ্যায়

একঘাত সহ-সমীকরণ (Simultaneous Linear Equations)

249. অনির্ণেয় সমীকরণ (Indeterminate Equation)

কোন একঘাত (linear) সমীকরণে দুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে একটির যে-কোন মান ধরিয়া অপরটির মান নির্ণয় করা যায়।

$2x - y = 1$ সমীকরণটিতে x এবং y দুইটি অজ্ঞাত রাশি। x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া y এরও বিভিন্ন মান পাওয়া যায়, যথা, $x = 1, y = 1$; $x = 2, y = 3$; $x = 4, y = 7$ ইত্যাদি।

ইহা হইতে দেখা যায় যে, অজ্ঞাত রাশি দুইটির অসংখ্য মান-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপ যে সমীকরণের অসংখ্য বীজ থাকে তাহাকে **অনির্ণেয়** সমীকরণ বলে।

250. সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations)

কোন একটি সমীকরণে দুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে, সমীকরণটির অসংখ্য বীজ থাকে। অনেক সময়ে এই সকল বীজের এক বা একাধিক-দ্বারা ঐরূপ আর একটি সমীকরণ সিদ্ধ হইতে পারে কিনা জানিবার আবশ্যক হয়।

নিম্নের সমীকরণ দুইটি বিবেচনা কর :

$$2x - y = 1 \quad \text{বা} \quad y = 2x - 1, \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং

$$3x - y = 3 \quad \text{বা} \quad y = 3x - 3, \qquad \cdots \qquad (2)$$

ইহার প্রথমটি $x = 1, y = 1$; $x = 2, y = 3$; $x = 3, y = 5$; $x = 4, y = 7$;……প্রভৃতি অসংখ্য মান-সমূহ-দ্বারা সিদ্ধ হয়; আবার দ্বিতীয়টি $x = 1, y = 0$; $x = 2, y = 3$; $x = 3, y = 6$; $x = 4, y = 9$, ……প্রভৃতি অসংখ্য মান-সমূহ-দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি স্বতন্ত্রভাবে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান-দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে; কিন্তু এই সকল মানের মধ্যে কেবলমাত্র একটি যুগ্ম ($x=2,\ y=3$) দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

ঐ দুইটি সমীকরণকে সহ-সমীকরণ (simultaneous equations) বলে।

সংজ্ঞা। দুইটি অজ্ঞাত রাশি-যুক্ত দুইটি সমীকরণ অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একই মান-যুগ্ম-দ্বারা সিদ্ধ হইলে, সমীকরণ দুইটিকে ঐ দুই অজ্ঞাত রাশির **সহ-সমীকরণ** বলে।

সহ-সমীকরণে, দুইটির অধিক অজ্ঞাত রাশিও বিদ্যমান থাকিতে পারে; কিন্তু সাধারণত সমীকরণের সংখ্যা অজ্ঞাত রাশির সংখ্যার সমান হইলে অজ্ঞাত রাশিগুলির একই মানসমূহ-দ্বারা সমীকরণগুলি সিদ্ধ হয়।

যেমন, $x+y+z=6,\ x-y+z=2$ এবং $x+y-z=0$ এই তিনটি সমীকরণে তিনটি অজ্ঞাত রাশি বিদ্যমান আছে; ইহাদের প্রত্যেকটি x, y, z এর একই মানত্রয় ($x=1,\ y=2,\ z=3$) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

251. অসঙ্গত (Inconsistent) সমীকরণ

অনেক সময়ে এরূপও হইতে পারে যে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের কোনও মান-যুগ্ম-দ্বারাই দুইটি সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয় না। এইরূপ সমীকরণদ্বয়কে **অসঙ্গত** (inconsistent) **সমীকরণ** বলে।

যেমন, $3x+2y=3$ এবং $3x+2y=5$ এই দুইটি 'অসঙ্গত' সমীকরণ; কারণ x এবং y এর কোন মান-দ্বারাই $3x+2y$ যুগপৎ দুইটি বিভিন্ন সংখ্যা 3 এবং 5 এর সমান হইতে পারে না।

252. একঘাত সহ-সমীকরণ (Simultaneous Linear Equation)

দুই কিংবা তদধিক সহ-সমীকরণে, যদি অজ্ঞাত রাশিগুলির মাত্র প্রথম ঘাত বিদ্যমান থাকে, কিন্তু উহাদের কোন উচ্চতর ঘাত, অথবা গুণফল বিদ্যমান না থাকে, তাহা হইলে সহ-সমীকরণগুলিকে **একঘাত সহ-সমীকরণ** বলে।

যেমন, $2x+3y=8$ এবং $3x-y=1$ ইহারা দুইটি একঘাত সহ-সমীকরণ, কারণ $x=1,\ y=2$ এই মান-যুগ্ম-দ্বারা ঐ উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়, এবং

সমীকরণ-দ্বয়ে x এবং y এর কেবলমাত্র প্রথম ঘাত বিদ্যমান আছে, উহাদের উচ্চতর ঘাত, অথবা গুণফল নাই। কিন্তু

$$x+y=5 \text{ এবং } xy=6,$$

এই দুইটি সহ-সমীকরণ হইলেও উহারা একঘাত সহ-সমীকরণ নহে; কারণ প্রথমটি একঘাত সমীকরণ হইলেও দ্বিতীয়টিতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের গুণফল বর্তমান থাকায়, সমীকরণ দুইটি একঘাত সহ-সমীকরণ নহে। অথচ $x=2$, $y=3$ এবং $x=3$, $y=2$ এই দুইটি মান-যুগ্ম-দ্বারা দুইটি সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

দ্রষ্টব্য। সহ-সমীকরণের প্রত্যেকটি স্বাধীন (independent) হওয়া আবশ্যক, অর্থাৎ কোনটি যেন অপরটি হইতে পাওয়া সম্ভব না হয়। যেমন, $x+y=2$ এবং $2x+2y+3=7$ এই দুইটি সমীকরণ আকারে বিভিন্ন হইলেও স্বাধীন নহে; কারণ প্রথমটি হইতে সহজেই (2 দ্বারা গুণন করিয়া) দ্বিতীয়টি পাওয়া যায়; দৃশ্যত বিভিন্ন হইলেও উহারা প্রকৃত পক্ষে একই সমীকরণের বিভিন্ন রূপ।

253. অপনয়ন-প্রক্রিয়া (Process of Elimination)

দুইটি সমীকরণে একই রাশি বিদ্যমান থাকিলে, ঐ দুই সমীকরণের সমবায়ে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করা যায় যাহাতে ঐ সাধারণ রাশিটি থাকে না। এই প্রক্রিয়াকে **অপনয়ন-প্রক্রিয়া** বলে।

যেমন, $ax+b=0$ এবং $cx+d=0$ এই দুই সমীকরণের প্রথমটি হইতে $x=-\frac{b}{a}$ এবং দ্বিতীয়টি হইতে $x=-\frac{d}{c}$; x এর এই দুইটি মান সমিত করিয়া,

$$-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}, \text{ অর্থাৎ } \quad ad=bc.$$

শেষোক্ত সমীকরণটি প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে গঠিত হইয়াছে, এবং ইহাতে x ভিন্ন ঐ দুই সমীকরণস্থ অন্যান্য রাশি বিদ্যমান আছে; এ স্থলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে x 'অপনয়ন' করা হইয়াছে।

এইরূপে সমীকরণ-সংখ্যা যথেষ্ট হইলে, অর্থাৎ অপনেয় রাশির সংখ্যা অপেক্ষা সমীকরণের সংখ্যা অন্তত 1 বেশি হইলে, দুইটির অধিক সংখ্যক রাশিও অপনয়ন করা যায়।

254. সমাধানের প্রথম প্রকার

দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণ সমাধান করিতে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি অবলম্বন করিতে হয় :

1. সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি হইতে অজ্ঞাত রাশি দুইটির যে-কোন একটির (মনে কর, y এর) মান অন্যটির দ্বারা প্রকাশ কর।

2. লব্ধ মান দুইটিকে সাম্য-চিহ্ন (=) দ্বারা যুক্ত করিয়া একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশিযুক্ত একটি সরল সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

3. প্রাপ্ত সমীকরণটি সমাধান করিয়া x এর মান নির্ণয় কর।

4. প্রদত্ত সমীকরণের যে-কোন একটিতে x এর পরিবর্তে এই মানটি লিখিলে কেবলমাত্র y-যুক্ত একটি সরল সমীকরণ পাওয়া যাইবে ; ইহা সমাধান করিয়া y এর মান নির্ণয় কর।

দ্রষ্টব্য 1. এই প্রক্রিয়াকেও **"অপনয়ন-প্রক্রিয়া"** (Process of Elimination) বলে। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের কোন্‌টি অপনয়ন করিলে সমাধানের সুবিধা হইবে তাহা স্থির করা অভ্যাসের উপর নির্ভর করে ; সাধারণত অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের মধ্যে যেটির সহগ (co-efficient) অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র তাহাকেই অপনয়ন করা সুবিধাজনক।

দ্রষ্টব্য 2. সমীকরণ দুইটিতে, x এবং y না থাকিয়া, সর্বত্রই যদি উহাদের বিপরীত (reciprocal) রাশি $\frac{1}{x}$ এবং $\frac{1}{y}$ থাকে, তাহা হইলে ইহাদের পরিবর্তে যথাক্রমে দুইটি নূতন অজ্ঞাত রাশি u এবং v লিখিয়া, u এবং v এর মান নির্ণয় করা যায় ; পরে সহজেই x এবং y এর মানও নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$x+y=9, \quad \cdots \quad (1)$$
$$x-y=3. \quad \cdots \quad (2)$$

এ স্থলে, y কে অপনয়ন করিতে হইলে,

(1) হইতে $y=9-x$,

(2) হইতে $y=x-3$.

এখন y এর এই মান দুইটি সমিত করিয়া,

$$9-x=x-3\,; \quad \therefore \quad x=6.$$

(1) এ x এর পরিবর্তে উপরি লব্ধ মানটি লিখিয়া,

$$6+y=9, \text{ বা } \quad y=3.$$

সুতরাং $x=6,\ y=3$ নির্ণেয় বীজ।

দ্রষ্টব্য। সমীকরণদ্বয় উপরের আকারবিশিষ্ট হইলে উহাদের যোগ- এবং বিয়োগ-দ্বারা অতি সহজেই অপনয়ন-ক্রিয়া সম্পাদিত হইতে পারে। ইহাকে 'মিলন-প্রণালী' (rule of concurrence) বলা যাইতে পারে (লীলাবতী, অনু. 55)।

উদা. 2. সমাধান কর :

$$3x+2y=16,$$
$$2x+3y=19.$$

সমীকরণ দুইটি হইতে যথাক্রমে,

$$y=\frac{16-3x}{2} \text{ এবং } y=\frac{19-2x}{3}\,;$$

$$\therefore \qquad \frac{16-3x}{2}=\frac{19-2x}{3},$$

বা, $\quad 48-9x=38-4x\,; \quad \therefore \quad x=2.$

প্রথম সমীকরণে x এর পরিবর্তে উপরি লব্ধ মানটি লিখিয়া $6+2y=16$,

$$\therefore \quad y=5\,; \qquad \therefore \quad x=2, \quad y=5.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=16, \quad \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=19.$

$\dfrac{1}{x}=u$ এবং $\dfrac{1}{y}=v$ লিখিয়া,

$$3u+2v=16 \qquad \cdots \quad (1)$$
$$2u+3v=19 \qquad \cdots \quad (2)$$

পূর্ব প্রকারে সমাধান করিয়া, $u=2$ এবং $v=5.$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{u}=\frac{1}{2} \text{ এবং } y=\frac{1}{v}=\frac{1}{5}.$$

প্রশ্নমালা 91

সমাধান কর :

1. $x+y=10,\quad x-2y=4.$

2. $x+3y=-2,\quad 4x+5y=13.$

3. $\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{2}(y-1),\quad x-y=1.$

4. $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8,\quad \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11.$

5. $3x+4y=27,\quad 5x-3y=16.$

6. $\dfrac{x+2}{3}+8y=31,\quad \dfrac{y+5}{4}+2x=40.$

7. $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3y}{2}=4x-y,\quad 3x-2y=1.$

8. $x-2y=1=3x+5y.$

9. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3,\quad x-2y=2.$

10. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{7}y=15,\quad \frac{7}{15}x-\frac{4}{3}y=-21.$

11. $\dfrac{x+y}{3}+\dfrac{3x-2y}{4}=\dfrac{3}{4},\quad 17x-31y=\dfrac{3}{2}.$

12. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=3,\quad \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=48.$

13. $x+\dfrac{2}{y}=13,\quad 2x-\dfrac{5}{y}=-1.$

14. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y+1}=10=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}.$

15. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=1,\quad \dfrac{8}{x}-\dfrac{7}{y}=-\dfrac{1}{6}.$

255. দ্বিতীয় প্রকার

এই প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিকে এমন দুইটি রাশি-দ্বারা গুণ করিতে হয়, যাহাতে অজ্ঞাত রাশি দুইটির যে-কোন একটির সহগ লব্ধ সমীকরণ দুইটিতে সমান হয়। লব্ধ সমীকরণ দুইটি যোগ বা বিয়োগ করিয়া এমন একটি সমীকরণ পাওয়া যায়, যাহাতে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, অন্যটি থাকে

না। অনেক ক্ষেত্রে এই প্রণালী-দ্বারা সহজে অপনয়ন-ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়।

অজ্ঞাত রাশি দুইটির যে-কোন একটিকে (মনে কর, y) অপনয়ন করিতে হইলে,

1. প্রথম সমীকরণকে দ্বিতীয় সমীকরণস্থ y এর সহগ-দ্বারা, এবং দ্বিতীয় সমীকবণকে প্রথম সমীকরণস্থ y এর সহগ-দ্বারা গুণ কর।

2. লব্ধ সমীকরণ-দ্বয়ে y এর সহগ দুইটি বিভিন্ন চিহ্নের হইলে, সমীকরণ দুইটি যোগ কর, এবং একই চিহ্নযুক্ত হইলে বিয়োগ কর।

3. এইরূপ যোগ অথবা বিয়োগ করিয়া যে সমীকরণটি পাওয়া যাইবে তাহাতে কেবল মাত্র x থাকিবে, সুতরাং ইহা হইতে x এর মান নির্ণয় করিয়া পরে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়েব যে-কোন একটি হইতে y এর মান নির্ণয় কবা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$4x+27y=179,$$
$$6x-13y=1.$$

এ স্থলে x এর সহগ দুইটি y এর সহগ দুইটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে x অপনয়ন করাই সুবিধাজনক।

প্রথম সমীকরণকে 3 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া (কারণ এইরূপ কবিলে, লব্ধ সমীকরণদ্বয়ে x এর সহগ দুইটি পরস্পর সমান হইবে),

$$12x+81y=537$$
$$12x-26y=\quad 2$$

বিয়োগ করিয়া, $107y=535$;

$\therefore \quad y=5.$

প্রথম সমীকরণে y এর পরিবর্তে এই মানটি লিখিয়া,

$$4x=179-27\times5=44,$$
$$\therefore \quad x=11, \; y=5.$$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$3x-\frac{4}{y}=2,$$
$$4x+\frac{7}{y}-13\frac{3}{4}=0.$$

এ স্থলে উভয় সমীকরণেই y এর বিপরীত রাশি $\frac{1}{y}$ আছে, y নাই। $\frac{1}{y}$ স্থলে v লিখিয়া, এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে ভগ্নাংশ অপসারণ করিয়া,

$$3x - 4v = 2,$$
$$16x + 28v = 55\ ;$$

উপরি উক্ত প্রক্রিয়া-অনুসারে এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া,

$$x = 1\tfrac{32}{37} \text{ এবং } v = \tfrac{133}{148}\ ;$$

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{v} = \tfrac{148}{133} = 1\tfrac{15}{133}.$$

প্রশ্নমালা 92

সমাধান কর :

1. $2x + 5y = 51,$ $5x + 2y = 54.$

2. $6x - 7y = 16,$ $9x - 5y = 35.$

3. $3x + \frac{4}{y} = 19,$ $5x - \frac{3}{y} = 13.$

4. $x + \frac{2}{y} = 3\frac{2}{3},$ $2x - \frac{5}{y} = 4\frac{1}{3}.$

5. $13x + 11y = 70,$ $11x + 13y = 74.$

6. $3{\cdot}75x - 1{\cdot}5y = 27,$ $7x + 6y = 68.$

7. $4{\cdot}5x + 7{\cdot}5y = 11{\cdot}25,$ $8{\cdot}4x - {\cdot}21y = 1{\cdot}617.$

8. $11x + 12y = 58,$ $12x + 11y = 57.$

9. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2, \quad \frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5.$

10. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 6\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2x}\right) = 2.$

11. $7x + \frac{5y+9x}{11} = 17,$ $6y + \frac{11y+9x}{17} = 21.$

12. যদি $x + 2y = 4$ এবং $2x + 3y = 7$ হয়, তাহা হইলে $x - 8y$ এবং $15y - x$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

13. $y = ax + b$ সমীকরণটি $x = 4,\ y = 8,$ এবং $x = 12,\ y = 20$ এই বীজগুলির দ্বারা সিদ্ধ হইলে, a এবং b এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

256. তৃতীয় প্রকার

এই প্রক্রিয়া-অনুযায়ী সমাধানকালে নিম্নলিখিত নিয়মে অগ্রসর হইতে হয় :

1. সমীকরণ দুইটির একটি হইতে যে-কোন একটি অজ্ঞাত রাশির (মনে কর, y এর) মান x দ্বারা প্রকাশ কর।

2. অন্য সমীকরণটিতে y এর পরিবর্তে এই মানটি লেখ।

3. লব্ধ সমীকরণটিতে কেবলমাত্র x থাকিবে ; ইহা হইতে x এর মান নির্ণয় কর।

4. x এর এই মান প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে-কোন একটিতে লিখিয়া y এর মান নির্ণয় কর।

এই প্রক্রিয়াকে **পরিবর্ত-প্রক্রিয়া** (Method of Substitution) বলা হয়।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$3x+2y=7, \quad 8x-y=6.$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $y=8x-6$.

y এর এই মানটি প্রথম সমীকরণে লিখিয়া, $3x+2(8x-6)=7$,

$$\text{বা } 19x=19 \; ; \quad \therefore \quad x=1.$$

এক্ষণে দ্বিতীয় সমীকরণে x এর পরিবর্তে উপরি লব্ধ মানটি লিখিয়া,

$$y=8\times1-6=2 \; ; \qquad \therefore \quad x=1, \quad y=2.$$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{7(y-2)}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{3(y-2)}=\frac{1}{6}.$$

এ স্থলে $u=\dfrac{1}{x-1}$ এবং $v=\dfrac{1}{y-2}$ ধরিলে নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি পাওয়া যায় :—

$$\frac{u}{3}-\frac{v}{7}=\frac{2}{3}, \quad \frac{u}{2}-\frac{v}{3}=\frac{1}{6}.$$

ভগ্নাংশ-মুক্ত করিয়া, $7u-3v=14,\ 3u-2v=1.$

উপরে বর্ণিত নিয়ম-অনুসারে সমাধান করিয়া, $u=5,\quad v=7.$

সুতরাং, $\dfrac{1}{x-1}=u=5$ এবং $\dfrac{1}{y-2}=v=7$;

$\therefore\ x-1=\frac{1}{5}$, বা $x=1+\frac{1}{5}=1\frac{1}{5}$;

$y-2=\frac{1}{7}$, বা $y=2+\frac{1}{7}=2\frac{1}{7}$.

প্রশ্নমালা 93

সমাধান কর :

1. $2x+{\cdot}4y=1{\cdot}2,$
   $3{\cdot}4x-{\cdot}02y={\cdot}01.$

2. $5x+2y=2xy,$
   $4x+3y=2\frac{3}{10}xy.$

3. $\dfrac{7+x}{5}-\dfrac{2x-y}{4}=3y-5,$
   $\dfrac{5y-7}{2}+\dfrac{4x-3}{6}=18-5x.$

4. $\dfrac{x+y}{5}+\dfrac{x-y}{2}=1\frac{1}{2},$
   $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=2\frac{1}{6}.$

5. $1{\cdot}5\,(x+3)+1{\cdot}25y=19,$
   $1{\cdot}2\,(x+3)+0{\cdot}75y=13{\cdot}2.$

6. $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{y+1}=1,$
   $\dfrac{7}{2x-4}+\dfrac{25}{3y+3}=3.$

7. $\dfrac{6x+7}{3}+\dfrac{4x-y}{3x-4}=\dfrac{4x-5}{2},$
   $\dfrac{5y-6}{10}+\dfrac{3x-2y}{2y-5}=\dfrac{8y-9}{16}.$

8. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{2}{y-1}=1,$
   $\dfrac{x+1}{4}+\dfrac{3}{y-1}=3.$

9. $\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=5,$
   $\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=5\dfrac{2}{3}.$

10. $\dfrac{4}{2x-y+3}+\dfrac{1}{x-2y-4}=2\frac{1}{2},$
    $\dfrac{3}{2x-y+3}-\dfrac{2}{x-2y-4}=\dfrac{1}{2}.$

11. $\dfrac{4x+5y}{40}=x-y,$
    $\dfrac{2x-y}{3}+2y=\dfrac{1}{2}.$

12. $\dfrac{7}{3x-2}-\dfrac{5}{4y+3}=\dfrac{4}{(3x-2)(4y+3)},$
    $\dfrac{3}{3x-2}-\dfrac{2}{4y+3}=\dfrac{2}{(3x-2)(4y+3)}.$

257. আক্ষরিক সহগ-বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ

উদা. 1. সমাধান কর : $x+y=a^2+b^2,$

$$ax+by=a^3+b^3.$$

প্রথম সমীকরণটিকে b দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে বিয়োগ কর। তাহা হইলে,

$$(a-b)x=(a^3+b^3)-b(a^2+b^2)$$

$$=a^3-a^2b=a^2(a-b);$$

$$\therefore \quad x=a^2.$$

এক্ষণে প্রথম সমীকরণে x এর পরিবর্তে এই মানটি লিখিয়া,

$$y=a^2+b^2-a^2=b^2;$$

$$\therefore \quad x=a^2, \quad y=b^2.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=3a-2b,$

$$\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=5a+b.$$

সমীকরণ দুইটিতে $\dfrac{1}{x}=u$ এবং $\dfrac{1}{y}=v$ লিখিয়া,

$$au-bv=3a-2b \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$(a+b)u+(a-b)v=5a+b \quad \cdots \quad (2)$$

(1) কে $(a-b)$ দ্বারা, এবং (2) কে b দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল দুইটি যোগ কর। তাহা হইলে,

$$a(a-b)u-b(a-b)v=(3a-2b)(a-b)$$
$$b(a+b)u+b(a-b)v=b(5a+b)$$
$$\overline{\{a(a-b)+b(a+b)\}u=(3a-2b)(a-b)+b(5a+b)},$$

বা, $(a^2+b^2)u=3(a^2+b^2)$; $\therefore \quad u=3.$

$\therefore$ সমীকরণ (1) হইতে, $3a-bv=3a-2b$;

$$\therefore \quad bv=2b, \text{ অতএব } v=2;$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{u}=\frac{1}{3} \text{ এবং } y=\frac{1}{v}=\frac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 94

1. $ax+by=c,$
   $a^2x+b^2y=c^2.$

2. $ax+by=a+b,$
   $a^2x+b^2y=a^2+b^2.$

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,$
   $ax-by=a^2-b^2.$

4. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b,$
   $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=2.$

5. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a,$
   $ax-by=(a+b)(a-b)^2.$

6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b-a}=5m,$
   $\frac{x}{b}+\frac{y}{a-b}=7m.$

7. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c},$
   $\frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1+\frac{y}{c}.$

8. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m,$
   $\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=n.$

9. $(a+b)x+(a-b)y=2a,$
   $(a-b)x+(a+b)y=2b.$

10. $2ab(x-y)=xy(a-b),$
    $2ab(x+y)+xy(a+b+2ab)=0.$

11. $a(x+y)=b(x-y)=2ab.$

12. $x-y=2a,$
    $ax+by=a^2+b^2.$

13. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3.$

258. বজ্রগুণন-প্রণালী (Method of Cross Multiplication)

ইতিপূর্বে অপনয়ন-প্রক্রিয়া-সাহায্যে সহ-সমীকরণ-সমাধান-প্রণালী বর্ণিত হইয়াছে; ইহা বজ্রগুণন-প্রণালীরই একটি বিশেষ রূপ। নিম্নের উদাহরণ হইতে এ সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর: $ax+by+c=0,$

$$a'x+b'y+c'=0.$$

সাধারণ নিয়ম-অনুসারে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে x অথবা y কে অপনয়ন করিতে হয়। y কে অপনয়ন করিতে হইলে, দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ

b' দ্বারা প্রথম সমীকরণকে, এবং প্রথম সমীকরণের y এর সহগ b দ্বারা দ্বিতীয় সমীকরণকে গুণ করিতে হইবে, এবং লব্ধ ফলদ্বয়ের অন্তর লইতে হইবে। সুতরাং,

$$(ab'-a'b)x=bc'-b'c\ ;\qquad \therefore\quad x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\qquad\cdots\ (1)$$

এইরূপে, x অপনয়ন করিয়া,
$$y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\qquad\cdots\ (2)$$

(1) এবং (2) হইতে x এবং y এর মান নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় :—

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

এই ফলটি নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে মনে রাখা যাইতে পারে :—

1. x এর নিম্নের রাশি = (প্রথম সমীকরণে y এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ) – (দ্বিতীয় সমীকরণে y এর সহগ × প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদ)।

2. y এর নিম্নের রাশি = (দ্বিতীয় সমীকরণে x এর সহগ × প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদ)–(প্রথম সমীকরণে x এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণেব ধ্রুবক পদ)।

3. একের নিম্নের রাশি = (প্রথম সমীকরণে x এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণে y এর সহগ)–(দ্বিতীয় সমীকরণে x এর সহগ × প্রথম সমীকরণে y এর সহগ)।

উদা. 2. সমাধান কর : $5x+2y-1=3x-y+14=x+19y+6.$

এখানে, $\quad 5x+2y-1=3x-y+14\ ;$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া, $2x+3y-15=0 \qquad\cdots\ (1)$

পুনরায়, $\quad 5x+2y-1=x+19y+6\ ;$

$$4x-17y-7=0\qquad\cdots\ (2)$$

এক্ষণে বজ্রগুণন-প্রণালী-দ্বারা সমীকরণ (1) এবং (2) সমাধান করা যায়।

এ স্থলে, $a=2,\ b=3,\ c=-15$ এবং $a'=4,\ b'=-17,\ c'=-7.$

$$\therefore\quad \frac{x}{3\times(-7)-(-15)\times(-17)}=\frac{y}{(-15)\times4-(-7)\times2}$$
$$=\frac{1}{2\times(-17)-3\times4},$$

বা, $\frac{x}{-276}=\frac{y}{-46}=\frac{1}{-46}$,

$\therefore \quad x=6 ; \quad y=1.$

259. অনির্ণীত গুণক-প্রণালী (Method of Undetermined Multipliers)

দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণ এই প্রণালী-দ্বারাও সমাধান করা যায়। নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর: $ax+by=c,$ ... (1)

$a'x+b'y=c'.$ ... (2)

(1) কে l দ্বারা, এবং (2) কে m দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ দুইটি যোগ করিলে,

$(al+a'm)x+(bl+b'm)y=cl+c'm$ ... (3)

l এবং m এর যে-কোন মান ধরা যাইতে পারে। l এবং m এর এরূপ মান ধর যদ্দ্বারা (3) এ y এর সহগটি শূন্য হয়, অর্থাৎ মনে কর,

$$bl+b'm=0, \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{l}{m}=-\frac{b'}{b}.$$

এক্ষণে সমীকরণ (3) এ l এবং m এর পরিবর্তে এইরূপ মানদ্বয় লিখিলে, সমীকরণটি $(al+a'm)x=cl+c'm$ আকার প্রাপ্ত হয়।

$$\therefore \quad x=\frac{cl+c'm}{al+a'm}=\frac{c.\frac{l}{m}+c'}{a.\frac{l}{m}+a'}=\frac{c\left(-\frac{b'}{b}\right)+c'}{a\left(-\frac{b'}{b}\right)+a'}=\frac{bc'-b'c}{a'b-ab'}.$$

পুনরায় l এবং m এর এরূপ মান ধর যদ্দ্বারা (3) এ x এর সহগ $al+a'm=0$ হয়, অর্থাৎ $\frac{l}{m}=-\frac{a'}{a}$ হয়।

এক্ষণে সমীকরণ (3) এ l এবং m এর পরিবর্তে এইরূপ মানদ্বয় লিখিলে, সমীকরণটি $(bl+b'm)y=cl+c'm$ আকার প্রাপ্ত হয়।

$$\therefore \quad y=\frac{cl+c'm}{bl+b'm}=\frac{c.\frac{l}{m}+c'}{b.\frac{l}{m}+b'}=\frac{c\left(-\frac{a'}{a}\right)+c'}{b\left(-\frac{a'}{a}\right)+b'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

$$=\frac{ca'-c'a}{a'b-ab'}.$$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$5x+3y-11=0, \qquad \cdots \quad (1)$$

$$6x+4y-12=0. \qquad \cdots \quad (2)$$

(1)কে l দ্বারা, এবং (2)কে m দ্বারা গুণ করিয়া এবং গুণফল দুইটি যোগ করিয়া,

$$(5l+6m)x+(3l+4m)y=11l+12m \qquad \cdots \quad (3)$$

মনে কর, $3l+4m=0$, অর্থাৎ $\frac{l}{m}=-\frac{4}{3}$.

সুতরাং সমীকরণ (3) হইতে, $(5l+6m)x=11l+12m$;

$$\therefore \quad x=\frac{11l+12m}{5l+6m}=\frac{11.\frac{l}{m}+12}{5.\frac{l}{m}+6}=\frac{11\times(-\frac{4}{3})+12}{5\times(-\frac{4}{3})+6}=4.$$

পুনরায়, মনে কর, $5l+6m=0$, অর্থাৎ $\frac{l}{m}=-\frac{6}{5}$.

$\therefore$ সমীকরণ (3) হইতে, $(3l+4m)y=11l+12m$;

$$\therefore \quad y=\frac{11l+12m}{3l+4m}=\frac{11.\frac{l}{m}+12}{3.\frac{l}{m}+4}=\frac{11\times(-\frac{6}{5})+12}{3\times(-\frac{6}{5})+4}=-3\ ;$$

$$\therefore \qquad x=4, \qquad y=-3.$$

প্রশ্নমালা 95

বজ্রগুণন-প্রণালী অথবা অনির্ণীত গুণক-প্রণালী-দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণ-গুলি সমাধান কর :—

1. $3x+5y=8,\ 4x+3y=7.$ 2. $3x+4y=14,\ 4x-3y=2.$ 3. $7x-3y=1,\ 9x-2y=5.$

4. $lx+my=n,\ mx+ny=l.$ 5. $7x+4y=8,\ 9x-6y=1.$ 6. $12x+34y=8\frac{1}{15},\ 34x+12y=8\frac{4}{5}.$

7. $\dfrac{2x+2y-3}{5}=\dfrac{3x-7y+4}{6}=\dfrac{8y-x+2}{7}.$

8. $3x+20=4y-10,\ 4(x-1)=3(y-3).$ 9. $5x+7y=43,\ 11x+9y=69.$ 10. $2x+y=0,\ 4x-5y=3\frac{2}{3}.$

260 প্রক্রিয়ার বিশেষ কৌশল

অনেক সময়ে সমীকরণের আকার-অনুযায়ী বিশেষ বিশেষ কৌশল অবলম্বন করিলে সমাধানের সুবিধা হয়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=a \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{n}{x}+\frac{m}{y}=b \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া, $\dfrac{m+n}{x}+\dfrac{m+n}{y}=a+b,$

$m+n$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{a+b}{m+n} \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $\dfrac{m-n}{x}-\dfrac{m-n}{y}=a-b,$

$m-n$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{a-b}{m-n} \quad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া, $\dfrac{2}{x} = \dfrac{a+b}{m+n} + \dfrac{a-b}{m-n} = \dfrac{2(am-bn)}{m^2-n^2}$;

$\therefore \quad x = \dfrac{m^2-n^2}{am-bn}$; এইরূপে, $y = \dfrac{m^2-n^2}{bm-an}$.

উদা. 2. সমাধান কর : $3x+5y=10$,
$5x+3y=22$.

সমীকরণদ্বয় যোগ এবং বিয়োগ করিয়া,

$8x+8y=32$, বা $x+y=4$;
এবং $2x-2y=12$, বা $x-y=6$;
$\therefore$ $x=5$ $y=-1$.

261. তিনটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ-সমাধান-প্রক্রিয়া

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি হইতে অজ্ঞাত রাশিত্রয়ের যে-কোন একটিকে অপনয়ন করিলে যে দুইটি একঘাত সমীকরণ পাওয়া যায় তাহাতে কেবলমাত্র দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিদ্যমান থাকে ; এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করা যায় ; পরে এই দুইটি মান প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির যে-কোন একটিতে বসাইলেই তৃতীয়টির মান নির্ণীত হয়। নিম্নলিখিত উদাহরণ হইতে প্রক্রিয়াটি বুঝা যাইবে।

উদা. সমাধান কর : *

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \qquad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad \cdots \quad (2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \qquad \cdots \quad (3)$$

* এই উদাহরণে ব্যবহৃত প্রতীকগুলি স্পষ্টরূপে বুঝিতে হইবে। 1, 2 প্রভৃতি চিহ্নযুক্ত অক্ষরগুলি পরস্পর বিভিন্ন ; যেমন a_1, a_2, a_3 প্রভৃতি। এইরূপ b_1, b_2, b_3 প্রভৃতি এবং c_1, c_2, c_3 প্রভৃতি সকলেই পরস্পর বিভিন্ন। বিভিন্ন সমীকরণের অনুরূপ সহগগুলি এইরূপ বিভিন্ন অঙ্কযুক্ত একই অক্ষর-দ্বারা সূচিত করিলে সমীকরণগুলি মনে রাখিবার পক্ষে বিশেষ সুবিধা হয়। অঙ্কযুক্ত অক্ষরের পরিবর্তে মাত্রাযুক্ত অক্ষর যথা a', a'' প্রভৃতিও কখন কখন ব্যবহৃত হয় ; ইহাদিগকেও পরস্পর বিভিন্ন মনে করিতে হইবে।

প্রথমে (1) এবং (2) হইতে নিম্নলিখিত উপায়ে z অপনয়ন কর :

(1) কে c_2 এবং (2) কে c_1 দ্বারা গুণ কর, এবং লব্ধ ফলদ্বয়ের একটি হইতে অপরটি বিয়োগ কর। এইরূপ করিলে নিম্নলিখিত সমীকরণটি পাওয়া যায় :

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = c_2d_1 - c_1d_2 \qquad \cdots (4)$$

এইরূপে, (2) এবং (3) হইতে z অপনয়ন করিয়া,

$$(a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y = c_3d_2 - c_2d_3 \qquad \cdots (5)$$

এক্ষণে অনু. 258 এ বর্ণিত বজ্রগুণন-প্রণালী-অনুসারে (4) এবং (5) হইতে x এবং y এর মান নির্ণয় করা যায়। তাহার পর প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির যে-কোন একটিতে x এবং y এর পরিবর্তে উহাদের মান লিখিলেই z এর মান নির্ণীত হইবে।

দ্রষ্টব্য 1. z এর পরিবর্তে x অথবা y এর যে-কোন একটিকেও অপনয়ন করা যাইতে পারে, তখন অবশিষ্ট অক্ষরদ্বয়সমন্বিত দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। কোন্ অক্ষরটি অপনয়ন করিতে হইবে তাহা প্রদত্ত সমীকরণ-সমূহের আকারের উপর নির্ভর করে।

দ্রষ্টব্য 2. তিনের অধিক সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণ-সমাধানের সময় এই প্রণালী অবলম্বন করা যায়। কেবল মাত্র মনে রাখিতে হইবে যে, প্রদত্ত সমীকরণ-সমূহের সংখ্যা অজ্ঞাত রাশি-সমূহের সংখ্যার সমান হওয়া আবশ্যক।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$x + y + z = 6 \qquad \cdots (1)$$
$$2x + 3y + 4z = 20 \qquad \cdots (2)$$
$$3x + y + 2z = 11 \qquad \cdots (3)$$

(1) কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া এবং গুণফল হইতে সমীকরণ (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\begin{array}{l} 4x + 4y + 4z = 24 \\ \underline{2x + 3y + 4z = 20} \\ 2x + y \qquad = 4 \end{array} \qquad \cdots (4)$$

(3) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং লব্ধ গুণফল হইতে সমীকরণ (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\begin{array}{l} 6x+2y+4z=22 \\ \underline{2x+3y+4z=20} \\ 4x-y \qquad = \; 2 \end{array} \qquad \cdots (5)$$

(4) এবং (5) যোগ করিয়া, $6x=6$; $\therefore \quad x=1.$

(4) এ x এর পরিবর্তে এই মানটি লিখিয়া, $y=2$; এবং (1) এ x এবং y এর মান দুইটি লিখিয়া, $z=3.$

$\therefore \quad x=1, \; y=2$ এবং $z=3.$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=12,$$

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}-\frac{1}{6x}=8,$$

$$\frac{1}{3z}+\frac{1}{2x}=10.$$

এ স্থলে $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ এবং $\frac{1}{z}$ প্রত্যেক সমীকরণেই বিদ্যমান আছে।

অতএব সমীকরণ তিনটিতে, $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ এবং $\frac{1}{z}=w$ লিখিয়া, এবং প্রাপ্ত সমীকরণ তিনটি ভগ্নাংশ মুক্ত করিয়া,

$$3u+2v+w=72 \qquad \cdots (1)$$

$$3v+2w-u=48 \qquad \cdots (2)$$

$$2w+3u=60 \qquad \cdots (3)$$

এক্ষণে, নিম্নলিখিতরূপে (1) এবং (2) হইতে v অপনয়ন কর :—

(1) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া, $\quad 9u+6v+3w=216$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $\quad \underline{-2u+6v+4w=\;\;96}$

বিয়োগ করিয়া, $\quad 11u \qquad -w=120 \qquad \cdots (4)$

এক্ষণে (3) এবং (4) হইতে w অপনয়ন কর :—

(4) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $22u-2w=240$

এবং, $3u+2w=60$

যোগ করিয়া, $25u=300$

$$\therefore \quad u=12=\frac{1}{x}, \text{ অর্থাৎ } x=\frac{1}{12}.$$

(4) এ u এর পরিবর্তে এই মানটি লিখিয়া,

$$w=\frac{1}{z}=132-120=12\,; \quad \therefore \quad z=\frac{1}{12}.$$

এক্ষণে (1) এ u এবং w এর পরিবর্তে প্রাপ্ত মান দুইটি লিখিয়া,

$$2v=72-3u-w=24\,;$$

$$\therefore \quad v=\frac{1}{y}=12\,; \text{ বা } y=\frac{1}{12}\,;$$

অতএব, $x=y=z=\frac{1}{12}.$

প্রশ্নমালা 96

সমাধান কর :

1. $x+y+z=10,$
 $2x+3y+4z=33,$
 $3x-y+z=8.$

2. $4x-3y+2z=18,$
 $5x+2y+3z=21,$
 $7y-4z=12.$

3. $x+y+z=1,$
 $2x+3y+z=4,$
 $4x+9y+z=16.$

4. $x-y-z=-15,$
 $y+x+2z=40,$
 $4z-5x-6y=-150.$

5. $x+y+z=6,$
 $3x-2y+5z=14,$
 $4x+3y-2z=4.$

6. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=12-\frac{1}{6}z,$
 $\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}x=8,$
 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}z=10.$

7. $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{4z}=1,$
$\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{5z}=1,$
$\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{5y}+\dfrac{1}{6z}=1.$

8. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=12,$
$\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=10,$
$\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=2.$

9. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=12,$
$\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}=14,$
$\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{7}{z}=-6.$

10. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=k\ ,$
$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}=k^2,$
$\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z}=k^3.$

262. অনির্ণীত গুণক-প্রণালী (Method of Undetermined Multipliers)

তিন (বা তদধিক) অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণ-সমূহ অনু. 259 এ বর্ণিত অনির্ণীত গুণক-প্রণালী-সাহায্যেও সমাধান করা যায়।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি বিবেচনা কর :

$$a_1+b_1y+c_1z=d_1 \qquad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad \cdots \quad (2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \qquad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (2) কে p এবং (3) কে q দ্বারা গুণ করিয়া, এবং লব্ধ ফল দুইটি সমীকরণ (1) এর সহিত যোগ করিয়া,

$$(a_1+a_2p+a_3q)x+(b_1+b_2p+b_3q)y+(c_1+c_2p+c_3q)z$$
$$=d_1+d_2p+d_3q \qquad \cdots \quad (4)$$

উক্ত p এবং q এর মান ইচ্ছানুসারে নির্বাচন করা যায়।

এখন p এবং q এর এরূপ মান নির্বাচন কর যেন সমীকরণ (4) এ y এবং z এর সহগ দুইটি শূন্য হয়; অর্থাৎ মনে কর,

$$b_1+b_2p+b_3q=0,$$

এবং $$c_1+c_2p+c_3q=0.$$

এই দুই সমীকরণ হইতে, অনু. 258 এ বর্ণিত বজ্রগুণন-প্রণালী-দ্বারা,

$$\frac{1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{p}{b_3c_1-b_1c_3}=\frac{q}{b_1c_2-b_2c_1};$$

$$\therefore\quad p=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_2c_3-b_3c_2}\text{ এবং } q=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_2c_3-b_3c_2}\qquad\cdots\quad(5)$$

সমীকরণ (4) এ, p এবং q এর পরিবর্তে উক্ত মানদ্বয় লিখিয়া,

$$(a_1+a_2p+a_3q)x=d_1+d_2p+d_3q\,;$$

$$\therefore\qquad x=\frac{d_1+d_2p+d_3q}{a_1+a_2p+a_3q}\qquad\cdots\quad(6)$$

p এবং q এর পরিবর্তে (5) এ প্রাপ্ত মানদ্বয় লিখিয়া, এবং সরল করিয়া,

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

এইরূপ, যদি p এবং q এর এরূপ মান নির্বাচন করা হয় যেন x এবং z এর সহগ দুইটি শূন্য হয়, তাহা হইলে উপরি উক্ত নিয়মে y এর মান নির্ণীত হইবে; এবং যদি x ও y এর সহগ দুইটি শূন্য হয় তাহা হইলে z এর মান নির্ণীত হইবে।

দ্রষ্টব্য 1. (6) এ a_1, a_2, a_3 এর পরিবর্তে যথাক্রমে b_1, b_2, b_3 লিখিলে y এর মান, এবং c_1, c_2, c_3 লিখিলে z এর মান পাওয়া যায়। পক্ষান্তরে y অথবা z এর মান হইতে x এর মান নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. x, y এবং z এর মানসমূহ একই হরবিশিষ্ট।

উদা. সমাধান কর:

$$2x-y+3z=7\qquad\cdots\quad(1)$$
$$x+2y+z=8\qquad\cdots\quad(2)$$
$$4x-3y+3z=9\qquad\cdots\quad(3)$$

(2) কে p এবং (3) কে q দ্বারা গুণ করিয়া, এবং লব্ধ ফল দুইটি (1) এর সহিত যোগ করিয়া,

$$(2+p+4q)x+(2p-3q-1)y+(3+p+3q)z=7+8p+9q\qquad\cdots\quad(4)$$

(i) (4) এ y এবং z এর সহগ দুইটিকে শূন্য ধরিয়া,

$$2p-3q-1=0,$$

এবং $$p+3q+3=0\,;$$

$$\therefore\quad \frac{p}{-9+3}=\frac{q}{-1-6}=\frac{1}{6+3},$$

বা $$p=-\tfrac{2}{3} \text{ এবং } q=-\tfrac{7}{9}\,,$$

$$\therefore\ \text{(4) হইতে,}\quad x=\frac{7+8p+9q}{2+p+4q}=\frac{7+8\times(-\frac{2}{3})+9\times(-\frac{7}{9})}{2+(-\frac{2}{3})+4\times(-\frac{7}{9})}$$

$$=\frac{7-\frac{16}{3}-7}{2-\frac{2}{3}-\frac{28}{9}}=\frac{-16\times 3}{18-6-28}=\frac{-48}{-16}=3.$$

(ii) (4) এ x এবং z এর সহগ দুইটিকে শূন্য ধরিয়া,

$$p+4q+2=0,$$

এবং $$p+3q+3=0\,;$$

সমাধান করিয়া, $p=-6$ এবং $q=1$;

$$\therefore\ \text{(4) হইতে,}\ y=\frac{7+8p+9q}{2p-3q-1}=\frac{-32}{-16}=2.$$

(iii) (4) এ x এবং y এর সহগ দুইটিকে শূন্য ধরিয়া,

$$p+4q+2=0,$$

এবং $$2p-3q-1=0\,;$$

সমাধান করিয়া, $p=-\frac{2}{11}$ এবং $q=-\frac{5}{11}$;

$$\therefore\ \text{(4) হইতে,}\quad z=\frac{7+8p+9q}{3+p+3q}=\frac{16}{16}=1\,;$$

সুতরাং $x=3$, $y=2$ এবং $z=1$.

দ্রষ্টব্য। উক্ত প্রক্রিয়া-দ্বারা যে-কোন দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করিবার পর নির্ণীত মান দুইটি সমীকরণ (1), (2) এবং (3) এর যে-কোন একটিতে লিখিয়া অধিকতর সহজে তৃতীয় অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 97

সমাধান কর :

1. $x-3y+4z=1,\quad 5x+y-2z=3,\quad -3x+4y+6z=31.$

2. $x+y-z=1,\quad 8x+3y-6z=1,\quad 3z-4x-y=1.$

3. $x+5y-4z=\frac{1}{12},\quad 3x-4y+5z=\frac{12}{24},\quad -4x+5y+6z=\frac{1}{2}.$

4. $x+y+z=24,\quad 2x+3y-4z=2,\quad 3x-y+z=22.$

5. $2x-7y+5z=9,\quad 6x+2y-z=2,\quad 4x-y+6z=19.$

6. $x+ay+a^2z=a^3,\quad x+by+b^2z=b^3,\quad x+cy+c^2z=c^3.$

7. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=2\cdot9,\quad \frac{5}{x}-\frac{6}{y}-\frac{7}{z}=-10\cdot4,\quad \frac{9}{y}+\frac{10}{z}-\frac{8}{x}=14\cdot9.$

8. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=14,\quad \frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=11,\quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=11.$

9. $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=28,\quad \frac{7}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5}{z}=3,\quad \frac{9}{x}+\frac{10}{y}-\frac{11}{z}=4.$

263. বজ্রগুণন-প্রণালী (Rule of Cross-Multiplication)

অনেক ক্ষেত্রে, নিম্নের উপপাদ্য-সাহায্যে তিনটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ-সমাধানের বিশেষ সুবিধা হয়।

উপপাদ্য 1. যদি

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \qquad \cdots \quad (2)$$

হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$

প্রথমে নিম্নলিখিত উপায়ে সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে z অপনয়ন কর :

(1) কে c_2 এবং (2) কে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ ফল দুইটির একটি হইতে অপরটি বিয়োগ কর ; তাহা হইলে

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0\ ,$$

পক্ষান্তর করিয়া, $(a_1c_2-a_2c_1)x=(b_2c_1-b_1c_2)y$,

$$\therefore\quad \frac{x}{b_2c_1-b_1c_2}=\frac{y}{a_1c_2-a_2c_1}\ .$$

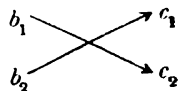
এইরূপে (1) এবং (2) হইতে y অপনয়ন করিয়া,

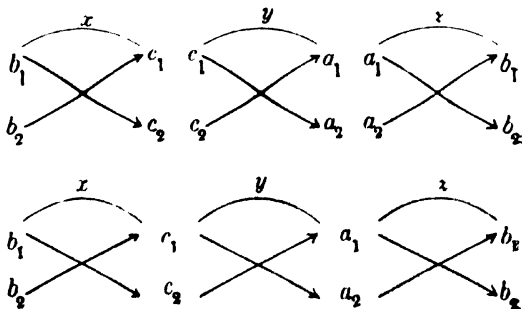
$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1};$$

অতএব,
$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{a_2c_1-a_1c_2}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে x, y এবং z এর মধ্যে পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার এই প্রণালীকেও **বজ্রগুণন-প্রণালী** বলে। অনু. 258 এ বর্ণিত প্রক্রিয়া উক্ত উপপাদ্যের একটি বিশেষ রূপ; উপপাদ্যটিতে $z=1$ লিখিলে অনু. 258, উদা. 1 এর ফলটি পাওয়া যায়।

নিম্নে বর্ণিত নির্ঘণ্টানুসারে উক্ত ভগ্নাংশ-সমূহের হর একবারেই নির্ধারণ করা যায়:

x-সমন্বিত ভগ্নাংশটির হর নির্ধারণ করিতে হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে y এবং z এর সহগগুলিকে, পার্শ্বস্থিত চিত্রানুসারে লেখ, এবং তীর চিহ্ন-দ্বারা প্রদর্শিত প্রণালী মতে উহাদিগকে বজ্রগুণন করিয়া b_1c_2, b_2c_1 এই গুণফল দুইটির অন্তর নির্ণয় কর। নিম্ন দিকে অঙ্কিত তীর চিহ্ন-দ্বারা সূচিত ফল হইতে উচ্চ দিকে অঙ্কিত তীর চিহ্ন-দ্বারা সূচিত ফলের অন্তরই নির্ণেয় হর।

এইরূপে y এবং z -সমন্বিত ভগ্নাংশগুলির হরও নির্ধারণ করা যায়।

সম্পূর্ণ নিয়মটি নিম্নে প্রদর্শিত হইল:

264. সহ-সমীকরণের বিশেষ আকার

নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সমাধান-কালে, উপরি উক্ত উপপাদ্যটির ব্যবহার বিশেষ কার্যকরী :

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad \cdots \quad (2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d \quad \cdots \quad (3)$$

উক্ত উপপাদ্য-অনুসারে, সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}=k, \text{ মনে কর .}$$

$$\therefore \quad x=k(b_1c_2-b_2c_1) \quad \cdots \quad (4)$$
$$y=k(c_1a_2-c_2a_1) \quad \cdots \quad (5)$$
$$z=k(a_1b_2-a_2b_1) \quad \cdots \quad (6)$$

সমীকরণ (3) এ x, y এবং z এর এই মানগুলি লিখিয়া,

$$a_3k(b_1c_2-b_2c_1)+b_3k(c_1a_2-c_2a_1)+c_3k(a_1b_2-a_2b_1)=d,$$

বা, $k\{a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\}=d$;

$\therefore\ a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\equiv D$

লিখিয়া, $$k=\frac{d}{D} \quad \cdots \quad (7)$$

সুতরাং (4), (5) এবং (6) হইতে,

$$x=\frac{d}{D}(b_1c_2-b_2c_1),\ y=\frac{d}{D}(c_1a_2-c_2a_1),\ z=\frac{d}{D}(a_1b_2-a_2b_1)\ ;$$

এ স্থলে $D\equiv a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)$.

উদা. 1. সমাধান কর, $$x-2y+z=0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$9x-8y+3z=0 \quad \cdots \quad (2)$$
$$2x+3y+5z=36 \quad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে, বজ্রগুণন-প্রণালী-দ্বারা,

$$\frac{x}{(-2)\times 3-1\times(-8)}=\frac{y}{1\times 9-1\times 3}=\frac{z}{1\times(-8)-(-2)\times 9},$$

বা, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{10}=k$ (মনে কর);

$\therefore\quad x=2k,\ y=6k$ এবং $z=10k$;

x, y এবং z এর এই মানগুলি সমীকরণ (3) এ লিখিয়া,

$4k+18k+50k=36$, বা $72k=36$; $\quad\therefore\quad k=\frac{1}{2}$;

$\therefore\quad x=2k=1,\ y=6k=3,\ z=10k=5.$

উদা. 2. সমাধান কর : $x+y+z=0 \quad\cdots\quad (1)$

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0 \quad\cdots\quad (2)$

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{abc} \quad\cdots\quad (3)$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{x}{(a+b)-(c+a)}=\frac{y}{(b+c)-(a+b)}=\frac{z}{(c+a)-(b+c)},$$

বা, $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ (মনে কর);

$\therefore\quad x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b)$;

x, y এবং z এর এই মানগুলি (3) এ লিখিয়া,

$$\frac{k(b-c)}{a}+\frac{k(c-a)}{b}+\frac{k(a-b)}{c}=\frac{1}{abc}.$$

অতএব,

$$k=\frac{1}{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}=-\frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)};$$

$$\therefore\quad x=-\frac{(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)};$$

এইরূপে, $y=\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$ এবং $z=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

265. বজ্রগুণন-প্রণালীর প্রয়োগ

এই প্রক্রিয়া-দ্বারা তিনটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট যে-কোন প্রকারের একঘাত সহ-সমীকরণ সমাধান করা যায়।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি বিবেচনা কর :—

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \quad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \quad \cdots \quad (2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \quad \cdots \quad (3)$$

প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি হইতে এরূপ দুইটি সমীকরণ গঠন করিতে হইবে যাহাতে কোন ধ্রুবক পদ (constant term) না থাকে।

স্পষ্টই দেখা যায় যে, (1) কে d_2 ও (2) কে d_1 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ ফল দুইটির একটি হইতে অপরটি বিয়োগ করিলে, এবং (2) কে d_3 এবং (3) কে d_2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ ফল দুইটির একটি হইতে অপরটি বিয়োগ করিলে নিম্নের ধ্রুবক-বর্জিত সমীকরণ দুইটি পাওয়া যায় :

$$(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y+(c_1d_2-c_2d_1)z=0 \quad \cdots \quad (4)$$

এবং $(a_2d_3-a_3d_2)x+(b_2d_3-b_3d_2)y+(c_2d_3-c_3d_2)z=0 \quad \cdots \quad (5)$

সমীকরণ (4) ও (5) এবং প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির যে-কোন একটি হইতে, অনু. 264 এ বর্ণিত প্রক্রিয়া-অনুসারে x, y এবং z এর মান নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. সমাধান কর :

$$x+y+z=12 \quad \cdots \quad (1)$$
$$3x-y+z=10 \quad \cdots \quad (2)$$
$$5x-2y-z=2 \quad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (2) কে 12 দ্বারা এবং (1) কে 10 দ্বারা, যথাক্রমে গুণ করিয়া,

$$36x-12y+12z=120$$

এবং, $$10x+10y+10z=120$$

বিয়োগ করিয়া, $$26x-22y+2z=0 \quad \cdots \quad (4)$$

(3) কে 10 এবং (2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$50x-20y-10z=20$$
$$6x-2y+2z=20$$

বিয়োগ করিয়া, $$44x-18y-12z=0 \quad \cdots \quad (5)$$

(4) এবং (5) হইতে,

$$\frac{x}{(-22)\times(-12)-2\times(-18)}=\frac{y}{44\times2-26\times(-12)}$$
$$=\frac{z}{26\times(-18)-(-22)\times44},$$

বা, $$\frac{x}{300}=\frac{y}{400}=\frac{z}{500},$$

বা, $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=k \text{ (মনে কর)};$$

$$\therefore\quad x=3k,\quad y=4k,\quad z=5k\,;$$

(1) এ x, y এবং z এর পরিবর্তে উহাদের এই মানগুলি লিখিয়া,

$$3k+4k+5k=12, \text{ অথবা } k=1\,;$$

$$\therefore\quad x=3k=3,\quad y=4k=4,\quad z=5k=5.$$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$x+y+z=a+b+c \qquad \cdots \quad (1)$$

$$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \qquad \cdots \quad (2)$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=a^3+b^3+c^3 \qquad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) কে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় :—

$$(x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \qquad \cdots \quad (2)$$

ইহা হইতে বজ্রগুণন-দ্বারা,

$$\frac{x-a}{b-c}=\frac{y-b}{c-a}=\frac{z-c}{a-b}=k \text{ (মনে কর)};$$

$$\therefore\quad x-a=k(b-c),\quad y-b=k(c-a),\quad z-c=k(a-b)\,;$$

তৃতীয় সমীকরণটিকে

$$a^2(x-a)+b^2(y-b)+c^2(z-c)=0$$

এইরূপ আকারে লিখিয়া, এবং ইহাতে $x-a$, $y-b$ ও $z-c$ এর পরিবর্তে উপরি লব্ধ মানগুলি বসাইয়া,

$$k\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=0\,;$$

অতএব $k=0$;

$$\therefore\quad x=a,\quad y=b,\quad z=c.$$

প্রশ্নমালা 98

সমাধান কর :

1. $4x-5y+2z=0,$
$2x-9y+3z=0,$
$13x+y+z=5.$

2. $3x-8y+7z=0,$
$7x-8y-5z=0,$
$3x+4y+7z=48.$

3. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$\frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}=1.$

4. $2x+y-2z=0,$
$7x+6y-9z=0,$
$13x+14y-15z=40.$

5. $x+y+z=d,$
$ax+by+cz=0,$
$a^2x+b^2y+c^2z=0.$

6. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$a^2x+b^2y+c^2z$
$+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

7. $x-2y+z=0,$
$5z-3x-4y=0,$
$7x+8y+9z=98.$

8. $x+y+z=2,$
$4x-6y+5z=31,$
$5x-11y-13z=22.$

9. $x+y+z=1,$
$ax+by+cz=d,$
$a^2x+b^2y+c^2z=d^2.$

10. $x+y+z=a+b+c,$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3,$
$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2.$

11. $x+y+z=0,$
$bcx+cay+abz=0,$
$ax+by+cz+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

12. $x+y+z=a+b+c,$
$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2,$
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

13. $x+y+z=0,$
$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$
$bcx+cay+abz=1.$

14. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,$

$\dfrac{lx}{a}+\dfrac{my}{b}+\dfrac{nz}{c}=0,$

$\dfrac{x}{m-n}+\dfrac{y}{n-l}+\dfrac{z}{l-m}$
$=a+b+c.$

15. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0,$

$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}=0,$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=(b-c)(c-a)(a-b).$

16. $x+y+z=0,$

$ax+by+cz=0,$

$a^3x+b^3y+c^3z=abc.$

17. $x+y+z=a^2+b^2+c^2,$

$\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}=3,$

$a(x-a^2)+b(y-b^2)+c(z-c^2)=0.$

18. $x+y+z=a+b+c,$

$bx+cy+az=cx+ay+bz$
$=a^2+b^2+c^2.$

19. $x+y+z=0,$

$\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{b-c}+\dfrac{z}{c-a}=3,$

$(a^2+ab+b^2)x+(b^2+bc+c^2)y$
$+(c^2+ca+a^2)z=0.$

20. $x+y+z=0,$

$\dfrac{x}{b+c}+\dfrac{y}{c+a}+\dfrac{z}{a+b}=0,$

$\dfrac{x}{b-c}+\dfrac{y}{c-a}+\dfrac{z}{a-b}=2(a+b+c).$

21. $x+y+z=ab+bc+ca,$

$ax+by+cz=a^2b+b^2c+c^2a,$

$bx+cy+az=ab^2+bc^2+ca^2.$

22. $x+y+z=ax+by+cz=0,$

$\dfrac{x}{b-c}+\dfrac{y}{c-a}+\dfrac{z}{a-b}=1.$

23. $x+y+z=a+b+c,$

$ax+by+cz=bc+ca+ab,$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

24. $x+y+z=a+b+c,$

$bx+cy+az=cx+ay+bz$
$=ab+bc+ca.$

25. $x+y+z=a+b+c,$

$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2,$

$a^2(y-z)+b^2(z-x)+c^2(x-y)$
$=(c-b)(c-a)(a-b).$

26. $x+ay+bcz=a^2,$
$x+by+caz=b^2,$
$x+cy+abz=c^2.$

27. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$a^2x+b^2y+c^2z=1.$

28. কোন্ সর্ত সিদ্ধ হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণ তিনটি যুগপৎ সিদ্ধ হইবে ?

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z=0 \text{ এবং }$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0.$$

266. বিবিধ কৌশল

অনেক সময়ে, কোন সাধারণ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা সম্ভব হয় না। এই সকল স্থলে, সমীকরণ-সমূহের আকার-অনুযায়ী বিশেষ বিশেষ কৌশল উদ্ভাবন করিতে হয়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $y+z=a,$
$z+x=b,$
$x+y=c.$

সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া, $2(x+y+z)=a+b+c,$

বা, $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$

এই সমীকরণ হইতে সমীকরণ তিনটির প্রত্যেকটি যথাক্রমে বিয়োগ করিয়া,

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-a=\tfrac{1}{2}(b+c-a),$$
$$y=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-b=\tfrac{1}{2}(c+a-b),$$
$$z=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{xy}{x+y}=1 \quad \cdots \quad (1)$

$\dfrac{yz}{y+z}=\tfrac{1}{3} \quad \cdots \quad (2)$

$\dfrac{zx}{z+x}=\tfrac{1}{5} \quad \cdots \quad (3)$

(1) হইতে, $\dfrac{x+y}{xy}=1$, বা $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \quad \cdots \quad (4)$

(2) হইতে, $\frac{y+z}{yz}=3$, বা $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$ ... (5)

(3) " $\frac{z+x}{zx}=5$, বা $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5$ ... (6)

এক্ষণে সমীকরণ (4), (5) এবং (6), উদা. 1 এর প্রক্রিয়ানুসারে সমাধান করিয়া, $x=\frac{2}{3}$, $y=-2$, $z=\frac{2}{7}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $bz+cy=a$ ... (1)

$cx+az=b$ ... (2)

$ay+bx=c$ ... (3)

(1) কে a দ্বারা, (2) কে b দ্বারা এবং (3) কে c দ্বারা গুণ করিয়া, এবং লব্ধ গুণফলগুলিকে যোগ করিয়া,

$$abz+acy=a^2 \quad \cdots (4)$$
$$bcx+abz=b^2 \quad \cdots (5)$$
$$\frac{acy+bcx=c^2}{2(bcx+cay+abz)=a^2+b^2+c^2} \quad \cdots (6)$$

$$\therefore\ bcx+cay+abz=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \quad \cdots (7)$$

এক্ষণে, (7) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া,

$$bcx=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-a^2=\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2);$$

$$\therefore\ x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

এইরূপে, $y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ এবং $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{x+a}{b+c}=\dfrac{y+b}{c+a}=\dfrac{z+c}{a+b}$,

$$x+y+z=a+b+c.$$

মনে কর, সমান ভগ্নাংশ তিনটির প্রত্যেকটি k র সমান।

$$\therefore\ x+a=k(b+c),\ \text{বা}\ x=-a+k(b+c),$$
$$y+b=k(c+a),\ \text{বা}\ y=-b+k(c+a),$$
$$z+c=k(a+b),\ \text{বা}\ z=-c+k(a+b);$$

প্রদত্ত সমীকরণ সমূহের শেষেরটিতে x, y এবং z এর পরিবর্তে উহাদের এই মানগুলি লিখিয়া,

$$k\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}=2(a+b+c), \quad \text{অতএব} \quad k=1;$$

$$\therefore \quad x=-a+(b+c)=b+c-a, \quad y=-b+(c+a)=c+a-b,$$
$$z=-c+(a+b)=a+b-c.$$

প্রশ্নমালা 99

সমাধান কর :

1. $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=1.$

2. $xy=yz=zx=xyz.$

3. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1.$

4. $bx+ay=cy+bz=cz+ax=2.$

5. $\frac{x+y}{xy}=\frac{y+z}{yz}=\frac{z+x}{zx}=\frac{2}{3}.$

6. $\frac{ayz}{y+z}=\frac{bzx}{z+x}=\frac{cxy}{x+y}=1.$

7. $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=c(xy-yz-zx).$

8. $2xy=3(x+y),$
 $3yz=4(y+z),$
 $4zx=5(z+x).$

9. $ax+by+cz=bx+cy+az$
 $=cx+ay+bz$
 $=a^3+b^3+c^3-3abc.$

10. $ax+by+cz=a+b,$
 $bx+cy+az=b+c,$
 $cx+ay+bz=c+a.$

11. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$
 $ax+by+cz=a^2+b^2+c^2.$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3, \quad y+z=5yz, \quad z+x=4zx.$

13. $ax+by-cz=ax-by+cz=-ax+by+cz=2abc.$

14. $x+y-3z=-a,$
 $z+x-3y=-b,$
 $y+z-3x=-c.$

15. $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1.$

16. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

17. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=6$.

18. $x+y+z=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ax}{b}+\frac{by}{c}+\frac{cz}{a}=\frac{ax}{c}+\frac{by}{a}+\frac{cz}{b}$.

ত্রয়োবিংশ অধ্যায়

একঘাত সহ-সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী

267. একাধিক সর্ত-বিশিষ্ট প্রশ্নসমূহের সমাধান-কালে অজ্ঞাত রাশি-সমূহের পরিবর্তে x, y, z প্রভৃতি অক্ষর লিখিয়া সর্তগুলিকে বীজগণিতীয় ভাষায় প্রকাশ করিলে, প্রত্যেক সর্ত হইতে একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এইরূপে প্রাপ্ত বিভিন্ন সমীকরণগুলির সংখ্যা অজ্ঞাত রাশির সংখ্যার সমান হইলেই সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া অজ্ঞাত রাশিগুলির মান নির্ণয় করা সম্ভবপর হয়।

268. সংখ্যা-সম্বন্ধীয় প্রশ্ন

উদা. 1. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লবের সহিত 7 যোগ করিলে নূতন ভগ্নাংশটি 1 হয়, এবং হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে নূতন ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়।

এস্থলে লব এবং হর উভয়েই অজ্ঞাত; ইহাদিগকে যথাক্রমে x এবং y দ্বারা সূচিত করিলে, নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{y}$.

প্রথম সর্ত অনুসারে, $$\frac{x+7}{y}=1 \qquad \cdots (1)$$

দ্বিতীয় সর্ত অনুসারে, $$\frac{x}{y-2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots (2)$$

(1) হইতে, $x+7=y$, অর্থাৎ $y=x+7$ $\cdots (3)$

এবং (2) হইতে $2x=y-2$, অর্থাৎ $y=2x+2$ $\cdots (4)$

সমীকরণ (3) এবং (4) সমাধান করিয়া, $x=5$ এবং $y=12$;

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{12}$.

উদা. 2. তিনটি সংখ্যার প্রথম ও দ্বিতীয়টির সমষ্টিকে উহাদের গুণফল-দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{1}{2}$ হয়; দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির সমষ্টিকে উহাদের গুণফল-দ্বারা ভাগ

করিলে $\frac{1}{3}$ হয়, এবং প্রথম ও তৃতীয়টির সমষ্টিকে উহাদের গুণফল-দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{1}{4}$ হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি x, y এবং z; তাহা হইলে, প্রশ্নের সর্ত অনুসারে,

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2},\quad \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{3} \text{ এবং } \frac{z+x}{zx}=\frac{1}{4} \qquad \cdots (A)$$

এই সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া,

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1\frac{1}{12};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{24} \qquad \cdots (B)$$

(B) হইতে (A) র তিনটি সমীকরণ যথাক্রমে বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{z}=\frac{13}{24}-\frac{1}{2}=\frac{1}{24}, \qquad \therefore \quad z=24,$$

$$\frac{1}{x}=\frac{13}{24}-\frac{1}{3}=\frac{5}{24}; \qquad \therefore \quad x=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5};$$

$$\frac{1}{y}=\frac{13}{24}-\frac{1}{4}=\frac{7}{24}; \qquad \therefore \quad y=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}.$$

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $4\frac{4}{5}$, $3\frac{3}{7}$ এবং 24.

269. কার্য-বিষয়ক প্রশ্ন

উদা. একটি কার্য A ও B একত্র 3 দিনে, B ও C 4 দিনে এবং A ও C 5 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উহারা পৃথক্ ভাবে কে কত দিনে ঐ কার্যটি সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

মনে কর, সমস্ত w কার্যটি সম্পন্ন করিতে A র x দিন, B এর y দিন এবং C এর z দিন লাগে।

তাহা হইলে, 1 দিনে A কার্যটির $\frac{1}{x}$ অংশ, অর্থাৎ $\frac{w}{x}$ সম্পন্ন করে,

1 „ B „ $\frac{1}{y}$ „ „ $\frac{w}{y}$ „ „

1 „ C „ $\frac{1}{z}$ „ „ $\frac{w}{z}$ „ „

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে,

$$\left(\frac{w}{x}+\frac{w}{y}\right)\times 3 = w, \text{ অর্থাৎ } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3};$$

$$\left(\frac{w}{y}+\frac{w}{z}\right)\times 4 = w, \text{ অর্থাৎ } \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{w}{z}+\frac{w}{x}\right)\times 5 = w, \text{ অর্থাৎ } \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5};$$

অনু. 266 অনুসারে সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া, $x=7\frac{1}{17}$, $y=5\frac{5}{23}$ এবং $z=17\frac{1}{7}$.

সুতরাং A, $7\frac{1}{17}$ দিনে, B, $5\frac{5}{23}$ দিনে এবং C, $17\frac{1}{7}$ দিনে কার্যটি সম্পন্ন করিতে পারিবে।

270. আপেক্ষিক গতি-বিষয়ক (Relative Motion) প্রশ্ন

উদা. 1. একখানি বাষ্পীয় পোতের স্রোতের প্রতিকূলে 9 মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে 22 মাইল যাইতে মোট 5 ঘণ্টা সময় লাগে। স্রোতের প্রতিকূলে 3 মাইল যাইতে ইহার যে সময় লাগে সেই সময়ে ইহা স্রোতের অনুকূলে 11 মাইল যাইতে পারে। স্রোতের বেগ, এবং স্থির জলে পোতখানির বেগ নির্ণয় কর।

দ্রষ্টব্য। এইরূপ উদাহরণে স্রোতের অনুকূলে গতির বেগ, পোতের বেগ এবং স্রোতের বেগের সমষ্টি, এবং প্রতিকূলে গতির বেগ উহাদের অন্তর, এইরূপ বুঝিতে হইবে। (অনু. 197, উদা. 3 দ্রষ্টব্য।)

মনে কর, স্থির জলে পোতখানির বেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল।

$\therefore$ পোতখানি স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-y$ মাইল এবং অনুকূলে ঘণ্টায় $x+y$ মাইল চলিতে পারে।

$$\therefore \quad \frac{9}{x-y}+\frac{22}{x+y}=5 \qquad \cdots (1)$$

$$\text{এবং, } \quad \frac{11}{x+y}=\frac{3}{x-y} \qquad \cdots (2)$$

(1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{9}{x-y}+\frac{6}{x-y}=5, \text{ বা } \frac{15}{x-y}=5 \,;\ \therefore\quad x-y=3\,;$$

$$\therefore\quad (2) \text{ হইতে, } x+y=11\,;$$

শেষের সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $x=7$ এবং $y=4$.

অতএব, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 4 মাইল, এবং স্থির জলে পোতখানির বেগ ঘণ্টায় 7 মাইল।

271. অঙ্ক-বিষয়ক (Digits) প্রশ্ন

উদা. 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 8; ঐ সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি মূল সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

এ স্থলে সংখ্যাটি 2 অঙ্ক-বিশিষ্ট। মনে কর, দশকের অঙ্কটি x এবং এককের অঙ্কটি y, তাহা হইলে সংখ্যাটি $10x+y$;

$$\text{আবার, } x+y=8 \qquad \cdots \quad (1)$$

অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে, $10y+x$ সংখ্যাটি পাওয়া যায় ;

$$\therefore\quad 10y+x+18=10x+y, \text{ বা } 9x-9y=18,$$

$$\text{বা}\quad x-y=2 \qquad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) সমাধান করিয়া, $x=5$ এবং $y=3$;

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা 53.

272. ক্ষেত্রফল-বিষয়ক (Area) প্রশ্ন

উদা. কোন আয়তক্ষেত্রাকার অঙ্গনের পরিসীমা 60 ফুট। যদি ইহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট বাড়াইয়া বিস্তার 3 ফুট কমান হয়, তবে ইহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গফুট কমিয়া যায়। অঙ্গনের দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

মনে কর, ইহার দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার যথাক্রমে x এবং y ফুট।

তাহা হইলে, পরিসীমা $=(2x+2y)$ ফুট, এবং ক্ষেত্রফল $=xy$ বর্গফুট। দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার উল্লিখিতরূপ পরিবর্তিত হইলে,

নূতন ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=(x+3)\,(y-3)$ বর্গফুট।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $2(x+y)=60$ ... (1)

এবং, $(x+3)(y-3)=xy-21$ ... (2)

সমীকরণ (1) এবং (2) সমাধান করিয়া, $x=17$ এবং $y=13$.

∴ অঙ্গনটির দৈর্ঘ্য 17 ফুট এবং বিস্তার 13 ফুট।

273. বিবিধ প্রশ্নাবলী

উদা. 1. কোন থিয়েটারের প্রবেশ-মূল্য 5 টাকা, 3 টাকা এবং 1 টাকা। 3 টাকার টিকিট বিক্রয় হইতে লব্ধ মুদ্রার পরিমাণ অপর দুই শ্রেণীর টিকিট বিক্রয়ের মুদ্রার পরিমাণ অপেক্ষা 10 টাকা অধিক, দর্শক-সংখ্যা 530 এবং সংগৃহীত মুদ্রার পরিমাণ 1010 টাকা হইলে, প্রত্যেক শ্রেণীর বিক্রীত টিকিটের সংখ্যা কত?

মনে কর, 5 টাকা, 3 টাকা এবং 1 টাকার বিক্রীত টিকিটের সংখ্যা যথাক্রমে x, y এবং z, তাহা হইলে, $x+y+z=530$ ... (1)

প্রত্যেকখানির মূল্য 5 টাকা করিয়া x-সংখ্যক টিকিটের মূল্য $=5x$ টাকা,

" " 3 টাকা " y " " $=3y$ টাকা,

" " 1 টাকা " z " " $=z$ টাকা,

$$\therefore \quad 5x+z+10=3y \qquad \cdots (2)$$

এবং $5x+3y+z=1010$ ... (3)

সমীকরণ (1), (2) এবং (3) সমাধান করিয়া,

$x=35$, $y=170$ এবং $z=325$.

সুতরাং 35 খানি 5 টাকার, 170 খানি 3 টাকার এবং 325 খানি 1 টাকার টিকিট বিক্রয় করা হইয়াছিল।

উদা. 2. এক মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে, B 44 গজ অগ্রসর হইলে পর A দৌড়াইতে আরম্ভ করিল, এবং B কে 51 সেকেণ্ডে পরাজিত করিল, দ্বিতীয় বারে, A র 1 মি. 15. সে. পূর্বে B দৌড়াইতে আরম্ভ করিল কিন্তু 88 গজে A পরাজিত হইল। A ও B এর মধ্যে কে কত সময়ে 1 মাইল দৌড়াইতে পারে?

মনে কর, 1 মাইল দৌড়াইতে A র x ঘণ্টা এবং B এর y ঘণ্টা সময় লাগে।

তাহা হইলে, 1 ঘণ্টায় A, $\frac{1}{x}$ মাইল, অর্থাৎ $\frac{1760}{x}$ গজ এবং B, $\frac{1760}{y}$ গজ দৌড়াইবে।

প্রথম বারে, B, 44 গজ দৌড়াইবার পর A দৌড়াইতে আরম্ভ করিল এবং B এর 51 সে. পূর্বে গন্তব্য স্থানে পৌছিল।

কিন্তু B এর ঐ 44 গজ যাইতে $\frac{44y}{1760}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ $\frac{y}{40}$ ঘণ্টা লাগিল এবং পরে x ঘণ্টা দৌড়াইবার পরও গন্তব্য স্থানে পৌছিতে তাহার 51 সে., অর্থাৎ $\frac{51}{60\times60}$ ঘণ্টা লাগিল। এক্ষণে ঐ 1 মাইল দৌড়াইতে B এর মোট y ঘণ্টা লাগে ;

$$\therefore \quad y=\frac{y}{40}+x+\frac{51}{60\times60}, \text{ বা } \frac{39}{40}y=x+\frac{51}{3600} \qquad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় বারে, B, A অপেক্ষা 1 মি. 15 সে., অর্থাৎ $\frac{1}{48}$ ঘণ্টা পূর্বে দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া যখন গন্তব্য স্থানে পৌছিল তখন A র 88 গজ দৌড়াইতে বাকি ; এই 88 গজ দৌড়াইতে A র $\frac{88x}{1760}$, বা $\frac{x}{20}$ ঘণ্টা লাগিবে।

সুতরাং, B যখন y ঘণ্টা দৌড়াইল A তখন মাত্র $(y-\frac{1}{48})$ ঘণ্টা দৌড়াইয়াছে, এবং A র ঐ 1 মাইল দৌড় শেষ করিতে আরও $\frac{x}{20}$ ঘণ্টা লাগিবে।

$$\therefore \quad x=\left(y-\frac{1}{48}\right)+\frac{x}{20}, \text{ বা } \frac{19}{20}x=y-\frac{1}{48} \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $\qquad 3600x=3510y-51 \qquad \cdots \quad (3)$

এবং (2) হইতে, $\qquad 228x=240y-5 \qquad \cdots \quad (4)$

সমীকরণ (3) এবং (4) সমাধান করিয়া, $x=\frac{1}{12}$ এবং $y=\frac{1}{10}$.

$\therefore$ 1 মাইল দৌড়াইতে A র $\frac{1}{12}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ 5 মি. এবং B এর $\frac{1}{10}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ 6 মি. লাগে।

উদা. 3. অঙ্কের ক্লাশে একটি ছাত্রকে কোন সংখ্যার সহিত 3 যোগ করিয়া যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিতে বলা হইল। প্রশ্নটি ভুল বুঝিয়া, সে সংখ্যাটি হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 3 দ্বারা গুণ করিল ; কিন্তু এরূপ করিয়াও তাহার উত্তরটি নির্ভুল হইল ; সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা x এবং অঙ্কের উত্তর y.

তাহা হইলে, $\frac{x+3}{2}=y$, অর্থাৎ $x+3=2y$ ··· (1)

এবং, $(x-2)\times 3=y$, অর্থাৎ $3x-6=y$ ··· (2)

(1) এবং (2) হইতে, $x=3$; ইহাই নির্ণেয় সংখ্যা।

উদা. 4. স্বামী ও স্ত্রীর বর্তমান বয়সের সমষ্টি তাহাদের পুত্র-কন্যাগণের বর্তমান বয়সের সমষ্টির 6 গুণ ; 2 বৎসর পূর্বে ইহা 10 গুণ ছিল এবং 6 বৎসর পরে 3 গুণ হইবে। পুত্র-কন্যাগণের সংখ্যা কত ?

মনে কর, পুত্র-কন্যার সংখ্যা x, স্বামী ও স্ত্রীর বর্তমান বয়সের সমষ্টি y এবং পুত্র-কন্যাগণের বর্তমান বয়সের সমষ্টি z.

তাহা হইলে, $y=6z$ ··· (1)

দুই বৎসর পূর্বে, স্বামী ও স্ত্রীর বয়সের সমষ্টি $y-4$ এবং পুত্র-কন্যাগণের বয়সের সমষ্টি $z-2x$ ছিল,

$\therefore \quad y-4=10(z-2x)$ ··· (2)

ছয় বৎসর পরে, স্বামী ও স্ত্রীর বয়সের সমষ্টি $y+12$ এবং পুত্র-কন্যাগণের বয়সের সমষ্টি $z+6x$ হইবে ;

$\therefore \quad y+12=3(z+6x)$ ··· (3)

সমীকরণ (1), (2) এবং (3) হইতে y এবং z অপনয়ন করিয়া, $x=3$;

$\therefore$ পুত্র-কন্যাগণের সংখ্যা $=3$.

উদা. 5. এক পরিবারে, প্রত্যেক মাসে একই পরিমাণ চাল খরচ হয় এবং, অন্যান্য কারণে প্রত্যেক মাসে একই পরিমাণ টাকা ব্যয় হয়। চালের মূল্য যখন টাকায় 10 সের তখন ঐ পরিবারের মোট মাসিক ব্যয় 72 টাকা, এবং চালের মূল্য যখন টাকায় 8 সের তখন ব্যয় 75 টাকা। চাল ভিন্ন অন্যান্য কারণে প্রত্যেক মাসে কত টাকা ব্যয় হয়, নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রত্যেক মাসে অন্যান্য কারণে x টাকা ব্যয় হয় এবং y সের চাল খরচ হয়। y সের চালের মূল্য টাকায় 10 সের হিসাবে $\frac{1}{10}y$ টাকা এবং টাকায় 8 সের হিসাবে $\frac{1}{8}y$ টাকা।

সুতরাং, $x+\frac{1}{10}y=72$ এবং $x+\frac{1}{8}y=75$.

উক্ত সমীকরণদ্বয় হইতে, $x=60$ এবং $y=120$.

$\therefore$ প্রত্যেক মাসে পরিবারের অন্যান্য কারণে ব্যয় $=60$ টাকা।

উদা. 6. রাম যদুকে বলিল, "যদি আমার টাকার এক-তৃতীয়াংশ দান করি, এবং তুমি তোমার টাকার এক-চতুর্থাংশ আমাকে দাও তাহা হইলে আমার 130 টাকা হইবে।" যদু বলিল, "যদি আমার টাকার এক-তৃতীয়াংশ দান করি এবং তুমি তোমার টাকার এক-তৃতীয়াংশ আমাকে দাও তাহা হইলে আমারও 130 টাকা হইবে।" কাহার কত টাকা আছে ?

মনে কর, রামের নিকট x টাকা এবং যদুর নিকট y টাকা আছে। রামের টাকার এক-তৃতীয়াংশ দান করিলে তাহার $\left(x-\frac{x}{3}\right)$ টাকা, অর্থাৎ $\frac{2}{3}x$ টাকা অবশিষ্ট থাকিবে।

$$\therefore \quad \tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{4}y=130 \qquad \cdots (1)$$

$$\text{এইরূপে,} \quad \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}x=130 \qquad \cdots (2)$$

সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $x=150$ এবং $y=120$.

$\therefore$ রামের 150 টাকা এবং যদুর 120 টাকা আছে।

উদা. 7. একটি চৌবাচ্চায় 3 টি নল দিয়া জল প্রবেশ করে; নল তিনটির দুইটি পরস্পর সমান। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে 4 ঘণ্টায় ঐ চৌবাচ্চার $\frac{5}{12}$ অংশ পূর্ণ হয়, এবং সমান নল দুইটির একটি বন্ধ রাখিলে অন্য দুইটি নল দিয়া 10 ঘ. 40 মি. এ উহার $\frac{7}{8}$ অংশ পূর্ণ হয়। নল তিনটির প্রত্যেকটির দ্বারা চৌবাচ্চাটি কত সময়ে পূর্ণ হইবে ?

মনে কর, সমান নল দুইটির প্রত্যেকটির দ্বারা x ঘণ্টায়, এবং অন্য নলটির দ্বারা y ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। তাহা হইলে উহারা একঘণ্টায় যথাক্রমে ঐ চৌবাচ্চার $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$ এবং $\frac{1}{y}$ অংশ পূর্ণ করে।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).4=\frac{5}{12}$ ··· (1)

এবং, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).10\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$ ··· (2)

(1) এবং (2) হইতে, $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{48}$ ··· (3)

এবং, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{96}$ ··· (4)

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $\frac{1}{x}=\frac{5}{48}-\frac{7}{96}=\frac{1}{32}$ ··· (5)

(4) এ $\frac{1}{x}$ এর পরিবর্তে $\frac{1}{32}$ লিখিয়া,

$$\frac{1}{y}=\frac{7}{96}-\frac{1}{32}=\frac{1}{24} \quad \cdots (6)$$

∴ (5) এবং (6) হইতে, $x=32$ এবং $y=24$.

অতএব সমান নল দুইটির প্রত্যেকটির দ্বারা 32 ঘণ্টায় এবং অন্যটির দ্বারা 24 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

উদা. 8. এক নির্বাচনে দুইজন প্রার্থীর মধ্যে নির্বাচিত ব্যক্তি পরাজিত ব্যক্তি অপেক্ষা 88 ভোট বেশি পাইল, যদি নির্বাচিত ব্যক্তির পক্ষের প্রত্যেক 8 জনের 1 জন করিয়া তাহার বিপক্ষে ভোট দিত, তাহা হইলে সে 18 ভোটে পরাজিত হইত। প্রত্যেক প্রার্থীর ভোটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্বাচিত ব্যক্তির ভোটের সংখ্যা x এবং পরাজিত ব্যক্তির ভোটের সংখ্যা y; ∴ $x-y=88$ ··· (1)

এক্ষণে, তাহার পক্ষের প্রত্যেক 8 জনের 1 জন করিয়া তাহার বিপক্ষে ভোট দিলে তাহার বর্তমান ভোটের সংখ্যার এক-অষ্টমাংশ, অর্থাৎ $\frac{x}{8}$ সংখ্যক ভোট তাহার বিপক্ষে প্রদত্ত হইত।

∴ তাহার পক্ষে $x-\frac{1}{8}x$, অর্থাৎ $\frac{7}{8}x$ সংখ্যক ভোট থাকিত এবং অন্য পক্ষে $y+\frac{1}{8}x$ সংখ্যক ভোট হইত।

$$\therefore \left(y+\frac{x}{8}\right)-\frac{7}{8}x=18 \quad \cdots (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে, $x=424$ এবং $y=336$.

উদা. 9. টিনের ওজন বাতাসের ভিতর অপেক্ষা জলের ভিতর $\frac{1}{7}$ অংশ কম হয়, কিন্তু সিসার ওজন $\frac{1}{12}$ অংশ কম হয়; টিন এবং সিসার একটি মিশ্রণের ওজন বাতাসের ভিতর 270 পাউণ্ড এবং জলের ভিতর 240 পাউণ্ড; ঐ মিশ্রণে প্রত্যেক প্রকার ধাতুর পরিমাণ কত ?

মনে কর, মিশ্রণে x পাউণ্ড টিন এবং y পাউণ্ড সিসা আছে।

তাহা হইলে, $x+y=270$ ... (1)

যে হেতু, জলের ভিতরের টিনের ওজন বাতাসের ভিতরের ওজনের $\frac{1}{7}$ অংশ কম, অতএব, জলের ভিতর x পাউণ্ড টিনের ওজন $=\frac{6x}{7}$ পাউণ্ড।

এইরূপে, জলের ভিতর y পাউণ্ড সিসার ওজন $=\frac{11y}{12}$ পাউণ্ড।

$\therefore \frac{6x}{7}+\frac{11y}{12}=240,$ অর্থাৎ $72x+77y=20160$ ... (2)

(1) এবং (2) সমাধান করিয়া, $x=126, \quad y=144.$

$\therefore$ উক্ত মিশ্রণে 126 পাউণ্ড টিন এবং 144 পাউণ্ড সিসা আছে।

প্রশ্নমালা 100

1. এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের বৃহত্তরটির এক-চতুর্থাংশের সহিত ক্ষুদ্রতরটির এক-তৃতীয়াংশ যোগ করিলে যোগফল 33 হয়, এবং বৃহত্তরটির এক-ষষ্ঠাংশ হইতে ক্ষুদ্রতরটির এক-পঞ্চমাংশ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 3 হয়।

2. একটি ভগ্নাংশের লব এবং হর প্রত্যেকের সহিত এক যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{38}$ বাড়ে, এবং ইহার লব এবং হর প্রত্যেকটি হইতে 4 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{8}{57}$ কমিয়া যায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

3. একটি ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা 4 কম; লব হইতে 10 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশটি পাওয়া যায় হরের সহিত 30 যোগ করিলেও সেই একই ভগ্নাংশ পাওয়া যায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

4. কোন ভগ্নাংশের হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{2}$, এবং লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে $\frac{1}{3}$ হয়; ভগ্নাংশটি কত ?

5. একটি ভগ্নাংশের হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{2}$, এবং লবের সহিত 2 যোগ করিলে $\frac{3}{4}$ হয়, ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

6. 2 জন পুরুষ এবং 6 জন বালক 5 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করে; ঐ কার্য্য 8 জন পুরুষ এবং 3 জন বালক 3 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। 1 জন পুরুষ এবং 1 জন বালক একসঙ্গে কার্যটি কত দিনে সম্পন্ন করিবে?

7. A এবং B একসঙ্গে একটি কার্য 30 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, দুইজনে একসঙ্গে 18 দিন কার্য করিবার পর B চলিয়া গেল এবং অবশিষ্ট অংশ A, 20 দিনে সম্পন্ন করিল; A এবং B এর প্রত্যেকের ঐ কার্যটি সম্পন্ন করিতে কত দিন লাগিবে?

8. একটি দেওয়াল নির্মাণ করিতে A ও B এর p দিন, B ও C এর q দিন এবং C ও A র r দিন লাগে, A, B এবং C একসঙ্গে কার্য করিলে ঐ দেওয়ালটি কত দিনে নির্মিত হইবে?

9. দুইটি বস্তুর ব্যবধান 102 গজ। উহারা সম (uniform), কিন্তু বিভিন্ন গতিতে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইলে 6 সেকেণ্ডে পরস্পর মিলিত হইবে, কিন্তু উভয়ে একই দিকে চলিলে অধিকতর দ্রুতগামী বস্তুটি 17 সেকেণ্ডে অন্যটিকে ধরিয়া ফেলিবে। তাহাদের প্রত্যেকের গতি নির্ণয় কর।

10. ঘুম হইতে দার্জিলিং পর্যন্ত 5 মাইল দীর্ঘ একটি পথের কিছুদূর ক্রমোচ্চভূমি এবং কিছুদূর ক্রম-নিম্নভূমি। সাইকেলের বেগ ক্রমোচ্চভূমিতে ঘণ্টায় 8 মাইল এবং ক্রম-নিম্নভূমিতে ঘণ্টায় 12 মাইল। ঘুম হইতে দার্জিলিং পর্যন্ত সাইকেল চালাইয়া যাইতে 30 মিনিট লাগিলে ফিরিয়া আসিতে কত মিনিট লাগিবে?

11. এক ব্যক্তি শতকরা 10 লাভে একটি জিনিষ এবং শতকরা 20 লাভে একটি জিনিষ বিক্রয় করিয়া মোট 46 টাকা পাইল। দুইটি জিনিষের প্রত্যেকটি শতকরা 15 লাভে বিক্রয় করিলেও সে একই টাকা পাইত। প্রত্যেকটি জিনিষের বিক্রয় মূল্য কত?

12. 1000 গজের একটি দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে B 100 গজ অগ্রসর হইলে পর A দৌড়াইতে আরম্ভ করিল এবং B কে 30 সেকেণ্ডে পরাস্ত

করিল, দ্বিতীয় বারে A, B এর 1 মি. 30 সে. পরে দৌড়াইতে আরম্ভ করিল এবং 125 গজে পরাজিত হইল। ঐ 1000 গজ দৌড়াইতে A এবং B এর মধ্যে কাহার কত সময় লাগে ?

13. নৌকায় দাঁড় বাহিয়া স্রোতের প্রতিকূলে $10\frac{1}{2}$ মাইল গিয়া পুনরায় ফিরিয়া আসিতে একব্যক্তির 5 ঘণ্টা সময় লাগে, স্রোতের অনুকূলে 7 মাইল এবং স্রোতের প্রতিকূলে 3 মাইল যাইতে তাহার একই সময় লাগে। নদীর স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

14. একখানি এরোপ্লেন বায়ুর অনুকূলে ঘণ্টায় 75 মাইল বেগে এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় 55 মাইল বেগে উড়িতে পারে। বায়ুর গতি, এবং স্থির বাতাসে এরোপ্লেনের গতি নির্ণয় কর।

15. একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল ও অনুকূলে 44 মাইল, এবং 13 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল ও অনুকূলে 55 মাইল চলিতে পারে। স্রোতের বেগ এবং স্থির জলে নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

16. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা ইহার অঙ্কসমষ্টির 3 গুণের সমান, সংখ্যাটিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল সংখ্যাটির অঙ্কসমষ্টির বর্গের সমান। সংখ্যাটি কত ?

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির অন্তর 6. সংখ্যাটির সহিত, উহার অঙ্কগুলির স্থান পরিবর্তন করিয়া লিখিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহা যোগ করিলে যোগফল 110 হয়, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. তিন অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার মধ্য অঙ্কটি 0 এবং অঙ্কসমষ্টি 8. প্রান্তীয় অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন করিয়া লিখিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহা মূল সংখ্যা অপেক্ষা 198 অধিক। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

19. 20 ফুট পরিসীমা-বিশিষ্ট একখানি কম্বলের দৈর্ঘ্যের 3 গুণের সহিত উহার বিস্তারের 5 গুণ যোগ করিলে 36 ফুট হয়, ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

20. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, ইহা অপেক্ষা 2 গজ অধিক দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট ও 1 গজ কম বিস্তারবিশিষ্ট অপর একটি আয়তক্ষেত্রের এবং ইহা অপেক্ষা 8 গজ অধিক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ও 3 গজ কম বিস্তারবিশিষ্ট একটি তৃতীয় আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

21. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 ইঞ্চি কম এবং বিস্তার 3 ইঞ্চি বেশি হইলে ক্ষেত্রফল বর্তমান ক্ষেত্রফল অপেক্ষা 9 বর্গইঞ্চি কম হইত, যদি ইহার দৈর্ঘ্য 3 ইঞ্চি ও বিস্তার 2 ইঞ্চি অধিক হইত, তাহা হইলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গইঞ্চি অধিক হইত। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

22. একব্যক্তি 1340 টাকায় 4 টি ঘোড়া ও 9 টি গরু ক্রয় করিল। ঘোড়াগুলিকে শতকরা 10 টাকা লাভে এবং গরুগুলিকে শতকরা 20 টাকা লাভে বিক্রয় করিয়া তাহার মোট 188 টাকা লাভ হইল; প্রত্যেক ঘোড়ার ক্রয়-মূল্য কত?

23. কতকগুলি টাকা A, B এবং C এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, A মোট টাকার অর্ধেক পাইল, A ও B 76 টাকা পাইল এবং A ও C 62 টাকা পাইল। প্রত্যেকে কত করিয়া পাইল?

24. 120 গজ যাইতে একখানি গাড়ির সম্মুখের চাকা পশ্চাতের চাকা অপেক্ষা 6 বার অধিক ঘোরে। যদি সম্মুখের এবং পশ্চাতের চাকার পরিধি যথাক্রমে তাহাদের বর্তমান পরিধির এক-চতুর্থাংশ এবং এক-পঞ্চমাংশ অধিক হইত, তাহা হইলে সম্মুখের চাকা পশ্চাতের চাকা অপেক্ষা 4 বার অধিক ঘুরিত। প্রত্যেক চাকার পরিধি নির্ণয় কর।

25. একব্যক্তি 1200 টাকার কিয়দংশ শতকরা 4 টাকা সুদে এবং বাকি অংশ শতকরা 5 টাকা সুদে খাটাইয়াছিল। ইহা হইতে তাহার মোট আয় 53টা. 8 আ. হইলে সে প্রত্যেক হারে কত টাকা খাটাইয়াছিল?

26. যদি 15 সের চিনি ও 17 সের চালের মোট মূল্য 8 টা. 9 আ. 9 পা., এবং 25 সের চিনি ও 13 সের চালের মোট মূল্য 11 টা. 3 আ. 9 পা. হয়, তাহা হইলে চিনি ও চালের প্রত্যেক সেরের মূল্য কত হইবে?

27. এক স্কুলে একটি উৎসবের আয়োজন করা হইল। এই উপলক্ষে ছাত্রগণের নিকট প্রত্যেক টিকিট 10 আ. 8 পা. তে এবং সাধারণের নিকট প্রত্যেক টিকিট 1 টা. 8 আনায় বিক্রয় করা হইল। এইরূপে মোট 300 টিকিট বিক্রয় করিয়া 330 টাকা সংগৃহীত হইল। প্রত্যেক প্রকারের কত টিকিট বিক্রয় করা হইয়াছিল?

28. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার প্রথম অঙ্কের 5 গুণ, দ্বিতীয় অঙ্কের 6 গুণ অপেক্ষা 2 অধিক। ঐ সংখ্যার সহিত, অঙ্কদ্বয় উল্টাভাবে লিখিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহা যোগ করিলে 77 হয়। সংখ্যাটি কত ?

29. স্বামী ও স্ত্রীর বয়সের সমষ্টি তাহাদের পুত্রের বয়সের 6 গুণ, 5 বৎসর পরে ইহা পুত্রের বয়সের 5 গুণ হইবে। যদি স্বামীর বয়স স্ত্রীর বয়স অপেক্ষা 10 বৎসর বেশি হয়, তাহা হইলে স্বামী, স্ত্রী এবং পুত্র—প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

30. 3 বৎসর পরে হরেনের বয়স গোবিন্দের 5 বৎসর পূর্বের বয়সের 3 গুণ হইবে। বর্তমানে হরেনের বয়সের $\frac{2}{3}$, গোবিন্দের বয়সের $\frac{3}{5}$ অপেক্ষা 2 বৎসর অধিক। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

31. একব্যক্তি চা-বাগানের 40 খানি এবং পাটকলের 60 খানি অংশ, এবং তাহার বন্ধু চা-বাগানের 60 খানি এবং পাটকলের 40 খানি অংশ ক্রয় করিল। অংশগুলি উভয়ে একই দিনে বিক্রয় করায় প্রথম ব্যক্তির 300 টাকা লাভ এবং দ্বিতীয় ব্যক্তির 300 টাকা লোকসান হইল। প্রত্যেক প্রকারের অংশের মূল্যের কি পরিবর্তন হইয়াছে ?

32. একব্যক্তিকে তাহার পুত্রের বয়স জিজ্ঞাসা করায়, বলিল, "23 বৎসর পরে ছেলেটির বয়স, তাহার জন্মের সময় আমার যে বয়স ছিল তাহার সমান হইবে, এবং তখন আমার বয়স 58 বৎসর হইবে।" পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

33. A, B, C, D এবং E এই পাঁচ জনে বাজি রাখিয়া তাস খেলিতে বসিয়া A, B এর টাকার অর্ধেক, B, C এর টাকার $\frac{1}{3}$, C, D এর টাকার $\frac{1}{4}$ এবং D, E র টাকার $\frac{1}{6}$ জিতিয়া লইল, তাহাদের প্রত্যেকের নিকট বর্তমানে 30 টাকা করিয়া থাকিলে কে কত লইয়া খেলা আরম্ভ করিয়াছিল ?

চতুর্বিংশ অধ্যায়

লৈখিক চিত্র (Graphical Representation)

274. অপেক্ষকের লেখ (The Graph of a Function)

কি প্রকারে জ্যামিতিক বিন্দু-দ্বারা বীজগণিতীয় সংখ্যাসমূহ সূচিত হয় তাহা ইতিপূর্বে অষ্টম অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে বীজগণিতীয় অপেক্ষকগুলিকে কি প্রকারে জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে তাহাই আলোচিত হইবে।

কোন চল (variable) রাশি (x) সমন্বিত বীজগণিতীয় রাশিমালাকে উক্ত x এর **অপেক্ষক** (function) বলে, এবং উহার মান x এর মানের উপর নির্ভর করে। উক্ত অপেক্ষক $f(x)$ প্রতীকটির দ্বারা সূচিত হয় (অনু. 228). এক্ষণে এই অপেক্ষকটির মান y দ্বারা সূচিত হইলে $y=f(x)$ সমীকরণটি পাওয়া যায়।

এই সমীকরণ-দ্বারা x এর বিভিন্ন মান এবং $f(x)$, অর্থাৎ y এর তদনুরূপ (corresponding) মানসমূহের মধ্যে একটি সম্বন্ধ স্থাপিত হয়। এক্ষণে x এর মান কতকগুলি সংখ্যা হইলে, $f(x)$, অর্থাৎ y এর মানও তদনুরূপ কতকগুলি সংখ্যা হইবে। x এর মানকে ভুজ এবং y এর অনুরূপ মানকে কোটি ধরিয়া কতকগুলি বিন্দু অঙ্কিত করা যায়। এই বিন্দুগুলি একটি সন্তত (continuous) রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিলে যে রেখা (বক্র অথবা সরল) পাওয়া যায়, তাহাকে $f(x)$ অপেক্ষকের, অথবা $y=f(x)$ সমীকরণের **লেখ** বা **লৈখিক চিত্র** বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 1. $2x+3$ অপেক্ষকের লেখ, এবং $y=2x+3$ সমীকরণটির লেখ একই।

দ্রষ্টব্য 2. x কে **স্বাধীন** (independent) এবং y কে **অধীন** (dependent) চল রাশি বলে। 'স্বাধীন' চল রাশির কোন পরিবর্তন হইলে y, অর্থাৎ $f(x)$ এর কিরূপ পরিবর্তন হয় তাহা ঐ লেখ হইতে নির্ধারণ করা যায়।

275. সমীকরণের লৈখিক চিত্র

কোন বিন্দুর দুইটি স্থানাঙ্ক প্রদত্ত হইলে উহার অবস্থান নিশ্চিতরূপে নির্ধারণ করা যায়। কিন্তু যদি দুইটির পরিবর্তে কেবলমাত্র একটি স্থানাঙ্ক প্রদত্ত হয়, অথবা যদি স্থানাঙ্ক দুইটি কোন সমীকরণ-দ্বারা সংযুক্ত হয়, তাহা হইলে অতি সহজেই দেখা যায় যে, উহার দ্বারা কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অবস্থান সূচিত হয় না। এ অবস্থায় উক্ত স্থানাঙ্ক বা সমীকরণ-দ্বারা কি সূচিত হয় তাহা বিবেচনা করিয়া দেখা আবশ্যক।

এরূপ স্থলে দেখা যায় যে, উহার দ্বারা কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু সূচিত না হইয়া এমন অসংখ্য বিন্দু সূচিত হয় যাহাদের স্থানাঙ্কদ্বয় উক্ত সমীকরণ-দ্বারা সম্বদ্ধ; সুতরাং ঐ সমীকরণ-দ্বারা এইরূপ বিন্দুসমূহের সমষ্টি, অর্থাৎ ঐরূপ যে-কোন বিন্দুর একটি **পথ** সূচিত হয়।

সংজ্ঞা। কোন সচল বিন্দু এক বা একাধিক সর্তের অধীন হইয়া যে পথ অতিক্রম করে তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চার-পথ** (locus) বলে ; এবং যে সমীকরণ উক্ত পথস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের সম্বন্ধ প্রকাশ করে, তাহাকে উক্ত পথের **সমীকরণ** বলে।

এইরূপে বহু প্রকার জ্যামিতিক 'পথ' বা রেখা বৈজিক সমীকরণ-দ্বারা প্রকাশিত হইতে পারে ; পক্ষান্তরে, যে-কোন বৈজিক সমীকরণও ('সরল' অথবা 'বক্র') 'রেখা'-দ্বারা জ্যামিতিক চিত্রে সূচিত হইতে পারে।

276. $ax+b$ আকারের রাশির লেখ

রাশিটি $2x+3$ হইলে, মনে কর, $y=2x+3$. x এর মান 3, 2, 1, 0, $-1, -2, -3$, ইত্যাদি হইলে, y, অর্থাৎ $2x+3$ এর মান যথাক্রমে কত হইবে তাহা নির্ণয় কর এবং নিম্নলিখিতরূপে উহাদিগকে তালিকাভুক্ত কর :—

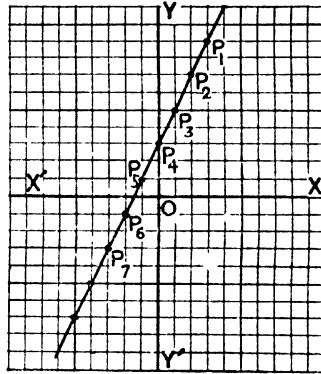
x	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
$2x$	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	−10
$2x+3$	9	7	5	3	1	−1	−3	−5	−7

অতএব, x এর 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3 ইত্যাদি মানের অনুরূপ y, অর্থাৎ $2x+3$ এর মান যথাক্রমে 9, 7, 5, 3, 1, −1, −3 প্রভৃতি পাওয়া যায়।

উপরি উক্ত মানযুগ্মসমূহ-দ্বারা সূচিত $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, \cdots$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর।

বিন্দুগুলি একটি সন্তত (continuous) রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিলে দেখা যাইবে যে, উহারা একটি সরল রেখার উপর অবস্থিত। সরল রেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করিয়া দেওয়া যায়। এই সরল রেখাই $2x+3$ রাশিটির লেখ (graph).

যে হেতু, y সর্বদা $2x+3$ এর সমান, অতএব উক্ত চিত্র হইতে বিভিন্ন বিন্দুর কোটি নির্ধারণ করিলেই উক্ত রাশিটির মানপরিবর্তন লক্ষিত হইবে।

এই লেখ হইতে x এর যে-কোন মানের অনুরূপ y, অথবা $2x+3$ এর মান সহজেই পাওয়া যায়।

যথা, $x=1{\cdot}5$ হইলে, $y=2x+3=6$;

আবার, $x=-4$ হইলে, $y=2x+3=-5$; ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, a এবং b দুইটি ধ্রুবক (constant) রাশি হইলে, $ax+b$ রাশিটির লেখ একটি সরল রেখা হইবে।

দেখা যাইতেছে যে, $P_1, P_2, P_3, \cdots$ বিন্দুগুলি একটি সরল রেখার উপর অবস্থিত, এবং এই রেখা উভয় দিকে বর্ধিত হইলেও, উহার যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারাই প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়; সুতরাং এই সরল রেখাই নির্ণেয় পথ; ইহাকে $2x+3$ রাশিটির 'লেখ' বলা হয়, এবং $y=2x+3$ কে উক্ত লেখটির 'বৈজিক সমীকরণ' বলা হয়।

উদা. 1. $2x$ অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর।

মনে কর, $y=2x$; x এবং y এর অনুরূপ (corresponding) মানগুলি নিম্নলিখিতরূপে তালিকাবদ্ধ কর :—

x	1	2	3	4	···	0	-1	-2	-3	···
$y=2x$	2	4	6	8	···	0	-2	-4	-6	···

উপরি উক্ত প্রত্যেকটি মানযুগ্ম-দ্বারা সূচিত বিন্দু অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত বিন্দুগুলি একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত কর। রেখাটি একটি সরল রেখা হইবে। সরল রেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত কর। ইহাই নির্ণেয় লেখ।

দ্রষ্টব্য। $y=2x+3$ এর প্রত্যেকটি কোটি $y=2x$ এর অনুরূপ কোটির সহিত $+3$ একক যোগ করিয়া পাওয়া যায়। অতএব, $y=2x$ এর লেখটি $y=2x+3$ এর লেখ-এর সমান্তরাল (parallel) সরল রেখা। শেষোক্ত লেখটি প্রথমোক্ত লেখ-এর প্রত্যেকটি কোটিকে পজিটিভ দিকে 3 একক বর্ধিত করিলেই পাওয়া যাইবে।

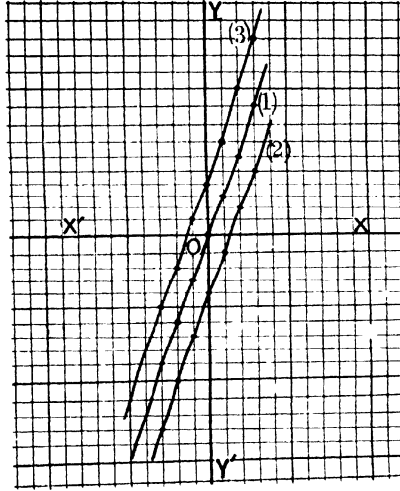
উদা. 2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :—

(1) $y=3x$, (2) $y=3x-4$ এবং (3) $y=3x+4$.

প্রত্যেক স্থলে, x এবং y এর অনুরূপ মানগুলি নিম্নলিখিতরূপে তালিকাবদ্ধ কর :—

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	······
(1) y ·	-9	-6	-3	0	3	6	9	······
(2) y ···	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	······
(3) y ···	-5	-2	1	4	7	10	13	······

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া, (1), (2) এবং (3) এর অন্তর্গত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। পূর্বের ন্যায় বিন্দুগুলি একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত

করিয়া দিলে দেখা যাইবে যে, নির্ণেয় লেখ তিনটির প্রত্যেকটি একটি সরল রেখা।

লেখগুলি উপরের চিত্রে প্রদর্শিত হইল। (1) এর লেখটি মূলবিন্দু দিয়া যাইতেছে; (3) এর লেখটি y অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে পজিটিভ দিকে 4 একক দূরে এবং (2) এর লেখটি y অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে নেগেটিভ দিকে 4 একক দূরে ছেদ করিতেছে।

দ্রষ্টব্য। (1) এর লেখটি মূল বিন্দু দিয়া যাইতেছে। কোন সমীকরণে ধ্রুবক (constant) রাশি না থাকিলে উহার লেখ মূল বিন্দু (origin) দিয়া যায়।

277. ঋজুরেখ লেখ

উপরের উদাহরণসমূহে দেখা গেল যে, $y=mx$ এবং $y=mx+c$ আকারের সমীকরণসমূহের লেখ এক একটি সরল রেখা। আবার x এবং y-ঘটিত যে-কোন একঘাত সমীকরণকেই $y=mx$, অথবা $y=mx+c$ এর আকারে

পরিবর্তিত করা যায়; অতএব দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট প্রত্যেক একঘাত সমীকরণের লেখই একটি সরল রেখা হইবে।

$mx+c$ রাশিটিকে x এর একটি **রৈখিক** (linear) অপেক্ষক, এবং $y=mx+c$, অথবা $ax+by+c=0$ এইরূপ আকারের সমীকরণগুলিকে **রৈখিক সমীকরণও** (linear equation) বলা যাইতে পারে।

নিম্নলিখিত বিষয়গুলি যত্নসহকারে মনে রাখিতে হইবে :—

(1) m এবং c এর মান যাহাই হউক না কেন, $y=mx+c$ এর লেখ একটি সরল রেখা হইবে।

(2) $c=0$ হইলে সমীকরণটি $x=0$, $y=0$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। অতএব (0, 0) বিন্দুটি লেখ-এর উপর অবস্থিত হইবে, অর্থাৎ $y=mx$ এর লেখ মূল বিন্দু (origin) দিয়া যাইবে।

(3) $x=0$ হইলে, $y=c$ হয়। অতএব লেখটি y অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে c একক দূরে ছেদ করে।

(4) m এবং c এর মান যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $y=mx+c$ এর লেখ $y=mx$ এর লেখটির সমান্তরাল (parallel) সরল রেখা হইবে।

(5) m এবং c এর মান নির্দিষ্ট থাকিলে, $y=mx+c$ এর লেখটির অবস্থানও নির্দিষ্ট থাকিবে। যদি m এর কোন পরিবর্তন হয়, উক্ত সরল রেখাটির দিক্‌ও পরিবর্তিত হইয়া যায়, কিন্তু তখনও উহা y অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে c একক দূরে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। আবার যদি m এর মান স্থির থাকে এবং c এর মান পরিবর্তিত হয়, তাহা হইলে রেখাটি $y=mx$ এর লেখ-এর সমান্তরাল থাকে, কিন্তু y অক্ষকে বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে।

(6) m এবং c রাশিদ্বয় সরল রেখাটির অবস্থান নির্দেশ করে বলিয়া, ইহাদিগকে সমীকরণটির **ধ্রুবক** (constant) বলা যাইতে পারে।

(7) $ax+by+c=0$ এই সাধারণ একঘাত সমীকরণকে (linear equation) সর্বদা $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, অর্থাৎ $y=mx+c$ এর আকারে রূপান্তরিত করা যায়। অতএব, $ax+by+c=0$ এর লেখ সর্বদাই একটি 'সরল রেখা' হইবে। ইহা y অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে $\left(-\frac{c}{b}\right)$ একক দূরে ছেদ করে।

(8) $y=mx+c$ এর লেখকে $mx+c$ অপেক্ষকের লেখও বলা হয়।

(9) যে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কেবলমাত্র সেই সকল বিন্দুই লেখটির উপর অবস্থিত হইবে—অপর কোন বিন্দু নহে।

278. একঘাত সমীকরণের লেখ অঙ্কন করিবার প্রক্রিয়া

পূর্বে বলা হইয়াছে যে, x এবং y -ঘটিত একঘাত সমীকরণের লেখ সর্বদাই একটি সরল রেখা হয়। আবার দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া কেবলমাত্র একটি সরল রেখা টানা যাইতে পারে ; সুতরাং যাহাদের স্থানাঙ্ক-দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় এইরূপ দুইটি বিন্দু নির্ধারণ করিয়া একটি সরল রেখা-দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া দিলে ঐ সরল রেখাই সমীকরণটির লেখ। উপরি উক্তরূপে মাত্র দুইটি বিন্দু না লইয়া তিন বা তদধিক বিন্দু লইলে ভুলের সম্ভাবনা থাকে না।

অতএব একটি একঘাত সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিতে হইলে—

(1) x এবং y এর এমন দুইটি মানযুগ্ম নির্ণয় কর যাহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

(2) সুবিধামত একক ধরিয়া, একখানি ছক কাগজের উপর ঐ দুইটি বিন্দু অঙ্কিত কর।

(3) অঙ্কিত বিন্দু দুইটি সংযুক্ত করিয়া সংযোগ রেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত কর। ইহাই নির্ণেয় লেখ।

(4) ঐ লেখ-এর উপর অন্য একটি বিন্দু লও ; উক্ত লেখ হইতে ইহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া দেখাও যে, তদ্দারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

দ্রষ্টব্য 1. অনেক সময় লেখটি x এবং y অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহা নির্ণয় করাই সুবিধাজনক। সমীকরণটিতে যথাক্রমে $y=0$ এবং $x=0$ লিখিয়া এই বিন্দু দুইটি নির্ণয় করিতে হয়।

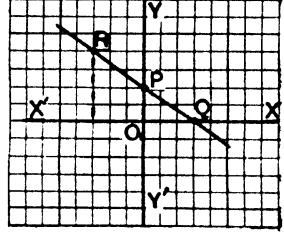
দ্রষ্টব্য 2. যদি কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা একটি সমীকরণ সিদ্ধ হয়, কেবলমাত্র তাহা হইলেই ঐ বিন্দুটি ঐ সমীকরণের লেখের উপর অবস্থিত হইবে—অন্যথা হইবে না।

উদা. 1. $2x+3y=6$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

x এবং y এর নিম্নলিখিত মানসমূহ-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় :—

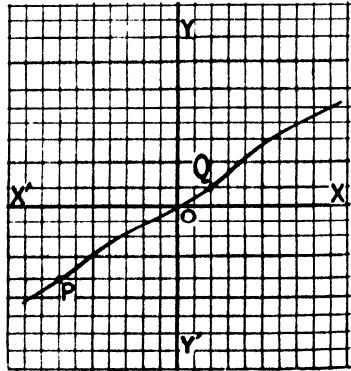
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=3 \end{array}\right\}$$

P (0, 2) এবং Q (3, 0) বিন্দুদ্বয় অঙ্কিত কর। PQ সংযুক্ত কর এবং সংযোগ রেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। PQ সরল রেখাটিই নির্ণেয় লেখ।

লেখটির উপর যে-কোন একটি বিন্দু R লও। লেখ হইতে দেখা যায় যে, $(-3, 4)$ ইহার স্থানাঙ্ক; ইহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অতএব, PQ সরল রেখাই নির্ণেয় লেখ।

উদা. 2. $5x-9y=1$ এর লেখ অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত লেখ হইতে x এবং y এর যে সকল ধন, পূর্ণমান-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহাদের কয়েকটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় লেখটি y অক্ষকে $x=0, y=-\frac{1}{9}$ বিন্দুতে, এবং x অক্ষকে $x=\frac{1}{5}, y=0$ বিন্দুতে ছেদ করে। এই দুইটি বিন্দু অঙ্কিত করিয়া সংযুক্ত করিলেই নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে।

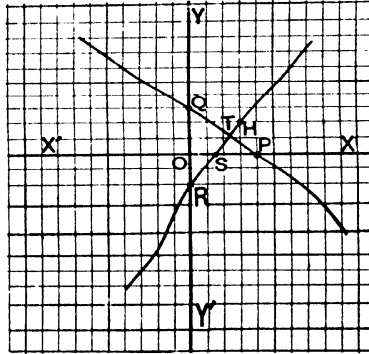
x এবং y এর উক্ত মানদ্বয় ভগ্নাংশ হওয়ায় বিন্দু দুইটি অঙ্কন করা একটু অসুবিধাজনক। এ স্থলে, x এবং y এর যে সকল পূর্ণমান-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা নির্ণয় করাই সুবিধাজনক। দেখা যায় যে, $x=-7, y=-4$ এবং $x=2, y=1$ এই দুইটি পূর্ণমান যুগ্ম-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

P $(-7, -4)$ এবং Q $(2, 1)$ বিন্দু দুইটি অঙ্কিত কর। PQ সংযুক্ত করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। ইহাই নির্ণেয় লেখ।

x এবং y এর যে সকল ধন, পূর্ণমান-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাহাদিগের দ্বারা সূচিত বিন্দুসমূহ লেখটির প্রথম পাদে অবস্থিত অংশটির উপর অবস্থিত হইবে। তদনুসারে নিম্নলিখিত মানগুলি পাওয়া যায় :

$$x=2, \quad x=11, \quad x=20, \quad x=29,$$
$$y=1, \quad y=6, \quad y=11, \quad y=16.$$

দ্রষ্টব্য। একঘাত সমীকরণকে $x/a+y/b=1$ আকারে লেখা হইলে, x অক্ষের অবচ্ছেদ (intercept) $=a$ এবং y অক্ষের অবচ্ছেদ $=b$, এবং ইহারা যথাক্রমে x এবং y এর সহগের বিপরীত (reciprocal).

উদা. 3. (1) $3x+4y=12$ এবং (2) $4x-3y=6$ এর লেখ অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত লেখ দুইটির অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কব।

(1) P (4, 0) এবং Q (0, 3) বিন্দুদ্বয় প্রথম সমীকরণটির লেখ-এর উপর

অবস্থিত। উহাদিগকে অঙ্কিত করিয়া একটি সরল রেখা PQ দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া দেওয়া হইল। PQ রেখাটি প্রথম সমীকরণের লেখ।

(2) R (0, −2) এবং S ($\frac{3}{2}$, 0) বিন্দুদ্বয় দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ-এর উপর অবস্থিত। S বিন্দুটির স্থানাঙ্ক ভগ্নাংশ হওয়ায় পূর্ণ স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট এরূপ অন্য একটি বিন্দু H (3, 2) স্থির করা হইল যে ঐ স্থানাঙ্ক-দ্বারা সমীকরণটি

সিদ্ধ হয়। RH সরল রেখাটি দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ। মনে কর, RH, PQ কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রোট্রাক্টর (protractor) সাহায্যে PQ এবং RH এর অন্তর্ভূত কোণটি মাপিলে দেখা যাইবে যে, $\angle PTH = 90^\circ$, অর্থাৎ এক সমকোণ।

দ্রষ্টব্য। সমীকরণ দুইটিকে $y = -\frac{3}{4}x + 3$ এবং $y = \frac{4}{3}x - 2$ আকারে লেখা যাইতে পারে, এবং দেখা যায় যে, $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$. সাধারণভাবে $y = mx + c$ এবং $y = -\frac{1}{m}x + c'$ আকারের সমীকবণদ্বয়ের লেখ পরস্পর সমকোণে ছেদ করিবে; কাবণ $m \times \left(-\frac{1}{m}\right) = -1$. m-কে $y = mx + c$ এই সমীকরণেব লেখের নতি (slope) বলে।

279. একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের লেখ

এ পর্যন্ত দুইটি অজ্ঞাত বাশিবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ-সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। কিন্তু সমীকরণে একটিমাত্র অজ্ঞাতবাশি বিদ্যমান থাকিলে লেখ কিরূপ হইবে ইহাই এক্ষণে আলোচনা করা হইবে।

$x = 3$ সমীকরণটি বিবেচনা কর। এই সমীকরণটির দ্বারা যাহাদের ভুজ 3 এরূপ সকল বিন্দুকেই বুঝায়, কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে বুঝায় না। x অক্ষের উপর, মূল বিন্দু হইতে পজিটিভদিকে 3 একক দূরে, একটি বিন্দু P লও, এবং ইহাব মধ্য দিয়া y অক্ষের সমান্তরাল করিয়া একটি সরল রেখা টান। এই সরল রেখার উপরে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজই 3. সুতরাং ইহাই সমীকরণটির লেখ।

অতএব, $x = 3$ সমীকরণটির লেখ y অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা।

এইরূপ, $y = 4$ সমীকরণটির লেখ x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা হইবে।

ঐ দুই লেখ যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহার ভুজ $= 3$ এবং কোটি $= 4$, অর্থাৎ উহারা (3, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

দ্রষ্টব্য 1. $x = 0$ এর লেখ y অক্ষ এবং $y = 0$ এর লেখ x অক্ষ।

দ্রষ্টব্য 2. $x = a$ আকারের যে-কোন সমীকরণের লেখ y অক্ষের সমান্তরাল হইবে, এবং $y = b$ আকারের যে-কোন সমীকরণের লেখ x অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

দ্রষ্টব্য 3. একটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত একঘাত সমীকরণের লেখ সর্বদাই অক্ষদ্বয়ের যে-কোন একটির সমান্তরাল হইবে।

280. প্রদত্ত লেখ-এর সমীকরণ-নির্ণয়

দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত রেখার সমীকরণ কি প্রকারে নির্ণয় করিতে হয় তাহাই এক্ষণে প্রদর্শিত হইবে।

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -3)$ এবং $(-4, 9)$, এবং মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $y = mx + c$.

যে হেতু. $x = 2$, $y = -3$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়; অতএব

$$-3 = 2m + c \qquad \cdots \quad (1)$$

এইরূপ, $x = -4$ এবং $y = 9$ লিখিলে,

$$9 = -4m + c \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$-12 = 6m; \qquad \therefore \quad m = -_.$$

m এর মানটি (1) এ লিখিয়া, $c = 1$;

অতএব, $y = -2x + 1$, অথবা $2x + y = 1$; ইহাই নির্ণেয় সমীকবণ।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(3, 0)$, $(7, 2)$ এবং $(-1, -2)$ বিন্দু তিনটি একই সরল রেখার উপরে অবস্থিত। সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া যে সরল রেখাটি যায় তাহার সমীকরণ $y = mx + c$. অতএব প্রথম ও দ্বিতীয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা ঐ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

সমীকরণটিতে, $x = 3$, $y = 0$ লিখিয়া,

$$0 = 3m + c \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $x = 7$, $y = 2$ লিখিয়া,

$$2 = 7m + c \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) সমাধান করিয়া, $m = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$;

অতএব নির্ণেয় সমীকরণটি $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, বা $x - 2y = 3$.

তৃতীয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-1, -2)$ দ্বারা এই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়; সুতরাং তৃতীয় বিন্দুটিও ঐ দুই বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরল রেখার উপরে অবস্থিত, অর্থাৎ $x - 2y = 3$ দ্বারা সূচিত সরল রেখাটির উপরে তিনটি বিন্দুই অবস্থিত।

উদা. 2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ-দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

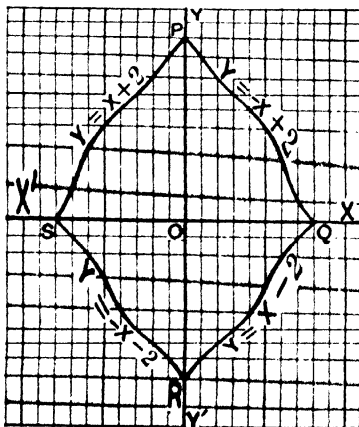
$$(1)\ \ y=x+2, \qquad (2)\ \ y=x-2,$$
$$(3)\ \ y=-x+2, \qquad (4)\ \ y=-x-2.$$

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের চারটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া সমীকরণ (1), (2), (3) এবং (4) এর লেখগুলি অঙ্কিত করা হইল।

সমীকরণ চারটি পর্যবেক্ষণ করিলে দেখা যায় যে,

1. সমীকরণ (1) এবং (2) এর লেখদ্বয় দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা; এইরূপ, সমীকরণ (3) এবং (4) এর লেখ দুইটিও সমান্তরাল সরল রেখা। অতএব লেখ চারটির দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্র একটি সামান্তরিক (parallelogram).

2. সমীকরণ (1) এবং (2) এর লেখ দুইটির প্রত্যেকটি (3) এবং (4) এর লেখদ্বয়কে লম্বভাবে ছেদ করে। অতএব, উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি আয়তক্ষেত্র।

3. আরও দেখা যাইতেছে যে, লেখ চারটির যে-কোন একটি এবং তাহার অব্যবহিত পূর্ব বা পরেরটি যে-কোন অক্ষকে একই বিন্দুতে ছেদ করে, এবং এই

ছেদ-বিন্দু মূল বিন্দু হইতে 2 একক দূরে অক্ষের উপর অবস্থিত; অতএব ক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। চিত্রে ক্ষেত্রটি PQRS দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

এক্ষণে, $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = 4 + 4 = 8$ বর্গ একক।

∴ প্রদত্ত সমীকরণ চারটির লেখ-দ্বারা পরিবেষ্টিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ৪ বর্গ একক।

বর্গক্ষেত্রটির অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা করিলেও দেখা যায় যে, উহাদের সংখ্যা প্রায় 8.

প্রশ্নমালা 101

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :—
(i) $x+9=0$; (ii) $2y+7=0$; (iii) $3x=2$.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ একই চিত্রে অঙ্কিত কর :—

2. (i) $y=2x$; (ii) $y=2x-1$; (iii) $y+2x=1$.
3. (i) $y+x=0$; (ii) $y+x=7$; (iii) $y-x=7$.
4. (i) $2x-3y=0$; (ii) $3x+2y=0$; (iii) $2x+3y=0$.

অক্ষদ্বয়ের অবচ্ছেদ (intercept) নির্ণয় করিয়া, অথবা যে-কোন দুইটি সুবিধাজনক বিন্দু সংযুক্ত করিয়া, নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ, একই চিত্রে অঙ্কিত কর :—

5. (i) $y=2x+5$; (ii) $y=3x-6$; (iii) $y=-3x+21$.
6. (i) $2y=5x+3$; (ii) $2y+3x=3$; (iii) $2y=3x+3$.
7. $y=x+5$ এর লেখ অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত লেখটির x অক্ষের উপর নতি (slope) কত নির্ণয় কর।
8. $x=-3$ হইতে $x=+3$ পর্যন্ত, $4x$ এবং $4x+3$ অপেক্ষক দুইটির লেখ একই চিত্রে অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত লেখদ্বয়ের মধ্যে কোন সাদৃশ্য আছে কিনা স্থির কর। $x=2{\cdot}5$ হইলে, $4x+3$ এর মান কত হইবে লেখ হইতে নির্ণয় কর।
9. $x=-6$ হইতে $x=+6$ পর্যন্ত $y=\frac{1}{3}x-2$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর। এই লেখ হইতে $y=\frac{1}{3}x$ এর লেখ কি প্রকারে অঙ্কিত করা যায়?
10. $x+y=1$, $2x+3y=4$ এবং $y=2$ সমীকরণ তিনটির লেখ একই অক্ষযুগ্ম অবলম্বন করিয়া অঙ্কিত কর, এবং দেখাও যে উহারা এক বিন্দুতে ছেদ করে। ছেদ-বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

11. $x = -4$ হইতে $x = +4$ পর্যন্ত $3x-5$ অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর। $x = -2$ হইতে $x = +2$ এর মধ্যে $3x-5$ এর মান কত বৃদ্ধি পাইবে নির্ণয় কর।

12. $x = -3$ হইতে $x = +3$ পর্যন্ত $3x+5$ এবং $2x+3$ এর লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, লেখদ্বয় ঐ সীমার মধ্যে ছেদ করে।

13. $\frac{2x+7}{3}$ রাশিটির লেখ অঙ্কিত কর, এবং লেখ হইতে, $x = 4$ হইলে রাশিটির মান কত হইবে তাহা নির্ণয় কর; এবং x এর মান কত হইলে রাশিটির মান শূন্য হইবে তাহাও নির্ণয় কর।

14. x এর মান 0 এবং 5 এর মধ্যে থাকিলে একটি অপেক্ষক (function) $2x$ এর সমান হয়, x এর মান 5 এবং 10 এর মধ্যে থাকিলে উহা $10-x$ এর সমান হয়, এবং x এর মান 10 এবং 15 এর মধ্যে থাকিলে উহা $2x-10$ এর সমান হয়। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর।

[পূর্ণ লেখটি তিনটি সরল রেখার সমষ্টি।]

15. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের লেখদ্বারা অক্ষদ্বয়ের অবচ্ছেদ (intercept) নির্ণয় কর :—

(i) $\frac{x}{4} - \frac{y}{12} = 6$; (ii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = -\frac{1}{6}$;

(iii) $y = \frac{9x-12}{4}$; (iv) $y = \frac{8-3x}{6}$.

16. একই চিত্রে নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের লেখ অঙ্কিত কর এবং পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

$$x = 3, \quad y = 5, \quad x = -2, \quad y = -8.$$

17. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ-দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

$$x-2=0, \quad y-1=0 \text{ এবং } 2x+3y=6.$$

18. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগ্মের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(*i*) (0, 3), (5, 0). (*ii*) (1, 2), (−3, 4) ;
(*iii*) (−6, 8), (5, −9).

19. প্রমাণ কর যে, (3, −1), (−2, 4), (5, −3) বিন্দু তিনটি একই সরল রেখার উপরে অবস্থিত ; এই সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

20. $4-2x$ এবং $13-8x$ অপেক্ষক দুইটির লেখ অঙ্কিত কর, এবং অঙ্কিত লেখদ্বয় হইতে $x=0, x=1$; $x=1, x=2$; $x=2, x=3$; এবং $x=3, x=4$ এর মধ্যে উহাদের মানের পরিবর্তন দেখাইয়া দাও। ইহা হইতে x এর এরূপ মান নির্ণয় কর যদ্দ্বারা $4-2x=13-8x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

[সংকেত। লেখ দুইটির ছেদ-বিন্দুর ভুজই নির্ণেয় মান।]

281. বিভিন্ন এককের প্রয়োগ

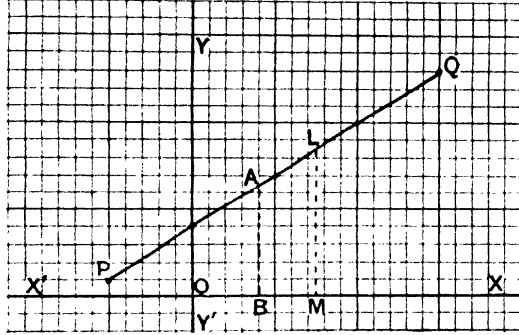
অঙ্কনের সুবিধার জন্য এ পর্যন্ত একই এককে ভুজ এবং কোটির পরিমাপ করা হইয়াছে। কিন্তু একই একক না ধরিলেও চলিতে পারে এবং অনেক ক্ষেত্রে ঐরূপ একই একক ধরা সুবিধাজনকও নহে। যে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের অন্তর অত্যন্ত অধিক সেই সকল বিন্দুর ভুজ ও কোটি একই এককে পরিমাপ করিলে লেখটি বৃহৎ এবং বিসদৃশ হইয়া পড়ে, এই নিমিত্ত বিভিন্ন এককে উহাদের পরিমাপ করাই সুবিধাজনক। বৃহত্তর স্থানাঙ্ক পরিমাপ করিবার জন্য ক্ষুদ্রতর একক ধরা সঙ্গত।

উদা. $y=15x+20$ এর লেখটি অঙ্কিত কর।

x এবং y এর নিম্নলিখিত মানসমূহ-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় :—

$$x=-1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\cdots\cdots$$
$$y=\ \ 5,\quad 20,\quad 35,\quad 50,\quad 65,\quad 80\cdots\cdots$$

এ স্থলে দেখা যাইতেছে যে, x অপেক্ষা y এর মান অধিকতর দ্রুত বৃদ্ধি পাইতেছে। একই একক-দ্বারা উভয় স্থানাঙ্ক পরিমাপ করিলে লেখটির আকার অত্যন্ত বৃহৎ হইবে, এই নিমিত্ত কোটির একক অপেক্ষা ভুজের একক যথেষ্ট

বড় লওয়া হইল। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 5 টি বাহুকে ভুজের একক এবং একটি বাহুকে

কোটির 5 টি এককের সমান ধরিয়া বিন্দুগুলি অঙ্কিত করা হইল। অঙ্কিত বিন্দুগুলি একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে। উপরের চিত্রে লেখটি PQ সরল রেখার দ্বারা সূচিত হইতেছে।

দ্রষ্টব্য। দুইটি চল রাশির একটি অন্যটি অপেক্ষা অধিকতর দ্রুত বৃদ্ধি পাইলে, যেটি অধিক দ্রুত বৃদ্ধি পায় তাহার পরিমাণের জন্য, অন্যটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একক গ্রহণ করিতে হয়।

282. প্রক্ষেপণ (Interpolation)

কোন লেখ হইতে উহার উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়, অথবা উহার উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর একটি স্থানাঙ্ক প্রদত্ত হইলে, অপর স্থানাঙ্কটিও নির্ণয় করা যায়। এই প্রকারে সাধারণত আসন্ন (approximate) ফলই পাওয়া যায়। এইরূপ স্থানাঙ্ক-নির্ণয়ের প্রণালীকে **প্রক্ষেপণ** বলে।

উদা. $15x+20$ অপেক্ষকের লেখ হইতে, $x=1{\cdot}5$ হইলে অপেক্ষকটির মান কত হয় নির্ণয় কর, এবং x এর মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান 32 হইবে তাহাও নির্ণয় কর।

পূর্ব অনুচ্ছেদে $15x+20$ এর লেখটি অঙ্কিত করা হইয়াছে।

এই লেখস্থ L বিন্দুতে $x=1\cdot5$. এই বিন্দু হইতে LM কোটি অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, LM ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 8·5টি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান; কিন্তু ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু কোটির 5 এককের সমান।

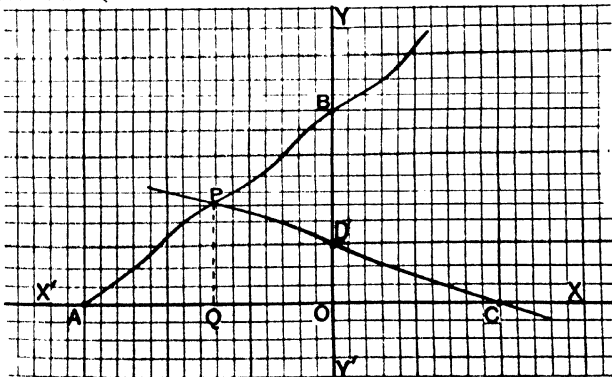
$\therefore$ $LM=8\cdot5\times5=42\cdot5$ একক, এবং অপেক্ষকটির নির্ণেয় মান $=42\cdot5$.

পুনরায়, লেখস্থ A বিন্দুতে $y=32$ এবং $x=OB$. কিন্তু OB= ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 4 টি বাহু $=\frac{4}{5}$ একক। $\therefore$ $x=\cdot8$.

283. লেখ-সাহায্যে সমীকরণ-সমাধান

একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লেখসাহায্যে অতি সহজে সমাধান করা যায়। সমীকরণটির উভয় পার্শ্বের লেখ অঙ্কিত করিয়া লেখদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু নির্ণয় করিতে হয়। এই বিন্দুর ভুজই নির্ণেয় বীজ।

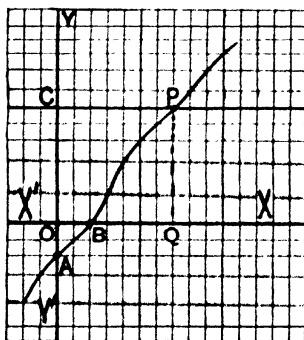
উদা. 1. $\frac{2x+5}{3}=\frac{5-3x}{10}$ সমীকরণটি লেখসাহায্যে সমাধান কর।

এই সমীকরণটি লেখসাহায্যে সমাধান করিতে হইলে, $\frac{2x+5}{3}$ এবং $\frac{5-3x}{10}$ রাশি দুইটির লেখ অঙ্কিত করিতে হয়, এবং অঙ্কিত লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণয় করিতে হয়।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 6 টি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া, $y=\frac{2x+5}{3}$ এবং $y=\frac{5-3x}{10}$ এর লেখ যথাক্রমে AB এবং CD অঙ্কিত কর; ইহাদের ছেদ-বিন্দু P এর ভুজ $=OQ=7\cdot2$ টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু $=\frac{6}{5}$ একক $=1\cdot2$ (স্থূলত)।

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $=-1\cdot2$ (স্থূলত)।

উদা. 2. $x-2=5$ সমীকরণটি লেখসাহায্যে সমাধান কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া $y=x-2$ এবং $y=5$ সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কিত কর। চিত্রে প্রথমটির লেখ AB, y এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে; এ স্থলে $OA=OB=2$ একক। দ্বিতীয় সমীকরণটির লেখ CP x-অক্ষের সমান্তরাল, এবং y-অক্ষকে অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে পজিটিভ দিকে 5 একক দূরে ছেদ করে।

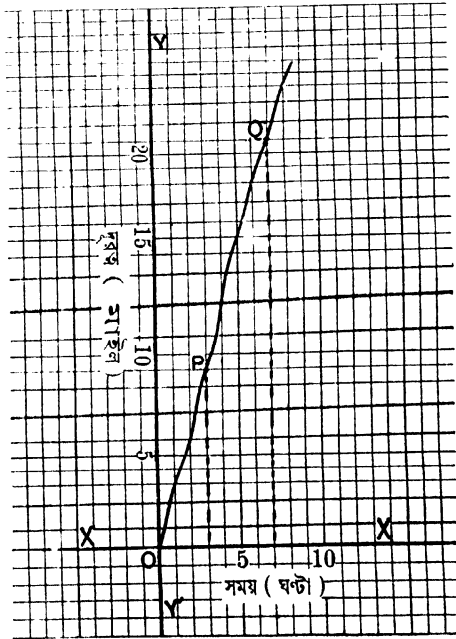
লেখ দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে; P এর ভুজ $=OQ=$ ক্ষুদ্র

বর্গক্ষেত্রের 7 টি বাহু $=7$ একক।

$\therefore$ $x=7$ নির্ণেয় বীজ।

দ্রষ্টব্য। $ax+b=0$ আকারের সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, $y=ax+b$ সমীকরণটির লেখ যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে তাহার ভুজ নির্ণয় করিতে হয়।

284. লৈখিক চিত্রের প্রয়োগ

বীজগণিতীয় রাশিমালা জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ করিতে এবং গণিতশাস্ত্রের বিভিন্ন বিষয়ে বিভিন্ন প্রকারে লৈখিক চিত্রের কিরূপ প্রয়োগ হয় তাহা পূর্বেই বলা হইয়াছে। ব্যবহারিকক্ষেত্রে দ্রুত গণনা করিবার পক্ষে লৈখিক চিত্র বিশেষ উপযোগী। সংবাদপত্র প্রভৃতিতে তাপের পরিবর্তন, বায়ুর চাপের, অথবা বারিপাতের পরিমাণ, শস্যের মূল্যাদির হ্রাস-বৃদ্ধি প্রভৃতি সম্বন্ধে বহুপ্রকার লেখ অনেক সময়ে প্রকাশিত হয়। এইরূপ, দৈনিক জীবনেও উহার নানাপ্রকার ব্যবহার দেখিতে পাওয়া যায়।

উদা. 1. একব্যক্তি ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে হাঁটে। এমন একটি লেখ

অঙ্কিত কর যাহার প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ এবং কোটি-দ্বারা যথাক্রমে তাহার গতির সময় এবং দূরত্ব সূচিত হয়।

একটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুকে একক ধরিয়া x-অক্ষের উপর সময় এবং y-অক্ষের উপর তদনুরূপ (corresponding) দূরত্বের পরিমাণ অঙ্কিত কর। মনে কর, সময়ের একক এক ঘণ্টা এবং দূরত্বের একক এক মাইল ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু-দ্বারা সূচিত হয়।

ঐ ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 মাইল হাঁটে, সুতরাং 3 ঘণ্টায় সে 9 মাইল হাঁটিবে।

অতএব P (3, 9) বিন্দুটি অঙ্কিত করিলে ইহা নির্ণেয় লেখ-এর উপরে অবস্থিত হইবে। যাত্রা করিবার পূর্বে সময় এবং দূরত্ব উভয়ই শূন্য ছিল।

∴ মূল বিন্দুটিও লেখ-এর উপরে অবস্থিত।

গতির বেগ সম (uniform) বলিয়া লেখটি সরল রেখা (OP) এবং ইহার উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি-দ্বারা যথাক্রমে সময় এবং ঐ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব সূচিত হয়।

যেমন, এই সরল রেখার একটি বিন্দু Q লও। লেখ হইতে দেখা যায় যে, ইহার ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 7 এবং 21, সুতরাং 7 দ্বারা সময় এবং 21 দ্বারা ঐ সময়ে অতিক্রান্ত পথের দূরত্ব সূচিত হইতেছে।

দ্রষ্টব্য 1. যদি লোকটি x ঘণ্টায় y মাইল যায়, তাহা হইলে তাহার গতির হার ঘণ্টায় $\frac{y}{x}$ মাইল $=3$ মাইল; $\therefore y=3x$, এবং ইহাই লেখটির সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য 2. লেখটিকে ঐ ব্যক্তির গতি-চিত্র (motion-graph) বলে। ইহার সাহায্যে, কোন নির্দিষ্ট সময়ে ঐ ব্যক্তি কতদূর যাইতে পারে, অথবা কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব চলিতে তাহার কত সময় লাগে তাহা নির্ণয় করা যায়। প্রথম বারে প্রদত্ত সময়কে ভুজ ধরিলে কোটি কত হয়, এবং দ্বিতীয় বারে নির্দিষ্ট দূরত্বকে কোটি ধরিলে ভুজ কত হয় তাহা নির্ণয় করিতে হয়।

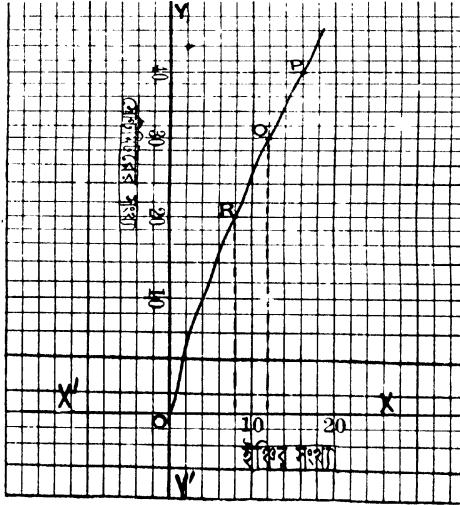
উদা. 2. 1 ইঞ্চি 2·5 সেন্টিমিটারের (centimetre) সমান হইলে x ইঞ্চিতে কত সেন্টিমিটার হইবে? এই সংখ্যাটিকে y দ্বারা সূচিত করিলে x এবং y এর মধ্যে কি সম্বন্ধ পাওয়া যায়? এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর

যাহাব সাহায্যে ইঞ্চিকে সেন্টিমিটরে পরিবর্তিত করা যায় ; এই লেখ হইতে, 8 ইঞ্চিতে কত সেন্টিমিটর তাহা নির্ণয় কর।

1 ইঞ্চি $= 2·5$ সেন্টিমিটর ; $\therefore$ x ইঞ্চি $= 2·5\ x$ সেন্টিমিটর।

অতএব $y = 2·5\ x$, ইহাই x এবং y-মধ্যস্থ নির্ণেয় সম্বন্ধ। ... (1)

এ স্থলে x দ্বারা ইঞ্চির সংখ্যা এবং y দ্বারা উহার সমান (equivalent) সেন্টিমিটরের সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 2 একক ধরিয়া, x-অক্ষ-দ্বারা ইঞ্চি এবং

y-অক্ষ-দ্বারা সেন্টিমিটরের পরিমাণ কর। সমীকরণ (1) হইতে দেখা যায় যে, $x = 0$ হইলে $y = 0$; এবং $x = 16$ হইলে $y = 40$,

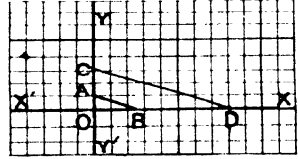
$\therefore$ নির্ণেয় লেখটি মূল বিন্দু এবং P (16, 40) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। অতএব, OP সরল রেখাটিই নির্ণেয় লেখ।

এই লেখ-এর উপরে যে-কোন একটি বিন্দু Q লও; ইহার স্থানাঙ্ক (12, 30); অতএব 12 ইঞ্চি $= 30$ সেন্টিমিটর।

সুতরাং এই লেখসাহায্যে ইঞ্চিকে সেন্টিমিটারে এবং সেন্টিমিটারকে ইঞ্চিতে পরিবর্তিত করা যায়।

লেখ হইতে দেখা যায় যে, R বিন্দুর ভুজ 8 এবং কোটি 20 একক। অতএব 8 ইঞ্চি = 20 সেন্টিমিটার।

উদা. 3. ছক কাগজের সাহায্যে, 2·5 এবং 3·2 এর গুণফল নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু OA কে একক ধরিয়া x-অক্ষের উপর OB = 2·5, এবং y-অক্ষের উপর OC = 3·2 কাটিয়া লও। AB সংযুক্ত কর, এবং C এর মধ্য দিয়া AB এর সমান্তরাল করিয়া CD সরল রেখাটি টান; ইহা অনুভূমিক (horizontal) রেখা OX কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ে,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}, \text{ বা } OB \times OC = OA \times OD,$$

$$\text{বা, } 2·5 \times 3·2 = 1 \times OD = OD;$$

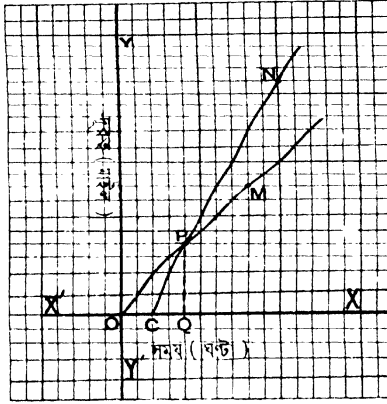
∴ নির্ণেয় গুণফলটি OD দ্বারা সূচিত হইতেছে। গণনা করিয়া দেখা যায় যে, OD = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 8 টি বাহু = 8 একক।

∴ নির্ণেয় গুণফল 8.

উদা. 4. A ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল; 15 মিনিট পরে B ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। কখন্ এবং কোথায় B এবং A র সাক্ষাৎ হইবে, লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

x-অক্ষে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর 8 গুণ দৈর্ঘ্য-দ্বারা 1 ঘণ্টা (সময়ের একক) এবং y-অক্ষে 2 টি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য-দ্বারা 1 মাইল (দূরত্বের একক) পরিমাপ কর।

M বিন্দুটির ভুজ-দ্বারা 1 ঘণ্টা এবং কোটি-দ্বারা 4 মাইল সূচিত হইবে। অতএব, উদা. 1 এর ন্যায়, OM সরল রেখাটি A র গতির লেখ।

OX এর উপরে এমন একটি বিন্দু C লও যেন OC দ্বারা 15 মিনিট, অর্থাৎ এক ঘণ্টার এক-চতুর্থাংশ সময় সূচিত হয়। অতএব, C বিন্দুটি B এর যাত্রা-স্থান সূচিত করিতেছে।

এক্ষণে মনে কর, N বিন্দুটির ভুজ-দ্বারা (B এর যাত্রাকাল হইতে গণনা করিয়া) 1 ঘণ্টা সময় এবং কোটি-দ্বারা 8 মাইল দূরত্ব সূচিত হয়। অতএব, CN সরল রেখাটি B এর গতির লেখ।

উক্ত লেখদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, কখন্ এবং কত দূরে A এবং B এর সাক্ষাৎ হইবে তাহা যথাক্রমে P বিন্দুর ভুজ এবং কোটি-দ্বারা সূচিত হইবে।

P এর ভুজ OQ = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 4 টি বাহু

= A র যাত্রা-সময়ের পরে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

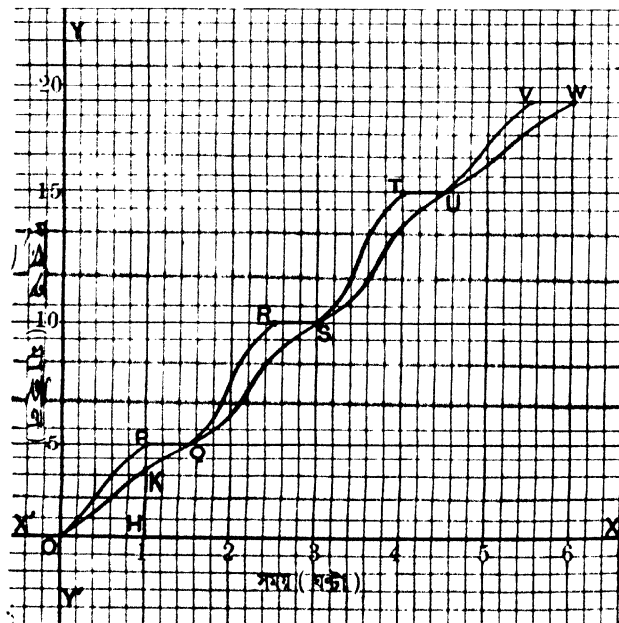
এবং P এর কোটি PQ = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 4 টি বাহু

= যাত্রা-স্থান হইতে 2 মাইল।

সুতরাং, A যাত্রা করিবার $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে এবং যাত্রাস্থান হইতে 2 মাইল দূরে B এবং A র সাক্ষাৎ হইবে।

উদা. 5. A ঘণ্টায় 5 মাইল চলে, এবং প্রত্যেক 5 মাইল অন্তর $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বিশ্রাম করে। B একই সময়ে যাত্রা করিয়া সমবেগে (at a uniform rate) বিশ্রাম না করিয়া চলিতে থাকে, এবং A কে তাহার ঠিক চতুর্থ বার বিশ্রামের পরে যাত্রার সময় ধরিয়া ফেলে। লৈখিক চিত্রসাহায্যে B এর গতির হার নির্ণয় কর।

OX এর উপরে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে সময়ের একক (এক ঘণ্টা) এবং OY এর উপরে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক মাইল ধরিয়া পরিমাপ কর।

P বিন্দুটির ভুজ-দ্বারা 1 ঘণ্টা এবং কোটি-দ্বারা 5 মাইল সূচিত হইলে, প্রথম ঘণ্টায় A র গতিচিত্র OP দ্বারা সূচিত হইবে। A র প্রথম $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা

বিশ্রাম-সময়ের লেখ OX এর সমান্তরাল PQ রেখাটির দ্বারা সূচিত হইবে। এইরূপ পর পর এক ঘণ্টা এবং অর্ধ ঘণ্টার চিত্রগুলি যথাক্রমে QR, RS, ST, TU, UV এবং VW রেখাগুলিদ্বারা সূচিত হইবে। চতুর্থ বার বিশ্রামের পর A, ঠিক W বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিবে। কিন্তু B, O বিন্দু হইতে সমবেগে চলিয়া W বিন্দুতে A কে ধরিবে। সুতরাং OW সরল রেখাটিই B এর গতি-চিত্র। এক্ষণে, W এর ভুজ-দ্বারা 6 ঘণ্টা এবং কোটি-দ্বারা 20 মাইল সূচিত হয়। সুতরাং যাত্রাস্থান হইতে 20 মাইল দূরে এবং যাত্রাসময়ের 6 ঘণ্টা পরে B, A কে ধরিয়া ফেলে।

B এর গতির হার নির্ণয় করিবার জন্য OX এর উপরে H এমন একটি বিন্দু লও যেন OH দ্বারা এক ঘণ্টা সময় সূচিত হয়। কোটি HK অঙ্কিত কর, এবং মনে কর, ইহা OW কে K বিন্দুতে ছেদ করিল ; তাহা হইলে B এর 1 ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব HK দ্বারা সূচিত হইবে। এখন লেখ হইতে দেখা যায় যে, HK = প্রায় $3\frac{1}{3}$ মাইল।

$\therefore$ B এর বেগ = ঘণ্টায় $3\frac{1}{3}$ মাইল।

285. বক্র লেখ

এ পর্যন্ত একঘাত সরল সমীকরণের লেখ-অঙ্কন-প্রণালী আলোচনা করা হইয়াছে। প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ সাধারণ (general)। অপেক্ষকটি একঘাত না হইলেও এই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা যায়। এই সকল ক্ষেত্রে, লেখ একটি বক্ররেখা (curve) হইবে; ইহার আকার অপেক্ষকটির উপর নির্ভর করিবে। এই সকল লেখ অঙ্কিত করিবার সাধারণ প্রক্রিয়ার বিবরণ এই পুস্তকের আলোচ্য নহে। পরবর্তী অধ্যায়ে কেবলমাত্র দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ-অঙ্কন-প্রণালী আলোচিত হইবে।

286. সুমারিকের (Statistics) লেখ

অনেক ক্ষেত্রে দুইটি চল রাশির মধ্যে কোন সম্বন্ধ নির্ণয় করা যায় না। কয়েকটি মাত্র অনুরূপ মান দেওয়া থাকিলে শুধু কয়েকটি নির্দিষ্ট বিন্দু অঙ্কিত

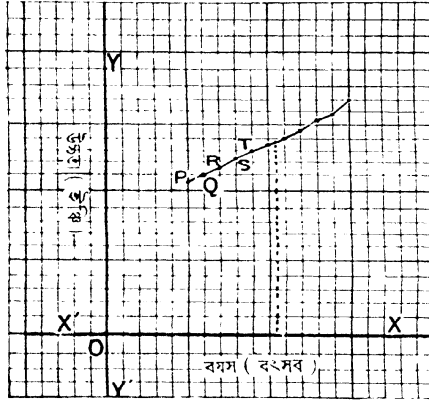
করিতে পারা যায়। এ অবস্থায় অঙ্কিত বিন্দুগুলির নিকট দিয়া একটি রেখা এমনভাবে টানা যায় যে, বিন্দুগুলির কয়েকটি উক্ত রেখার উপরে এবং কয়েকটি নিম্নে অবস্থিত থাকিবে। সুমারিকের চল রাশিগুলি পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষা-দ্বারা নির্ণীত হয় বলিয়া সুমারীয় গণনাসময়ে এই প্রণালী অবলম্বিত হইয়া থাকে। উপাত্ত (data) রাশিগুলি অনেক সময় ভ্রান্তিপূর্ণও হইতে পারে, সুতরাং অঙ্কিত বিন্দুগুলির অবস্থানের উপর সম্পূর্ণ নির্ভর করা চলে না। অধিকন্তু চল রাশিগুলির মধ্যে কোন গণিতীয় সম্বন্ধও থাকে না। সুমারীয় হিসাবাদিতে পূর্ণ শুদ্ধতার আবশ্যক নাই বলিয়া অঙ্কিত বিন্দুগুলিকে ক্রমান্বয়ে সরল রেখাক্রমে সংযোগ করিয়া যে অনিয়মিত ভগ্নরেখাটি পাওয়া যায় তাহাকেই লেখরূপে গ্রহণ করা হয়। মনে রাখিতে হইবে যে, এই প্রকারের লেখ-দ্বারা, এক বিন্দু হইতে অন্য বিন্দু পর্যন্ত পরিবর্তনের মাত্র একটি স্থূল আভাস পাওয়া যায়, কিন্তু মধ্যবর্তী বিন্দুসম্বন্ধে কোন নিশ্চিত বিবরণ পাওয়া যায় না।

উদা. 1. নিম্নের তালিকায় 5 বৎসর হইতে 15 বৎসর বয়স পর্যন্ত কোন বালকের প্রত্যেক বৎসরের উচ্চতার পরিমাণ লিপিবদ্ধ করা আছে। এই তালিকা-সাহায্যে 5 হইতে 15 বৎসরের মধ্যে যে-কোন বয়সের উচ্চতা-নিরূপক লেখ অঙ্কিত কর।

বয়স (বৎসর)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
উচ্চতা (ইঞ্চি)	42	44	46	49	52	54	56	58	61	63	68

এই লেখটি আঁকিবার সময়ে ধরিয়া লইতে হইবে যে, বালকটির উচ্চতার বৃদ্ধির হার সর্বদা সমান; এবং যে হেতু তাহার উচ্চতা কখনও কমিবে না, সুতরাং রেখাটি কখনও নিম্নগামী হইবে না।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে সময়ের একক (এক বৎসর) ধরিয়া x-অক্ষে বয়স অঙ্কিত কর, এবং ঐ দৈর্ঘ্যকে 4 ইঞ্চি ধরিয়া y-অক্ষে উচ্চতার পরিমাপ কর। তালিকায় পঞ্চম বর্ষের উচ্চতা 42 ইঞ্চি দেওয়া আছে। সুতরাং লেখটি P বিন্দু হইতে আরম্ভ করিতে হইবে; কারণ উহার ভুজ $=5$ একক এবং কোটি $=42$ একক।

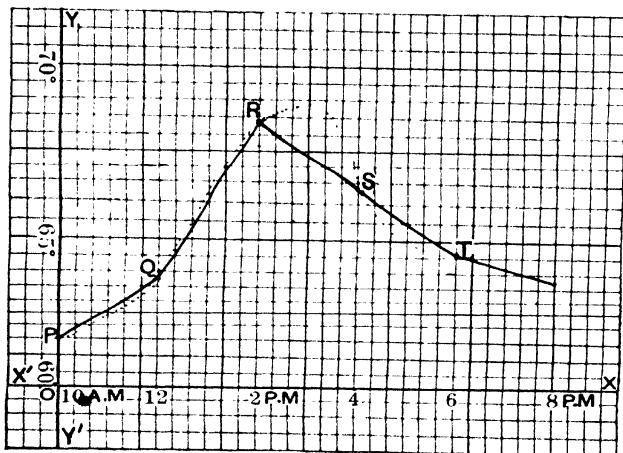
প্রশ্নের উপাত্তসমূহ হইতে 11 টি বিন্দু অঙ্কন করা যায়। লেখটি

ক্রমশ উপরের দিকে যাইবে। এই বিন্দুগুলি যোগ করিয়া PQ, QR, RS, ST প্রভৃতি রেখাগুলি পাওয়া যাইবে; তাহাদের সমষ্টিই নির্ণেয় লেখ।

এই লেখ হইতে 5 হইতে 15 বৎসরের মধ্যে ঐ বালকের যে-কোন বয়সের উচ্চতা-সম্বন্ধে সমস্ত তথ্য সংগ্রহ করিতে পারা যায়। যেমন, লেখ হইতে দেখা যায় যে, $10\frac{1}{2}$ বৎসর বয়সে ঐ বালকের উচ্চতা 55 ইঞ্চি।

উদা. 2. সকাল 10 টা হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক 2 ঘণ্টা অন্তর কোন তাপমান যন্ত্রে তাপের পরিমাণ যথাক্রমে $61^\circ{\cdot}5$, $63^\circ{\cdot}8$, $68^\circ{\cdot}4$, $66^\circ{\cdot}3$, $64^\circ{\cdot}6$ সূচিত হইল। তাপের পরিবর্তন-প্রকাশক একটি লেখ অঙ্কিত কর।

x-অক্ষে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের তিনটি বাহু-দ্বারা সময়ের একক (এক ঘণ্টা) এবং y-অক্ষে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহু-দ্বারা তাপের একক (এক ডিগ্রি) সূচিত কর। 10 টার কম কোন সময় নির্দেশ করিবার আবশ্যক নাই; সুতরাং মূল

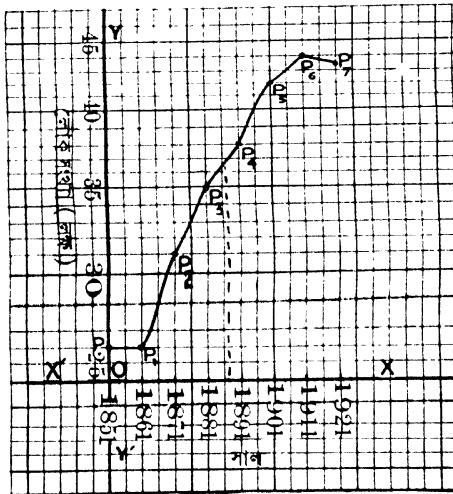
বিন্দুতে সময়ের চিহ্ন 10 বসাও। এইরূপ 60° এর নীচের কোন তাপ সূচিত করিতে হইবে না বলিয়া, মূল বিন্দুতে 60° চিহ্ন বসাও।

এখন তালিকানুসারে বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া সরল রেখাক্রমে যোগ করিলে নির্ণেয় লেখ PQRST ভগ্ন রেখাটি পাওয়া যায়।

উক্ত লেখ হইতে দেখা যায় যে, দ্বিপ্রহরে এবং 2 টার সময়ে তাপের হঠাৎ পরিবর্তন হইয়াছে, কিন্তু ইহা আমাদের সাধারণ অভিজ্ঞতার বিপরীত। 2 টা হইতে 4 টার মধ্যে কোনও সময়ে তাপের পরিমাণ সর্বাপেক্ষা বেশি হওয়াই অধিকতর সম্ভব; অঙ্কিত লেখটির সর্বোচ্চ বিন্দু R এ হওয়া সম্ভব নয়। যদি কোন উপায়ে প্রতি মুহূর্তের উত্তাপের পরিমাণ লিপিবদ্ধ করা যায়, তাহা হইলে দেখা যাইবে যে, তাপের লেখ উক্ত P, Q, R, S······বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া অঙ্কিত একটি সন্তত তরঙ্গাকার রেখা (undulating curve). এই লেখ হইতে দেখা যাইবে যে, 3 টার কিছু পরে সর্বোচ্চ তাপ সূচিত হইতেছে, এবং 6 টা হইতে 8 টার মধ্যে তাপের ক্রমিক পরিবর্তন হইতেছে।

উদা. 3. কোন প্রদেশের বাৎসরিক লোক সংখ্যা নিম্নে প্রদত্ত হইল :

বৎসর	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911	1921
লোকসংখ্যা (লক্ষ)	27	27	31	35	38	42	44	43·5

1851 হইতে 1921 সালের মধ্যে বিভিন্ন সময়ের লোকসংখ্যা-নির্ণায়ক একটি লেখ অঙ্কিত কর।

1851 কে মূল বিন্দু O দ্বারা সূচিত করিয়া OX এর উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 5 বৎসর, এবং 25 লক্ষকে মূল বিন্দু-দ্বারা সূচিত করিয়া, OY এর উপর উক্ত দৈর্ঘ্যকে 1 লক্ষ ধরিয়া পরিমাপ কর। OY এর উপর এমন একটি বিন্দু P লও যাহাতে OP এর দৈর্ঘ্য 27 লক্ষ সূচিত করে।

1851 এর লোকসংখ্যা P বিন্দু-দ্বারা সূচিত হইতেছে বলিয়া, P নির্ণেয় লেখ-এর উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু।

এ স্থলে প্রত্যেক দশ বৎসর সময়ের মধ্যে লোকসংখ্যা বৃদ্ধির হার সমান ধরিয়া লওয়া হইয়াছে।

এখন P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর ; অঙ্কিত বিন্দুগুলিকে সরল রেখাক্রমে সংযুক্ত করিলে $P P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7$ ভগ্ন রেখাটি পাওয়া যায়, ইহাই নির্ণেয় লেখ।

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, 1851 হইতে 1861 পর্যন্ত লোকসংখ্যা বৃদ্ধি হয় নাই, সুতরাং PP_1 সরল রেখাটি OX এর সমান্তরাল। আবার 1911 হইতে 1921 এর মধ্যে লোকসংখ্যা কমিয়াছে। এখন এই লেখ-সাহায্যে 1851 হইতে 1921 এর মধ্যে যে-কোন বৎসরের লোকসংখ্যা সহজেই নির্ণয় করা যায়। যেমন, লেখ হইতে দেখা যায় যে, 1887 সালের লোকসংখ্যা প্রায় 36·8 লক্ষ।

প্রশ্নমালা 102

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

(i) $y = 40x + 3$, (ii) $y = -25x + 33$;

(iii) $35y = x - 8$; (iv) $-15y = 2x + 32$.

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং $x = 2$ হইলে উহাদের মান কত হইবে, লেখ হইতে, নির্ণয় কর :

(i) $30x + 9$; (ii) $\frac{3x+38}{6}$; (iii) $\frac{x-29}{36}$.

3. $\frac{26-3x}{5}$ রাশিটির লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর। $x = 2·4$ হইলে রাশিটির মান কত হইবে, এবং x এর মান কত হইলে রাশিটির মান 2·5 হইবে, লেখ হইতে, নির্ণয় কর।

4. $\frac{3x-5}{2}$ এবং $8 - \frac{2}{3}x$ এর লৈখিক চিত্র অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, ইহারা পরস্পর একটি সমকোণে ছেদ করে। x এর মান কত হইলে $\frac{3x-5}{2}$ এবং $8 - \frac{2}{3}x$ এর মান সমান হইবে ?

5. $y=x$ এবং $y=2x+1$ এর লৈখিক চিত্র অঙ্কিত করিয়া তাহাদের ছেদ-বিন্দু নির্ধারণ কর।

6. $7x+5$ অপেক্ষকটির লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং $x=1.5$ হইলে, ইহার মান কত হইবে লেখ হইতে নির্ধারণ কর। x এর আসন্ন মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান 23 হইবে?

7. প্রমাণ কর যে, $y+2x=0$, $y-3x+5=0$ এবং $4y+5x+3=0$ তিনটি সমীকরণের লেখ একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

8. $x=1$ হইতে $x=4$ পর্যন্ত $2x+y=5$ এবং $x+2y=4$ এর লৈখিক লেখ অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. লৈখিক চিত্র-সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

(i) $3x-4=\frac{14-5x}{3}$; (ii) $10-4x=\frac{3x-17}{4}$,

(iii) $6x+5=0$, (iv) $\frac{5x-2}{5}=\frac{6x}{7}-1$.

10. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x+y=3$, $x-y=5$ এবং $\frac{x}{10}+\frac{y}{7}=1$. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, এবং উহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কের আসন্ন মান নির্ণয় কর।

11. $\frac{6x+7}{2}$ এর লৈখিক চিত্র অঙ্কিত করিয়া উহা হইতে, $x=1.5$ হইলে, রাশিটির মান কত হইবে নির্ণয় কর; এবং x এর মান কত হইলে রাশিটির মান 6.5 হইবে তাহাও নির্ণয় কর।

12. 35 গজ দৈর্ঘ্য স্থূলত 32 মিটারের সমান হইলে, গজকে মিটারে পরিবর্তিত করিবার একটি লেখ অঙ্কিত কর।

প্রমাণ কর যে, 22.2 গজ স্থূলত 20.3 মিটারের সমান।

13. একব্যক্তি 50 দিনে 640 টাকা ব্যয় করে। তাহার যে-কোন সময়ের ব্যয়-নিরূপক একটি লেখ অঙ্কিত কর। এই লেখ হইতে, তাহার 35 দিনের ব্যয় নির্ণয় কর।

14. এক শিলিং $= \frac{3}{4}$ টাকা। এই দুই প্রকার মুদ্রার সম্বন্ধ-নির্দেশক একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর। 15 শিলিং-এ কত টাকা হইবে, লেখ হইতে, নির্ণয় কর।

15. কোন পরীক্ষার সর্বোচ্চ নম্বর 125 ; নম্বরগুলিকে এরূপ ভাবে কমাইতে হইবে যেন সর্বোচ্চ নম্বর 100 হয়। লৈখিক চিত্র-সাহায্যে ইহা কিরূপে করা যাইতে পারে দেখাও, এবং যে সকল পরিক্ষার্থী (*i*) 100 এবং (*ii*) 60 নম্বর পাইয়াছিল তাহাদের পরিবর্তিত নম্বর কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[পরীক্ষার্থী যত নম্বর পাইয়াছিল তাহাকে x দ্বারা, এবং কমাইয়া যাহা দেওয়া হইয়াছিল তাহাকে y দ্বারা সূচিত কর।]

16. 20 লিটার $= 4 \cdot 4$ গ্যালন। লিটারকে গ্যালনে এবং গ্যালনকে লিটারে পরিবর্তিত করিবার একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর।

$3 \cdot 2$ গ্যালনকে লিটারে এবং $18 \cdot 5$ লিটারকে গ্যালনে পরিবর্তিত কর।

17. কোন পুস্তকের প্রথম 100 খানি মুদ্রণের ব্যয় 25 টাকা, কিন্তু ইহার উপর যে-কোন সংখ্যক পুস্তকের মুদ্রণ-ব্যয়ের হার শতকরা 4 টাকা। 600 পর্যন্ত যে-কোন সংখ্যক পুস্তকের মুদ্রণ-ব্যয়-নিরূপক একটি লেখ অঙ্কিত কর, এবং ইহা হইতে 340 খানি পুস্তকের মুদ্রণ-ব্যয় নির্ণয় কর।

18. 250 টাকা এক বৎসরের বেতন হইলে, যে-কোন সময়ের বেতন-নিরূপক একটি লেখ অঙ্কিত করিয়া ইহা হইতে 1 সপ্তাহ, 25 দিন এবং 158 দিনের বেতন নির্ণয় কর। কোন ব্যক্তি 50 টাকা বেতন পাইলে সে কত দিন কার্য করিয়াছিল নির্ণয় কর।

19. মনে কর, শতকরা 20 হারে লাভে কতকগুলি জিনিষ বিক্রয় করা হইল, ক্রয় এবং বিক্রয়-মূল্যের সম্বন্ধ-প্রকাশক একটি লেখ অঙ্কিত কর। উহাদের একটির বিক্রয়-মূল্য 12 টা. 8 আনা হইলে তাহার ক্রয়-মূল্য, এবং ক্রয়-মূল্য 5 টা. 6 আ. 8 পা. হইলে তাহার বিক্রয়-মূল্য কত, লেখ হইতে, নিরূপণ কর।

20. রাম এবং হরি পরস্পর সাক্ষাৎ করিবার জন্য রাত্রি 9 টার সময়ে 30 মাইল দূরবর্তী দুই স্থান হইতে যাত্রা করিল। যদি রাম ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এবং হরি 3 মাইল বেগে চলিতে থাকে তাহা হইলে তাহারা কখন্ এবং কোথায় মিলিত হইবে, লেখ-সাহায্যে, নির্ণয় কর।

21. একটি বানর 10 ফুট লম্বা একটি মসৃণ দণ্ড বাহিয়া উপরে উঠিতে গিয়া, 1 সেকেণ্ডে 3 ফুট উঠিয়া পরবর্তী সেকেণ্ডে 1 ফুট নামিয়া পড়ে। শীর্ষস্থানে পৌঁছিতে তাহার কত সময় লাগিবে, লেখ-সাহায্যে, নির্ণয় কর।

[x দ্বারা সময় এবং y দ্বারা দণ্ডটির পাদদেশ হইতে দূরত্ব সূচিত কর। লেখটি একটি ভগ্নরেখা হইবে, এবং অষ্টম সেকেণ্ডের পর ইহার গতি সম হইবে।]

22. একব্যক্তি ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল বেগে 4 ঘণ্টা চলিবার পর $\frac{3}{4}$ ঘণ্টা বিশ্রাম করে, পরে সে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করে। তাহার গতি-চিত্র অঙ্কিত কর।

23. কোন পরীক্ষায় সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন নম্বর যথাক্রমে 175 এবং 45 হইয়াছে। কিরূপে সর্বোচ্চ নম্বর 125 এবং সর্বনিম্ন নম্বর 30 করা যাইতে পারে লৈখিক চিত্র-সাহায্যে দেখাও। কোন পরিক্ষার্থী প্রথমে 105 পাইলে তাহার পরিবর্তিত নম্বর কত হইবে, এবং পরিবর্তিত নম্বর 65 হইলে তাহার পূর্ব নম্বর কত ছিল ঐ লেখ হইতে নির্ণয় কর।

[প্রথমে প্রাপ্ত নম্বর x-দ্বারা এবং পরিবর্তিত নম্বর y-দ্বারা সূচিত কর। লেখটি PQ (একটি সরল রেখা) হইবে; P এবং Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (45, 30) এবং (175, 125.)]

24. বেলা 2 টা ও 3 টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন একত্র হইবে তাহা লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

[মিনিটকে x-দ্বারা এবং 12 টায় কাঁটা যেখানে থাকে তথা হইতে প্রত্যেক কাঁটার কৌণিক দূরত্ব y দ্বারা সূচিত কর।]

25. বার্ষিক শতকরা 4 হারে 150 টাকা সুদে খাটিল। 15 বৎসর পর্যন্ত যে-কোন বৎসরের শেষে মোট টাকার পরিমাণ নির্ণয় করিবার উপযোগী একটি লেখ অঙ্কিত কর।

26. একটি বালিকার 5 হইতে 15 বৎসর বয়স পর্যন্ত দৈহিক উচ্চতার তালিকা নিম্নলিখিতরূপে ইঞ্চিতে প্রকাশ করা যায় :

বয়স	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
উচ্চতা	42	44	45	48	50	52	54	58	60	63	65

অঙ্কিত লেখ হইতে বল, ঐ সময়ের মধ্যে কখন্ তাহার উচ্চতা সর্বাপেক্ষা অধিক বৃদ্ধি হইয়াছিল ?

27. বৎসরের বিভিন্ন মাসের উত্তাপের গড়পরিমাণ নিম্নে ফারেনহাইট ডিগ্রিতে প্রদত্ত হইল :

জানু.	ফেব্রু.	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন	জুলাই	আগ.	সেপ্টে.	অক্টো.	নভে.	ডিসে.
39	39	42	47	53	59	63	62	57	50	44	40

বৎসরের কোন্ সময় উত্তাপের গড়পরিমাণ সর্বাপেক্ষা দ্রুত (*i*) বাড়ে এবং (*ii*) কমে ?

28. একজন কেরানির বেতন প্রতিবৎসর কোন নির্দিষ্ট পরিমাণে বৃদ্ধি পায়। ছয় বৎসর কার্য করিবার পর তাহার বেতন 125 টাকা হইল, এবং 15 বৎসর পরে 200 টাকা হইল। তাহার যে-কোন বৎসরের বেতন-নিরূপক একটি লেখ অঙ্কিত করিয়া তাহা হইতে তাহার (*i*) সর্বপ্রথম এবং (*ii*) বিংশ বৎসরের বেতন নিরূপণ কর।

29. নিম্নলিখিত পরিবর্তন-প্রকাশক একটি লেখ অঙ্কিত কর :

সময়	বেলা বারটা	বেলা 2 টা	বেলা 4 টা	সন্ধ্যা 6 টা	রাত্রি 8 টা	রাত্রি 10 টা	রাত্রি বারটা
উত্তাপ	33°	42°	34°	30°	22°	−8°	−8°

কত সময় উত্তাপ 36° এর উপরে ছিল ?

30. নিম্নে 1928 সালের আগষ্ট মাসের কয়েক দিনের চাপমান-যন্ত্রের চাপ-নির্দেশক চিহ্নের উচ্চতা প্রদত্ত হইল :

5ই	7ই	8ই	9ই	11ই	12ই	13ই	15ই
30·1	29·5	29·5	29·6	29·8	30·0	29·8	29·4

এই সকল পরিবর্তন প্রকাশ করিবার লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং 6ই, 10ই এবং 14ই তারিখের উচ্চতা এই লেখ-সাহায্যে কেন নির্ণয় করা যায় না তাহা বুঝাইয়া দাও।

31. কোন বিমা কোম্পানিতে বিভিন্ন বয়সে 100 টাকার বিমার প্রিমিয়ামের (premium) আসন্ন হার নিম্নে প্রদত্ত হইল :

বয়স	20	23	27	30	32	35	40	45
প্রিমিয়াম	1·7	1·8	2·0	2·2	2·3	2·5	2·9	3·5

এই স্থমারির সংখ্যাগুলির লেখ অঙ্কিত কব, এবং নির্ণীত লেখ হইতে 25 এবং 38 বৎসর বয়সের প্রিমিয়ামের হার আসন্ন আনায় প্রকাশ কর, এবং দেখাও যে, 20 হইতে 28 বৎসর পর্যন্ত প্রিমিয়ামের হার বয়সের সহিত প্রায় সমানুপাত।

32. কলিকাতায় পর পর দশ বৎসবেব বৃষ্টিপাতের পরিমাণ যথাক্রমে 47, 47·5, 47·4, 50, 51·3, 48·6, 48·8, 49·2, 49·0 এবং 48·5 ইঞ্চি। বার্ষিক বৃষ্টিপাতের গড় 49 ইঞ্চি। বার্ষিক বৃষ্টিপাতের পরিবর্তন লেখ-দ্বাবা সূচিত কর।

287. লৈখিক চিত্র-সাহায্যে সহ-সমীকরণের সমাধান

ইতিপূর্বে বীজগণিতীয় সমীকরণ এবং রাশিমালার লৈখিক চিত্র অঙ্কণ করিবার প্রণালী বর্ণিত হইয়াছে। দেখা গিয়াছে যে, (x, y) দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের লেখ একটি সরল বেখা ; এই লেখ-এব উপবিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

অতএব, x এবং y-যুক্ত দুইটি সহ-সমীকরণেব লৈখিক চিত্র অঙ্কন কবিলে দুইটি সরল রেখা পাওয়া যাইবে ; ইহারা একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে। এই বিন্দুটি উভয় লেখ-এর উপরেই অবস্থিত; অতএব ইহাব স্থানাঙ্ক-দ্বাবা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে। ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ই প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের নির্ণেয় বীজ।

স্থতরাং, লৈখিক চিত্র-সাহায্যে দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট দুইটি সহ-সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে,

1. প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের দুইটি লেখ অঙ্কন কর।
2. অঙ্কিত লেখ দুইটির ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ইহাবাই প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের বীজ।

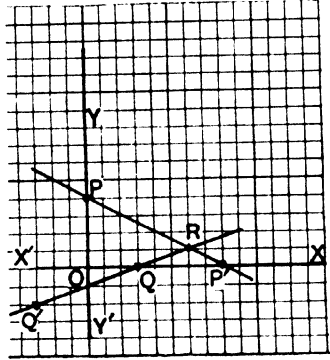
দ্রষ্টব্য। উভয় লেখ একই একক-অনুসারে অঙ্কন করিতে হইবে।

উদা. 1. লৈখিক চিত্র-সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয় সমাধান কর :

$$x+2y=8, \quad \cdots \quad (1) \qquad x-3y=3. \quad \cdots \quad (2)$$

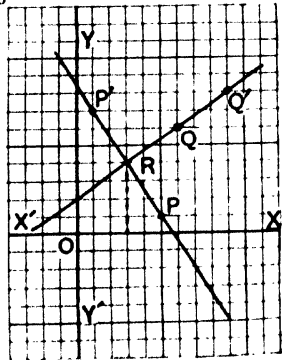
স্পষ্টই দেখা যায় যে, P(0, 4) ও P′(8, 0) বিন্দুদ্বয় (1) এর লেখের উপরে অবস্থিত, এবং Q(3, 0) ও Q′(−3, −2) বিন্দুদ্বয় (2) এর লেখের উপরে অবস্থিত।

উপযুক্ত অক্ষ এবং একক নির্বাচন করিয়া P, P′ এবং Q, Q′ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। PP′ সরল রেখাটি সমীকরণ (1) এর লেখ এবং QQ′ সরল রেখাটি সমীকরণ (2) এর লেখ হইবে। পার্শ্ববর্তী চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, ঐ দুই সরল রেখা R (6, 1) বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের বীজ $x=6$, $y=1$.

উদা. 2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি লৈখিক চিত্র-সাহায্যে সমাধান কর :

$$3x=17-2y, \quad 3y=2x+6.$$

দেখা যাইতেছে যে, P (5, 1) ও P′(1, 7) বিন্দুদ্বয় প্রথম সমীকরণের লেখ-এর উপরে এবং Q (6, 6) ও Q′(9, 8) বিন্দুদ্বয় দ্বিতীয় সমীকরণে লেখ-এর উপরে অবস্থিত।

উপযুক্ত অক্ষ এবং একক নির্বাচন করিয়া P, P′ এবং Q, Q′ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। P P′ এবং Q Q′ সংযুক্ত করিলে সরল রেখাদ্বয় R বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে। এই উভয়রেখাস্থিত বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক, $x=3$, $y=4$; অতএব, ইহাই নির্ণেয় বীজ।

প্রশ্নমালা 103

লৈখিক চিত্র-সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :–

1. $4y=3x$, $4x-3y=7$.
2. $x-2y+10=0$, $2x-3y+16=0$.
3. $10x-4y=11$, $3x+2y=14\frac{1}{2}$.
4. $2x+y-14=x-2y=0$.
5. $2y-5x=20$, $2x-5y=16$.
6. $2x-\frac{y-3}{5}=4$, $3y+\frac{x-2}{3}=9$.
7. $\frac{x-y}{3}=\frac{y-1}{4}$, $\frac{4x-5y}{7}=x-7$.
8. $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=\frac{5}{6}$.

9. $x+y=4$ এবং $x-y=2$ সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং তাহাদের ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

10. $y-2x+4=0$ সমীকরণের লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর, এবং অঙ্কিত চিত্র হইতে $2x-4=0$ সমীকরণটির বীজ নির্ণয় কর।

11. $x+2y=2$ এবং $y-2x=5$ সমীকরণ দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং তাহাদের ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. প্রমাণ কর যে, $3x+4y=14$, $7x-8y=-2$ এবং $17x+13y=60$ সমীকরণগুলির দ্বারা সূচিত সরল রেখাগুলি এক বিন্দুতে ছেদ করে। ছেদ-বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

13. $3x+4y=25$ এবং $4x-3y=0$ সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, এবং তাহাদের ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

পঞ্চবিংশ অধ্যায়

অনুপাত (Ratio) এবং সমানুপাত (Proportion)

288. অনুপাত (Ratio)

সমজাতীয় দুইটি রাশির তুলনা করিতে হইলে, উভয়কে ঐ জাতীয় কোনও একটি এককে পরিবর্তিত করিয়া, প্রাপ্ত রাশিদ্বয়ের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তাহা বিবেচনা করিতে হয়। এক জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে একটির সহিত অপরটির এই প্রকার সম্বন্ধের নাম **অনুপাত** (ratio).

উল্লিখিত সংজ্ঞা হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, দুইটি সমজাতীয় রাশির অনুপাত একটি ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা যাইতে পারে। একই এককে পরিবর্তিত প্রথম রাশির পরিমাণ এই ভগ্নাংশের লব, এবং দ্বিতীয় রাশির পরিমাণ উহার হর। শুদ্ধ (abstract) রাশির বেলায় উক্ত রাশিদ্বয়ই যথাক্রমে লব ও হর-রূপে লওয়া হয়।

দৃষ্টান্ত

(1) 2 গজ এবং 2 ফুট দীর্ঘ দুই খণ্ড যষ্টির দৈর্ঘ্য তুলনা করিলে দেখা যায় যে, 2 গজ দীর্ঘ যষ্টিখণ্ড 2 ফুট দীর্ঘ যষ্টিখণ্ডের 3 গুণ। এ স্থলে উভয়েই একজাতীয় রাশি।

অতএব, 2 ফুটের সহিত 2 গজের অনুপাত $=3$.

(2) 5 টাকার সহিত 3 টাকার অনুপাত $=\frac{5}{3}$.

(3) 10 মিনিট 1 ঘণ্টার এক-ষষ্ঠাংশ; সুতরাং 1 ঘণ্টার সহিত 10 মিনিটের অনুপাত $=\frac{1}{6}$. এ স্থলে, 10 মিনিট এবং 1 ঘণ্টা উভয়েই একজাতীয় রাশি।

লক্ষ্য করিতে হইবে যে, উল্লিখিত প্রত্যেক উদাহরণে রাশি দুইটি একজাতীয়।

দ্রষ্টব্য। যে দুইটি রাশির অনুপাত নির্ণয় করা হয় তাহাদের প্রকৃতির সহিত অনুপাতের মানের কোনও সম্বন্ধ নাই। যথা, 5 শিলিং-এর সহিত

3 শিলিং-এর অনুপাত, 5 ফুটের সহিত 3 ফুটের অনুপাত, 5 টাকার সহিত 3 টাকার অনুপাত, পরস্পর সমান ; কেননা অনুপাতগুলির প্রত্যেকটির মান $\frac{3}{5}$. প্রত্যেক অনুপাতই একটি শুদ্ধ সংখ্যা।

a এবং b একই এককে প্রকাশিত দুইটি সমজাতীয় রাশি হইলে, 'b এর সহিত a র অনুপাত', অথবা 'a এবং b এর অনুপাত' বলিলে $\frac{a}{b}$ বুঝিতে হইবে। 'a এবং b এর অনুপাত' '$a : b$' এইরূপেও লিখিত হয় ; অতএব $a : b$ এবং $\frac{a}{b}$ এর একই অর্থ।

289. পূর্ব রাশি, উত্তর রাশি

অনুপাতের রাশি দুইটির প্রত্যেককে অনুপাতের **পদ** বলে, এবং উহাদের প্রথমটিকে **পূর্ব রাশি** (antecedent) ও দ্বিতীয়টিকে **উত্তর রাশি** (consequent) বলে। যেমন, $a : b$ অনুপাতটির a পূর্ব রাশি এবং b উত্তর রাশি।

কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশি দুইটির পূর্ব রাশিকে উত্তর রাশি এবং উত্তর রাশিকে পূর্ব রাশি-রূপে লিখিলে যে অনুপাত পাওয়া যায়, তাহাকে প্রথমোক্ত অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত** (inverse ratio) বলে। যেমন, $b : a$ অনুপাতটি $a : b$ অনুপাতের 'ব্যস্ত' অনুপাত।

কোন অনুপাতকে তাহার ব্যস্ত অনুপাত-দ্বারা গুণ করিলে 1 হয়, কারণ $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

290. অনুপাতসমূহের তুলনা

ভগ্নাংশের নিয়মানুসারে,

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \text{ অথবা } \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}},$$

অর্থাৎ $a : b$ অনুপাতটি $ma : mb$ অনুপাত, অথবা $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ অনুপাতের সমান। ইহা হইতে নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি পাওয়া যায় :

উপপাদ্য। পূর্ব ও উত্তর রাশিদ্বয়ের উভয়কে একই রাশিদ্বারা গুণ কিংবা ভাগ করিলে, তাহাদের অনুপাতের কোনও পরিবর্তন হয় না।

এই উপপাদ্য-অনুসারে, $3 : 4$, $6 : 8$, $27 : 36$ প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান।

এইরূপ, $48 : 72$, $12 : 18$, $2 : 3$ অনুপাতগুলিও পরস্পর সমান।

দুই কিংবা তদধিক অনুপাতের মধ্যে কোন্‌টি বড়, কোন্‌টি ছোট, কিংবা তাহারা পরস্পর সমান কিনা তাহা নির্ণয় করিতে হইলে, উক্ত উপপাদ্য-অনুসারে উহাদিগকে একই হরবিশিষ্ট করিতে হয়, এবং এইরূপে পরিবর্তিত অনুপাত-সমূহের পূর্ব রাশিগুলির মধ্যে কোন্‌টি বড়, কোন্‌টি ছোট, কিংবা উহারা পরস্পর সমান কিনা তাহাই স্থির করিতে হয়।

যেমন, $2 : 3$ এবং $4 : 5$ অনুপাত দুইটির প্রথমটি $= \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ এবং দ্বিতীয়টি $= \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, এক্ষণে, $12 > 10$; সুতরাং দ্বিতীয় অনুপাতটি প্রথমটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

দ্রষ্টব্য। দুইটি ভগ্নাংশের অনুপাতকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়। কারণ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; অতএব $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ অনুপাতটি ad এবং bc এই পূর্ণসংখ্যাদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

291. প্রমেয় এবং অমেয় রাশি (Commensurable and Incommensurable Quantities)

কোন দুইটি রাশির অনুপাত ঠিক দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করিতে পারিলে উক্ত রাশি দুইটিকে 'প্রমেয় রাশি' বলে ; অন্যথা উহাদিগকে 'অমেয় রাশি' বলে।

দৃষ্টান্ত। $1\frac{3}{4} : 2\frac{2}{3} = \frac{7}{4} : \frac{8}{3} = 21 : 32.$

সুতরাং, $1\frac{3}{4}$ ও $2\frac{2}{3}$ রাশি দুইটি প্রমেয়, কারণ তাহাদের অনুপাত একটি ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশিত হইতে পারে।

কিন্তু $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ অনুপাতটিকে কোন দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না। এই জন্য $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{2}$ রাশি দুইটি অমেয়।

দ্রষ্টব্য 1. কোন সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করিতে না পারিলে, কখন কখন উক্ত সংখ্যাটিকে অমেয় বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. দুইটি অমেয় রাশির অনুপাতকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত-রূপে প্রকাশ করা সম্ভবপর না হইলেও এমন দুইটি পূর্ণ সংখ্যা নির্ণয় করা যাইতে পারে যাহাদের অনুপাত এবং উক্ত অনুপাতটির অন্তর ইচ্ছামত কম করা যাইতে পারে।

$$\text{যথা, } \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2 \cdot 23606}{2} = 1 \cdot 11803 \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{111803}{100000} \text{ কিন্তু } < \frac{111804}{100000}.$$

সুতরাং $111803 : 100000$, অথবা $111804 : 100000$ হইতে $\sqrt{5} : 2$ এর অন্তর অতি সামান্য। $\sqrt{5}$ এর মান আরও অধিক সংখ্যক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিলে উক্ত অনুপাতটির আরও নিকটতর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

292. মিশ্র অনুপাত (Compound Ratio)

একাধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে পূর্ব রাশি, এবং উত্তর রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে উত্তর রাশিরূপে লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন হয়, তাহা পূর্বোক্ত অনুপাত-সমূহের 'সমবায়ে' গঠিত হইয়াছে এইরূপ বলা হয়, এবং নূতন অনুপাতটিকে একটি **মিশ্র অনুপাত** বলে।

যেমন, $a : b$ এবং $c : d$ দুইটি অনুপাতের সমবায়ে $a \times c : b \times d$, অর্থাৎ $ac : bd$ মিশ্র অনুপাতটি উৎপন্ন হইয়াছে।

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলি অনুধাবনযোগ্য :

1. দ্বৈত অনুপাত (duplicate ratio). $a : b$ অনুপাতটিকে ইহারই সহিত সমবেত করিলে যে অনুপাতটি পাওয়া যায় তাহাকে, অর্থাৎ $a^2 : b^2$ অনুপাতকে, $a : b$ অনুপাতটির 'দ্বৈত' অনুপাত বলে।

এইরূপ $x^4 : y^4$ অনুপাতটি $x^2 : y^2$ অনুপাতটির দ্বৈত অনুপাত।

2. **ত্রিগুণানুপাত** (triplicate ratio). $a^3 : b^3$ কে $a : b$ এর ত্রিগুণানুপাত বলে।

এইরূপ, 27 : 64 অনুপাতটি 3 : 4 এর ত্রিগুণানুপাত।

3. **অবদ্বৈত অনুপাত** (subduplicate ratio). $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **অবদ্বৈত** অনুপাত **বলে।**

এইরূপ, 2 : 3 কে 4 : 9 এর, $x^2 : y^2$ কে $x^4 : y^4$ এর অবদ্বৈত অনুপাত বলে।

293. সাম্যানুপাত এবং বৈষম্যানুপাত (Ratios of Equality and Inequality)

পূর্ব ও উত্তর রাশি সমান হইলে অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (ratio of equality) এবং অসমান হইলে **বৈষম্যানুপাত** (ratio of inequality) বলে। পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, অনুপাতকে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality) এবং লঘুতর হইলে **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলে।

যথা, 3 : 2 একটি গুরু অনুপাত, 3 : 3 একটি সাম্যানুপাত এবং 3 : 4 একটি লঘু অনুপাত। এইরূপ, $a >, =$ বা $< b$ হইলে, $a : b$ যথাক্রমে গুরু অনুপাত, সাম্যানুপাত অথবা লঘু অনুপাত হইবে।

উল্লিখিত সংজ্ঞা হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হইতেছে যে, গুরু অনুপাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর, লঘু অনুপাত 1 অপেক্ষা লঘুতর এবং সাম্যানুপাত 1 এর সমান।

$a : b$ অনুপাতটির উভয় পদের সহিত একটি ধন রাশি x যোগ করিলে $a+x : b+x$ নূতন অনুপাতটি পাওয়া যায়।

এক্ষণে, $$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x}{b}\cdot\frac{(a-b)}{(b+x)}.$$

$a > b$ হইলে, $a-b$ ধন হয় এবং $a < b$ হইলে, $a-b$ ঋণ হয়।

$\therefore$ যদি $a > b$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ধন হয়; সুতরাং $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+x}{b+x}$, এবং যদি $a < b$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ঋণ হয়; সুতরাং $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x}$.

ইহা হইতে সহজেই নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি পাওয়া যায় :

উপপাদ্য। পূর্ব ও উত্তর রাশিদ্বয়ের উভয়ের সহিত একটি ধন রাশি যোগ করিলে গুরু অনুপাত হ্রাস প্রাপ্ত হয়, কিন্তু লঘু অনুপাত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়।

এইরূপে ইহাও প্রমাণ করা যায় যে, পূর্ব ও উত্তব বাশিদ্বয়ের উভয় পদ হইতে একই ধন রাশি বিয়োগ কবিলে, গুরু অনুপাত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়, কিন্তু লঘু অনুপাত হ্রাস প্রাপ্ত হয়।

যথা, $\frac{7}{3}$ গুরু অনুপাতেব উভয় পদে 4 যোগ করিলে $\frac{11}{7}$ অনুপাতটি উৎপন্ন হয়, ইহা $\frac{7}{3}$ অপেক্ষা লঘুতর। কারণ

$$\tfrac{7}{3} - \tfrac{11}{7} = \tfrac{16}{21}, \text{ একটি ধন বাশি।}$$

$\frac{7}{3}$ এর উভয় পদ হইতে 2 বিযোগ করিলে, $\frac{5}{1}$ অনুপাতটি উৎপন্ন হয়; ইহা $\frac{7}{3}$ অপেক্ষ বৃহত্তর।

এইরূপে, লঘু অনুপাতের দৃষ্টান্তও দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 1. $a : b$ অনুপাতের উভয় পদে কোন্ বাশি যোগ কবিলে, $c : d$ অনুপাতটি উৎপন্ন হইবে ?

মনে কর নির্ণেয় রাশিটি x.

তাহা হইলে, প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{c}{d}$;

বজ্রগুণন কবিয়া, $d(a+x) = c(b+x)$;

সুতরাং, নির্ণেয় বাশি $x = \dfrac{ad-bc}{c-d}$.

উদা. 2. $a : b$ একটি গুরু অনুপাত; প্রমাণ কব যে, $a^2+b^2 : 2ab$ অপেক্ষা $a : b$ বৃহত্তর।

$$\frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{2a^2-a^2-b^2}{2ab}$$
$$= \frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

এক্ষণে, $a : b$ একটি গুরু অনুপাত বলিয়া, $a > b$;

$\therefore$ $a^2 > b^2$ এবং a^2-b^2 একটি ধন রাশি ; সুতরাং $\frac{a}{b} > \frac{a^2+b^2}{2ab}$.

উদা. 3. $x : y$ অনুপাতটি $2x-a : y-2a$ এর দ্বৈত অনুপাত হইলে, প্রমাণ কর যে, $xy=a^2$ অথবা $y=4x$.

প্রশ্নানুসারে, $$\frac{x}{y} = \left(\frac{2x-a}{y-2a}\right)^2 ;$$

$$\therefore \quad x(y-2a)^2 = y(2x-a)^2,$$

অথবা, $$xy^2-4axy+4a^2x = 4x^2y-4axy+a^2y,$$

বা, $xy^2-a^2y-4x^2y+4a^2x=0$, অর্থাৎ $(y-4x)(xy-a^2)=0$,

$\therefore$ $y-4x=0$, অথবা $xy-a^2=0$;

সুতরাং, $y=4x$ অথবা $xy=a^2$.

294. অনুপাতের আসন্ন মান (Approximate Value)

a র তুলনায় x এর মান অতি ক্ষুদ্র হইলে, $x : a$ অনুপাতটির মানও ক্ষুদ্র হইবে। পুনরায়, $x : a$ র সহিত ইহার দ্বৈত অনুপাত (duplicate ratio) $x^2 : a^2$ এর অনুপাত $x : a$ অনুপাতের সমান।

$\therefore$ $\frac{x}{a}$ র তুলনায় $\frac{x^2}{a^2}$ এর মান অতি ক্ষুদ্র হইবে। এইরূপ $\frac{x^2}{a^2}$ এর তুলনায় $\frac{x^3}{a^3}$ এর মান অতি ক্ষুদ্র হইবে, $\frac{x^3}{a^3}$ এর তুলনায় $\frac{x^4}{a^4}$ এর মান অতি ক্ষুদ্র হইবে ইত্যাদি। সুতরাং, a র তুলনায় x রাশিটি অতি ক্ষুদ্র হইলে, $\frac{x}{a}, \frac{x^2}{a^2}, \frac{x^3}{a^3}$ প্রভৃতি রাশিসমূহের প্রত্যেকটির মানই ক্রমশ ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেকটির ক্ষুদ্রতার পরিমাণও একরূপ নহে; প্রত্যেকটি রাশি উহার

অব্যবহিত পূর্ববর্তী রাশির তুলনায় ক্ষুদ্রতর ; ক্ষুদ্রতার এই প্রকার বৈষম্য ব্যক্ত করিবার জন্য প্রথম রাশি, অর্থাৎ $\frac{x}{a}$ কে 'প্রথম শ্রেণীর ক্ষুদ্র রাশি' (a small quantity of the first order) রূপে গণ্য করিলে, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি রাশিগুলি যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি শ্রেণীর ক্ষুদ্র রাশিরূপে পরিগণিত হইবে।

মন্তব্য। অনুপাতের আসন্ন মান-নির্ণয়-কালে, উচ্চতর শ্রেণীর ক্ষুদ্ররাশি-সমূহ পরিত্যক্ত হয়।

উদা. a র তুলনায় x একটি ক্ষুদ্ররাশি হইলে, প্রমাণ কর যে, $(a+x)^2 :$ a^2 এর আসন্ন মান $a+2x : a$ হইবে।

$$\frac{(a+x)^2}{a^2}=\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2}=1+2\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}.$$

যেহেতু $\frac{x}{a}$ অপেক্ষা $\frac{x^2}{a^2}$ একটি উচ্চতর শ্রেণীর ক্ষুদ্ররাশি, সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}$ কে বর্জন করিয়া অনুপাতটির আসন্ন মান $=1+\frac{2x}{a}=\frac{a+2x}{a}$.

এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, $(a+x)^3 : a^3$ এর আসন্ন মান $a+3x : a$.

295. সমমাত্র সমীকরণ (Homogeneous Equation)

x এবং y রাশিদ্বয় যে-কোন ঘাতের সমমাত্র সমীকরণ-দ্বারা যুক্ত হইলে একটি সমীকরণের সমাধান-দ্বারাই $x : y$ অনুপাতটির মান নির্ণয় করা যায়।

যেমন, $ax+by=0$ সমীকরণের উভয় পক্ষ y দ্বারা ভাগ করিয়া, $a\frac{x}{y}+b=0$; এখন $\frac{x}{y}=z$ ধরিলে $az+b=0$ সমীকরণটি পাওয়া যায়।

অতএব, $z=\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}$.

পুনরায়, x, y এবং z-ঘটিত $a_1x+b_1y+c_1z=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ এইরূপ দুইটি সমীকরণ সম্পূর্ণরূপে সমাধান করা যায় না ; কিন্তু

এই দুই সমীকরণ হইতে উক্ত রাশিত্রয়ের যে-কোন দুইটির অনুপাত নির্ণয় করা যাইতে পারে। সমীকরণদ্বয়ের উভয় পক্ষ z দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0,$$

এবং
$$a_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0;$$

এক্ষণে, $\frac{x}{z}$ এবং $\frac{y}{z}$ কে অজ্ঞাত রাশি মনে করিয়া শেষোক্ত সমীকরণদ্বয় সমাধান করিলে দেখা যাইবে যে,

$$\frac{x}{z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে, বজ্রগুণন প্রক্রিয়া-দ্বারাও উক্ত ফল পাওয়া যায়। বজ্রগুণন করিয়া,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1};$$

$$\therefore \quad x:y:z=b_1c_2-b_2c_1:c_1a_2-c_2a_1:a_1b_2-a_2b_1.$$

উদা. 1. যদি $3x+4y:4x+3y=17:18$ হয়, তাহা হইলে $x:y$ অনুপাতটি নির্ণয় কর।

$$\frac{3x+4y}{4x+3y}=\frac{17}{18}, \text{ বা } 18(3x+4y)=17(4x+3y);$$

অতএব, $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, অর্থাৎ $x:y=3:2$.

উদা. 2. $x:y=3:4$ হইলে $\frac{5x-2y}{2x-5y}$ এর মান কত?

$$\frac{5x-2y}{2x-5y}=\frac{5\left(\frac{x}{y}\right)-2}{2\left(\frac{x}{y}\right)-5}$$ [লব এবং হরকে y দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{5\times\frac{3}{4}-2}{2\times\frac{3}{4}-5}=\frac{15-8}{6-20}=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 104

1. কোন্‌টি বৃহত্তর ?

(i) $2:3$ বা $3:4$; (ii) $7:8$ বা $5:6$; (iii) $13:22$ বা $32:35$; (iv) $11:19$ বা $9:14$.

2. নিম্নলিখিত অনুপাতসমূহের সমবায়ে গঠিত অনুপাতটি নির্ণয় কর :

(i) $a:b$; $b:c$; (ii) $2:5$; $6:11$ এবং $16:25$; (iii) $a:x$; $x:y$; $y:b$; (iv) $a:b$ এবং $b:a$ এর দ্বৈত অনুপাত;

(v) $a+x:a-x$; $a^2+x^2:(a+x)^2$ এবং $(a^2-x^2)^2:(a^4-x^4)$.

3. $a+x:b+x$ অনুপাতটি $a:b$ এর দ্বৈত অনুপাত হইলে x এর মান কত ?

4. $(x^2+3x+2):(x^2+5x+4)$ এবং $(x^2+7x+12):(x^2+7x+10)$ এই দুই অনুপাতের সমবায়ে গঠিত অনুপাতটি নির্ণয় কর।

5. $a^2-1:a^2-4$ এই অনুপাতটির সহিত কোন্ অনুপাতের সমবায়ে $a+1:a+2$ এর দ্বৈত অনুপাত উৎপন্ন হইবে ?

6. প্রমাণ কর যে, $2xy:x^2+y^2$ এই অনুপাতটি একটি গুরু অনুপাত হইতে পারে না।

7. x এবং y দুইটি ধন রাশি হইলে $x^3+y^3:x^2+y^2$ এবং $x^2+y^2:x+y$ অনুপাত দুইটির তুলনা কর।

8. যদি $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$.

9. কোন অনুপাতের উভয় পদে 2 যোগ করিলে, নূতন অনুপাতটি $\frac{6}{7}$ এর সমান হয়, এবং উভয় পদ হইতে 3 বিয়োগ করিলে নূতন অনুপাতটি $\frac{1}{2}$ এর সমান হয়। অনুপাতটি নির্ণয় কর।

10. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $2:3$ এবং উহাদের বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা 18 অধিক। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

11. $5:12$ অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে নূতন অনুপাতটি $2:3$ এর সমান হয় ?

12. $3:8$ অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ ধন সংখ্যা যোগ করিলে নূতন অনুপাতটি $\frac{1}{2}$ হইবে ?

13. যদি $x+7:2(x+14)$ অনুপাতটি $5:8$ এর দ্বৈত অনুপাত হয়, তাহা হইলে x এর মান কত ?

14. যদি $a-x:b-x$ অনুপাতটি $a:b$ এর দ্বৈত অনুপাত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

15. $x:y$ একটি গুরু অনুপাত হইলে $x+y:x-y$ অনুপাতটি $x^2+y^2:x^2-y^2$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; কিন্তু উহা একটি লঘু অনুপাত হইলে $x+y:x-y$ অনুপাতটি $x^2+y^2:x^2-y^2$ অপেক্ষা লঘুতর হইবে।

16. যদি a, b এবং x তিনটি ধন রাশি হয়, এবং $a:b$ একটি লঘু অনুপাত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কব যে, $a+x:b+x$ অনুপাতটি $a:b$ অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর।

17. যদি $a:b$ অনুপাতকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিলে $x:y$ হয় এবং $b>a$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+1}{y+1}>\frac{a+1}{b+1}.$$

18. যদি $a:b$ অনুপাতটি $a+x:b+x$ এর ত্রিগুণানুপাত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^3-3abx-ab(a+b)=0.$$

19. a, b, c এবং d চারটি ধন রাশি হইলে, প্রমাণ কর যে, $a+c:b+d$ অনুপাতটির মান $a:b$ এবং $c:d$ এর মানদ্বয়ের অন্তর্বর্তী হইবে।

296. সমানুপাত (Proportion)

চারটি রাশির মধ্যে প্রথম এবং দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় এবং চতুর্থের অনুপাতের সমান হইলে, রাশি চারটিকে **সমানুপাতী** (proportional) বলা হয় এবং উহাদের দ্বারা একটি **সমানুপাত** উৎপন্ন হয়।

যেমন, $a:b=c:d$ হইলে, a, b, c এবং d কে 'সমানুপাতী' বলা হয়। $a:b=c:d$ সমানুপাতটিকে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, অথবা '$a:b::c:d$' রূপেও লেখা যাইতে পারে। ইহাকে, "a অনুপাত b সমিত c অনুপাত d" এইরূপে পড়িতে হয়।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ পদকে **প্রান্তীয়** (extremes) রাশি এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদকে **মধ্যক** বা **সমক** (means) রাশি বলে। উক্ত সমানুপাতে, a ও d প্রান্তীয় রাশি এবং b ও c মধ্যক রাশি। d কে a, b এবং c এর **চতুর্থ সমানুপাতীও** (fourth proportional) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 1. অনুপাতের রাশিগুলি একজাতীয় হওয়া আবশ্যক, কিন্তু সমানুপাতের রাশিগুলি একজাতীয় না হইলেও চলে। ইহার প্রথম দুইটি এক-জাতীয় এবং শেষ দুইটি একজাতীয় হওয়া আবশ্যক; শেষ দুইটি প্রথম দুইটি হইতে ভিন্নজাতীয়ও হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য 2. $x:a::y:b::z:c$ কে $x:y:z=a:b:c$ এইরূপেও লেখা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য 3. দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে, প্রথম অনুপাতের রাশি-দ্বয়কে শেষের অনুপাতের রাশিদ্বয়ের **সমানুপাতী** বলা হয় এবং দুইটি রাশির অনুপাত অন্য দুইটি রাশির ব্যস্ত অনুপাতের সমান হইলে, প্রথমোক্ত রাশি-দ্বয়কে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের **ব্যস্ত সমানুপাতী** (inversely proportional) বলা হয়।

297. ক্রমিক সমানুপাত (Continued Proportion)

তিন বা তদধিক রাশির মধ্যে (প্রথম রাশি) : (দ্বিতীয় রাশি), (দ্বিতীয় রাশি) : (তৃতীয় রাশি), (তৃতীয় রাশি) : (চতুর্থ রাশি) প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর

সমান হইলে, ঐ রাশিগুলি-দ্বারা একটি **ক্রমিক সমানুপাত** উৎপন্ন হয় এবং রাশিগুলি **ক্রমিক সমানুপাতী** এইরূপ বলা হয়।

যেমন, $a : b = b : c = c : d = d : e$ হইলে, a, b, c, d এবং e রাশিগুলি 'ক্রমিক সমানুপাতী'।

তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয়ের **মধ্যক সমানুপাতী** (mean proportional) বলা হয় এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম দুই রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (third proportional) বলা হয়। যেমন, $a : b = b : c$ হইলে b, a ও c এর মধ্যক সমানুপাতী এবং c, a ও b এর 'তৃতীয় সমানুপাতী'।

দ্রষ্টব্য। ক্রমিক সমানুপাতী রাশিসমূহ একজাতীয় হওয়া আবশ্যক।

298. সমানুপাত-সম্বন্ধীয় কতিপয় সিদ্ধান্ত

1. সমানুপাতের প্রান্তীয় (extremes) রাশিদ্বয়ের গুণফল, মধ্যক (means) রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান, অর্থাৎ যদি $a : b :: c : d$ একটি সমানুপাত হয়, তাহা হইলে $ad = bc$.

$$a : b :: c : d, \text{ অর্থাৎ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে, $ad = bc$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a : b :: b : c$ হইলে $ac = b^2$, অর্থাৎ যদি তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল, দ্বিতীয়ের বর্গের সমান।

দ্রষ্টব্য। উক্ত সিদ্ধান্তের বিপরীতটিও সত্য, অর্থাৎ $ad = bc$ হইলে $a : b :: c : d$. অতএব সমানুপাতের তিনটি পদ প্রদত্ত হইলে চতুর্থটি নির্ণয় করা যায়।

2. চারটি রাশি সমানুপাতী হইলে, রাশিগুলির প্রথম ও তৃতীয় এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ-দ্বারা যে অনুপাত উৎপন্ন হয় তাহারা সমান, অর্থাৎ $a : b :: c : d$ হইলে $a : c :: b : d$.

$$\text{যে হেতু} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

অতএব, উভয় পক্ষ $\frac{b}{c}$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}, \text{ বা } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \text{ অর্থাৎ } a:c::b:d.$$

প্রক্রিয়াটিকে **একান্তর-ক্রিয়া** (alternando) বলে।

3. সমানুপাতের রাশিগুলির স্থান বিপর্যস্ত করিলে, বিপর্যস্ত রাশিগুলিও সমানুপাতী হয়, অর্থাৎ $a:b::c:d$ হইলে, $b:a::d:c$.

যে হেতু, $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\therefore \quad 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}, \text{ বা } \frac{b}{a}=\frac{d}{c}, \text{ অর্থাৎ } b:a::d:c.$$

প্রক্রিয়াটিকে **ব্যস্ত-প্রক্রিয়া** (invertendo) বলে।

4. চারটি রাশি সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয়টির সহিত প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টির যে অনুপাত, চতুর্থটির সহিত তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টিরও সেই অনুপাত, অর্থাৎ $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:b::c+d:d$.

যে হেতু, $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\therefore \quad 1+\frac{a}{b}=1+\frac{c}{d}, \text{ বা } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \text{ অর্থাৎ}$$

$a+b:b::c+d:d$ প্রক্রিয়াটিকে **যোগ-ক্রিয়া** (componendo) বলে।

5. চারটি রাশি সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয়টির সহিত প্রথম এবং দ্বিতীয়ের অন্তরের যে অনুপাত, চতুর্থটির সহিত তৃতীয় ও চতুর্থের অন্তরেরও সেই অনুপাত, অর্থাৎ $a:b::c:d$ হইলে, $a-b:b::c-d:d$.

যে হেতু, $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1, \text{ বা } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}, \text{ অর্থাৎ}$$

$a-b:b::c-d:d$. প্রক্রিয়াটিকে **ভাগ-ক্রিয়া** (dividendo) বলে।

6. চারটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরেব সহিত ইহাদের সমষ্টির যে অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অন্তরের সহিত ইহাদের

সমষ্টিরও সেই অনুপাত, অর্থাৎ $a:b::c:d$ হইলে,

$a+b:a-b::c+d:c-d.$

(4) হইতে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, এবং (5) হইতে $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

ভাগ করিয়া, $a+b:a-b::c+d:c-d.$

প্রক্রিয়াটিকে **যোগ ও ভাগ-ক্রিয়া** (componendo and dividendo) বলে।

উদা. 1. 9, 15 এবং 24 এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় সমানুপাতীটি x;

তাহা হইলে, $9:15=24:x$; অতএব, $15:9=x:24$;

$$\therefore \quad x=\frac{15\times 24}{9}=40.$$

উদা. 2. 17 এবং 68 এর মধ্যক সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় সমানুপাতীটি x;

তাহা হইলে, $17:x=x:68$, অথবা $x^2=17\times 68=17^2\times 2^2$;

$$\therefore \quad x=\sqrt{17^2\times 2^2}=34.$$

উদা. 3. 3, 5, 7 এবং 10 এই সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটির সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে নূতন সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হইবে?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x; তাহা হইলে, $\frac{3+x}{5+x}=\frac{7+x}{10+x}$;

$\therefore \quad (3+x)(10+x)=(5+x)(7+x),$

বা, $30+13x+x^2=35+12x+x^2$; $\quad \therefore \quad x=5.$

উদা. 4. যদি $\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

বজ্রগুণন এবং সরলীকরণ-দ্বারা

$$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=0,$$

বা, $(ad-bc)^2=0$; অতএব, $ad=bc$, অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

299. ক্রমিক সমানুপাতী রাশি (Quantities in Continued Proportion)

তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রথম এবং তৃতীয়ের অনুপাত, প্রথম এবং দ্বিতীয়ের দ্বৈত অনুপাতের সমান হইবে, অর্থাৎ

$a:b=b:c$ হইলে, $a:c=a^2:b^2$.

এ স্থলে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $\therefore\ \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$;

বা, $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$, অর্থাৎ $a:c=a^2:b^2$.

যদি $a:b::b:c::c:d$ হয়, তাহা হইলে $a:d=a^3:b^3$.

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; $\therefore\ \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$,

অর্থাৎ, $a:d=a^3:b^3$.

উদা. 1. যদি a, b ও c রাশিত্রয় ক্রমিক সমানুপাতী হয় এবং $a(b-c)=2b$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a-c=\frac{2(a+b)}{a}$.

এ স্থলে, $a:b=b:c$, $\therefore\ ac=b^2$;

কিন্তু $ab-ac=2b$ বা, $ab-b^2=2b$; $\therefore\ a-b=2$;

$a+b$ দ্বারা গুণ করিয়া, $(a-b)(a+b)=2(a+b)$,

বা, $a^2-b^2=2(a+b)$, অর্থাৎ $a^2-ac=2(a+b)$;

$\therefore$ a দ্বারা ভাগ করিয়া, $a-c=\frac{2(a+b)}{a}$.

উদা. 2. a, b, c ও d রাশিগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে, $b+c$ রাশিটি $a+b$ এবং $c+d$ রাশিদ্বয়ের মধ্যক সমানুপাতী (mean proportional) হইবে।

এ স্থলে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, এবং ইহাদের প্রত্যেকটি $=\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+d}$.

প্রশ্নমালা 105

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(i) 12, 18; (ii) 21, 42; (iii) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ এবং $\frac{x}{y}$.

2. নিম্নলিখিত সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যক সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(i) 4, 9; (ii) 3, 48; (iii) 6, 54; (iv) 18, 50.

3. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(i) 14, 24, 35; (ii) 18, 24, 45; (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$.

4. $x, 2x-y, x-2y$ এবং y রাশিগুলি সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে, $x-y$ রাশিটি x এবং y এর মধ্যক সমানুপাতী।

5. যদি $a:b=b:c=c:d$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

6. প্রমাণ কর যে, y রাশিটি z এবং x রাশিদ্বয়ের মধ্যক সমানুপাতী হইলে, $xy+yx$ রাশিটি x^2+y^2 এবং y^2+z^2 রাশিদ্বয়ের মধ্যক সমানুপাতী হইবে।

7. প্রমাণ কর যে, এমন কোনও সংখ্যা নাই যাহা চারটি সমানুপাতী রাশির প্রত্যেকটির সহিত যোগ করিলে প্রাপ্ত রাশিগুলিও সমানুপাতী হয়।

8. প্রমাণ কর যে, (x^2+3x+2), $5(x+2)$ এবং $3(x+1)$ এর চতুর্থ সমানুপাতী রাশিটিতে x-যুক্ত কোনও পদ নাই।

9. a, b, c রাশিগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2-a^2}+\frac{1}{b^2-c^2}.$$

10. যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $ab+cd$ রাশিটি a^2+c^2 এবং b^2+d^2 এর মধ্যক সমানুপাতী হইবে।

11. যদি x এবং y দুইটি অসমান রাশি হয় এবং ইহাদের অনুপাত $x+z$ এবং $y+z$ এর দ্বৈত অনুপাতের সমান হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, z রাশিটি x এবং y এর মধ্যক সমানুপাতী হইবে।

300. গৌণসমানুপাত (Derived Proportion)

একটি প্রদত্ত সমানুপাত হইতে অন্য একটি সমানুপাত কিরূপে উৎপন্ন হইতে পারে তাহাই এখন প্রদর্শিত হইবে। বিশেষ বিশেষ প্রণালী-সাহায্যে এই জাতীয় প্রশ্নসমাধানের সুবিধা হইলেও নিম্নের প্রক্রিয়াটি ঐ জাতীয় সর্বক্ষেত্রেই প্রযোজ্য ; ইহার প্রয়োগ-বিধি সযত্নে শিক্ষণীয়।

উদা. 1. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$la + mb : pa + qb = lc + md : pc + qd.$$

মনে কর, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, তাহা হইলে $a = bk$ এবং $c = dk$.

$$\therefore \quad \frac{la+mb}{pa+qb} = \frac{lkb+mb}{pkb+qb} = \frac{(lk+m)b}{(pk+q)b} = \frac{lk+m}{pk+q},$$

এবং
$$\frac{lc+md}{pc+qd} = \frac{ldk+md}{pdk+qd} = \frac{(lk+m)d}{(pk+q)d} = \frac{lk+m}{pk+q};$$

$$\therefore \quad \frac{la+mb}{pa+qb} = \frac{lc+md}{pc+qd};$$

কারণ ইহাদের প্রত্যেকটি $\frac{lk+m}{pk+q}$ এর সমান।

উদা. 2. l, m এবং n যে-কোন রাশি হউক না কেন, যদি $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি

$$= \frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}.$$

মনে কর, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$; $\quad \therefore \; a = bk, \;\; c = dk$ এবং $e = fk$,

$$\therefore \quad la + mc + ne = lbk + mdk + nfk$$
$$= k(lb + md + nf),$$

$$\therefore \quad \frac{la+mc+ne}{lb+md+nf} = \frac{k(lb+md+nf)}{(lb+md+nf)} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

301. বিপরীত উপপাদ্য (Converse Theorem)

যদি $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, a, b, c, d রাশিগুলি সমানুপাতী হইবে।

এ স্থলে, $$\frac{a+b+c+d}{a-b+c-d}=\frac{a+b-c-d}{a-b-c+d},$$

$\therefore$ যোগ ও ভাগ-ক্রিয়া-দ্বারা

$$\frac{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)}{(a+b+c+d)-(a-b+c-d)}=\frac{(a+b-c-d)+(a-b-c+d)}{(a+b-c-d)-(a-b-c+d)},$$

অর্থাৎ $$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}, \quad \text{বা, } \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d},$$

$$\therefore \frac{(a+c)+(a-c)}{(a+c)-(a-c)}=\frac{(b+d)+(b-d)}{(b+d)-(b-d)}, \text{ অর্থাৎ } \frac{a}{c}=\frac{b}{d};$$

অতএব, $a : b :: c : d$, অর্থাৎ a, b, c, d রাশিগুলি সমানুপাতী।

উদা. যদি $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$ $=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, bc, ad, ps এবং qr রাশিগুলি সমানুপাতী।

বাম পক্ষ $=(pa+sd)^2-(qb+rc)^2$;

দক্ষিণ পক্ষ $=(pa-sd)^2-(qb-rc)^2$;

$\therefore \quad (pa+sd)^2-(qb+rc)^2=(pa-sd)^2-(qb-rc)^2,$

বা, $\quad (pa+sd)^2-(pa-sd)^2=(qb+rc)^2-(qb-rc)^2$;

অতএব, $psad=qrbc$, অর্থাৎ $bc : ad :: ps : qr$.

প্রশ্নমালা 106

যদি $a : b=c : d$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

1. $a \pm b : a=c \pm d : c$. 2. $ma-nb : a+b=mc-nd : c+d$.
3. $ab+cd : ab-cd=a^2+c^2 : a^2-c^2$.
4. $ac : bd=a^2+c^2 : b^2+d^2$.
5. $a : (a+c)=(a+b) : (a+b+c+d)$.

6. $ma-nb : ma+nb = mc-nd : mc+nd.$

7. $ma+nb : mc+nd = b^2c : d^2a.$

8. $(a+c)^2 : (b+d)^2 = a^2-ac+c^2 : b^2-bd+d^2.$

9. $(a^2+b^2) : (a^2-b^2) = (c^2+d^2) : (c^2-d^2) = ac+bd : ac-bd.$

10. $a^2b-3ac^2 : b^3-3ad^2 = a^2+5c^2 : b^2+5d^2.$

11. $pa^2+qc^2 : pb^2+qd^2 = ma^2-nc^2 : mb^2-nd^2.$

12. $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 = c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2.$

13. $pa^3+qc^3 : pb^3+qd^3 = a^2c : b^2d.$

14. $a^4+b^4 : a^4-b^4 = a^2c^2+b^2d^2 : a^2c^2-b^2d^2.$

15. যদি $a(a+2b) : b^2 = c(c+2d) : d^2$ হয়, তাহা হইলে

$$(a+b)^2 : (c+d)^2 = b^2 : d^2.$$

16. যদি $(a+b-c+d) : (a-b+c+d) = (b+c+a+d) :$ $(b-c-a+d)$ হয়, তাহা হইলে $a+d : b-c = b+d : c+a.$

17. যদি $x^2+y^2 : ax+by = ax+by : a^2+b^2$ হয়, তাহা হইলে

$$x : y = a : b.$$

18. যদি $a : b = b : c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2 = a : c.$$

19. যদি a, b, c, d, e ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a : e = a^4 : b^4.$$

20. যদি $3a+4b : 5a+6b = 3c+4d : 5c+6d$ হয়, তাহা হইলে

$$a : b :: c : d.$$

21. যদি $a+b : b+c = c+d : d+a$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a = c, \text{ অথবা } a+b+c+d = 0.$$

22. যদি $a : b :: c : d :: e : f$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a-e : b-f = c : d.$$

23. যদি $a : b :: c : d$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a+b)(c+d) = \frac{b}{d}(c+d)^2 = \frac{d}{b}(a+b)^2.$$

24. যদি $a : b = x : y$ হয়, তাহা হইলে,

$$ab : xy = a^2+b^2 : x^2+y^2.$$

25. যদি $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d).$$

26. যদি $a : b :: c : d$, হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{a^2}{b} : \frac{c^2}{d}$ অনুপাতটি $\frac{a}{b^2} : \frac{c}{d^2}$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত।

302. অনুপাতসমূহের লৈখিক চিত্র

নিম্নলিখিত উপায়ে অনুপাতসমূহ লৈখিক চিত্র-দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

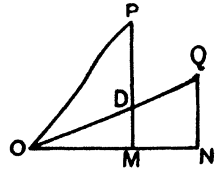
একটি নির্দিষ্ট একক অনুসারে b দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি ভুজ OM এবং M বিন্দু হইতে a দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট কোটি MP অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, $\frac{MP}{OM}$ এর দ্বারা $\frac{a}{b}$ অনুপাতটি লৈখিক চিত্রে প্রকাশিত হইল।

MOP কোণটির পরিমাণ জানিতে পারিলেই এই অনুপাতটি অন্য একটি অনুরূপ অনুপাত অপেক্ষা বড় কিংবা ছোট তাহা নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, $\frac{c}{d}$ অনুপাতটি $\frac{NQ}{ON}$ দ্বারা সূচিত হইল। যদি OQ রেখাটি MP কে D বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে NOQ এবং MOD দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{MD}{OM} = \frac{QN}{ON} = \frac{c}{d}.$$

কিন্তু $$\frac{MP}{OM} = \frac{a}{b}.$$

অতএব, $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ অনুপাতদ্বয় MP এবং MD এর দৈর্ঘ্য-দ্বারা তুলনা করা যায়।

303. সমানুপাত-সম্বন্ধীয় একটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

$p, q, r, \cdots, n$ ধন কিংবা ঋণ, ভগ্ন কিংবা পূর্ণ যে-কোন রাশি হউক না কেন, যদি $a : b = c : d = e : f = \cdots$ হয়, এবং উক্ত অনুপাতসমূহের সংখ্যা m হয়, তাহা হইলে এই অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি

$$=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{ace\cdots}{bdf\cdots}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

মনে কর, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\cdots=k.$

তাহা হইলে, $a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk$ ইত্যাদি $\quad\cdots$ (1)

$\therefore\quad pa^n=pb^nk^n,\quad qc^n=qd^nk^n,\quad re^n=rf^nk^n$ ইত্যাদি।

যোগ করিয়া, $pa^n+qc^n+re^n+\cdots=(pb^n+qd^n+rf^n+\cdots)k^n$;

$$\therefore\quad \frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=k^n.$$

উভয় পক্ষের n-তম মূল গ্রহণ করিয়া,

$$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত}=k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}\qquad\cdots\ (2)$$

পুনরায়, (1) এর অন্তর্গত m-সংখ্যক সমীকরণগুলি পরস্পর গুণ করিয়া,

$$ace\cdots=(bdf\cdots)k^m\ ;$$

$$\therefore\quad k^m=\frac{ace\cdots}{bdf\cdots}\ ;$$

উভয় পক্ষের m-তম মূল গ্রহণ করিয়া,

$$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত}=k=\left(\frac{ace\cdots}{bdf\cdots}\right)^{\frac{1}{m}}\qquad\cdots\ (3)$$

দ্রষ্টব্য। $x^{\frac{1}{m}}$ এর অর্থ $\sqrt[m]{x}$, অর্থাৎ x এর m-তম মূল (অনু. 312).

304. অনুসিদ্ধান্ত

$p, q, r, \cdots n$ এবং m বিশেষ মানবিশিষ্ট হইলে, নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায়।

1. $n=1$ লিখিলে, প্রত্যেক অনুপাত $=\dfrac{pa+qc+re+\cdots}{pb+qd+rf+\cdots}$,

2. $p=q=r=\quad\cdots\quad=n=1$ লিখিলে,

$$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত} = \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি উহাদের পূর্ববাশিসমূহের সমষ্টি এবং উত্তররাশিসমূহের সমষ্টিব অনুপাতের সমান।

3. $m=2, 3$ ইত্যাদি লিখিলে,

$$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত} = \left(\frac{ac}{bd}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{ace}{bdf}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{ ইত্যাদি।}$$

4. $$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c-e}{d-f} = \frac{a-e}{b-f} = \cdots$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহেব প্রত্যেকটি যে-কোন দুইটি অনুপাতের পূর্বরাশিদ্বয়ের অন্তব এবং উত্তররাশিদ্বয়েব অন্তরের অনুপাতের সমান।

এই সিদ্ধান্তগুলি প্রমাণ কবিতে হইলে, উপপাদ্যটির সাহায্য গ্রহণ না করিয়া, সোজাসুজিভাবে প্রমাণ করাই যুক্তিযুক্ত।

উদা. 1. যদি $a:b=c:d=e:f$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2 = \frac{ac+ce}{bd+df}.$$

মনে কর, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, তাহা হইলে $a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk$;

$$\therefore\quad \left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2 = \left(\frac{bk+2dk+3fk}{b+2d+3f}\right)^2 = k^2,$$

$$\text{এবং}\quad \frac{ac+ce}{bd+df} = \frac{bdk^2+dfk^2}{bd+df} = k^2.$$

অতএব $\left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2 = \frac{ac+ce}{bd+df}$, কারণ ইহাদের প্রত্যেকটি k^2 এর সমান।

উদা. 2. যদি $x:a=y:b=z:c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(i)\quad \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{xyz}{abc}\ ;\quad (ii)\quad \frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3} = 3\,\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}.$$

মনে কর, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$; তাহা হইলে $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$.

$$\therefore \quad (i)\ \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{a^3k^3+b^3k^3+c^3k^3}{a^3+b^3+c^3}=k^3=\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}=\frac{xyz}{abc}.$$

পুনরায়, (ii) $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{(x+y+z)}{(a+b+c)}=k\,;$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3k^3 = 3.\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}.$$

উদা 3. যদি $x:(b+c)=y:(c+a)=z:(a+b)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a:(y+z-x)=b:(z+x-y)=c:(x+y-z).$$

এ স্থলে, $$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=\frac{x+y+z}{2(a+b+c)},$$

$$\therefore \text{ প্রত্যেকটি}=\frac{(x+y+z)-2x}{2(a+b+c)-2(b+c)}=\frac{(x+y+z)-2y}{2(a+b+c)-2(c+a)}$$

$$=\frac{(x+y+z)-2z}{2(a+b+c)-2(a+b)},$$

অথবা, $$\frac{y+z-x}{2a}=\frac{z+x-y}{2b}=\frac{x+y-z}{2c}\,;$$

$$\therefore \quad a:(y+z-x)=b:(z+x-y)=c:(x+y-z).$$

305. উপরি উক্ত উপপাদ্যটির সাধারণ রূপ (General Form)

যদি $a:b$, $c:d$, $e:f$ প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকটি অনুপাত $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$, অর্থাৎ $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ এর সমান। এ স্থলে পূর্বপদ a, c, e প্রভৃতির একটি n-তম মানের সমমাত্র রাশিকে A এবং এই রাশিটির a, c, e প্রভৃতির স্থলে যথাক্রমে b, d, f প্রভৃতি লিখিলে যে সমমাত্র রাশিটি পাওয়া যায় তাহাকে B দ্বারা সূচিত করা হইল।

306. অসমান অনুপাত-সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

ধন উত্তরপদবিশিষ্ট $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর অসমান হইলে, $\frac{a+c+e+\cdots\cdots+p}{b+d+f+\cdots\cdots+q}$ ভগ্নাংশটির মান উক্ত অনুপাতসমূহের লঘুতম এবং বৃহত্তমের অন্তর্বর্তী হইবে।

মনে কর, অনুপাতগুলি মানের ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে লিখিত আছে ; অতএব উক্ত অনুপাতসমূহের মধ্যে $\frac{a}{b}$ অনুপাতটি লঘুতম এবং $\frac{p}{q}$ অনুপাতটি বৃহত্তম।

মনে কর, $\frac{a}{b}=k$; তাহা হইলে $a=bk$,

এক্ষণে, $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$, অর্থাৎ $> k$;

$\therefore \quad c > dk$;

এইরূপে, $e > fk$ ইত্যাদি।

উক্ত অসমতাগুলির (inequalities) প্রত্যেক পক্ষ যোগ করিয়া,

$$(a+c+e+\ldots+p) > (b+d+f+\ldots+q)k ;$$

$$\therefore \quad \frac{a+c+e+\ldots+p}{b+d+f+\ldots+q} > k = \text{লঘুতম অনুপাত } \frac{a}{b}.$$

পুনরায়, মনে কর, $\frac{p}{q}=k'$; তাহা হইলে $p=k'q$.

এক্ষণে, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$, অর্থাৎ $>k'$;

$\therefore \quad a < bk'$; এইরূপে, $c < dk'$, $e < fk'$ ইত্যাদি।

যোগ করিয়া, $$(a+c+e+\ldots+p) < (b+d+f+\cdots q)k' ;$$

$$\therefore \frac{a+c+e+\ldots+p}{b+d+f+\cdots+q} < k' = \text{বৃহত্তম অনুপাত } \frac{p}{q}.$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

প্রশ্নমালা 107

যদি $a : b = c : d = e : f$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

1. $\frac{a}{b} = \left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. প্রত্যেকটি অনুপাত $= \left(\frac{pa^3+qc^3+re^3}{pb^3+qd^3+rf^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

3. প্রত্যেকটি অনুপাত $= \left(\frac{a^5-3a^3c^2+2c^2e^3}{b^5-3b^3d^2+2d^2f^3}\right)^{\frac{1}{5}}$.

4. $\frac{a^4+5c^3e+e^4}{b^4+5d^3f+f^4} = \frac{a^2c^2}{b^2d^2}$. 5. $\frac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef} = \frac{ab+cd+ef}{b^2+d^2+f^2}$.

6. $\sqrt{(3a^2+4c^2)} : \sqrt[3]{(5a^3-6c^3)} = \sqrt{(3b^2+4d^2)} : \sqrt[3]{(5b^3-6d^3)}$.

7. যদি $\frac{a}{x+y} = \frac{b}{y+z} = \frac{c}{z-x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a-b+c=0.$$

8. যদি a, b এবং c রাশি তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n} = (a^n+b^n+c^n)(a^n-b^n+c^n).$$

9. যদি $a : b = c : d = e : f$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt[3]{a^2c+c^2e+e^2a} : \sqrt[3]{b^2d+d^2f+f^2b}$$
$$= \sqrt{a^2+c^2+e^2} : \sqrt{b^2+d^2+f^2}.$$

10. যদি $x : y = y : z$ হয়, তাহা হইলে, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিলে কি হইবে?

11. যদি $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{d} = \frac{pa^3+qb^3+rc^3}{pb^3+qc^3+rd^3}.$$

12. যদি a, b, c, d রাশিগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)} = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd}.$$

307. অনুপাত এবং সমানুপাত-ঘটিত প্রশ্নাবলী

উদা. 1. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$; উহাদের প্রত্যেকটির সহিত 4 যোগ করিলে যে সংখ্যা দুইটি পাওয়া যায় তাহাদের অনুপাত $5:6$; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সংখ্যা দুইটির অনুপাত $3:4$, সুতরাং উহাদিগকে $3x$ এবং $4x$ দ্বারা সূচিত করা যায়।

$\therefore$ প্রশ্নের সর্ত অনুসারে, $\dfrac{3x+4}{4x+4}=\dfrac{5}{6}$;

সমীকরণটি সমাধান করিয়া, $x=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 6 এবং 8.

উদা. 2. এব্রাহিম এবং ফতেমার বয়স যথাক্রমে 24 এবং 15 বৎসর ; কম পক্ষে কয়টি বৎসর পরে প্রথমে উহাদের বয়সের অনুপাত $7:5$ অপেক্ষা কম হইবে?

মনে কর x বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত $7:5$ এর সমান হইবে।

$\therefore$ $\dfrac{24+x}{15+x}=\dfrac{7}{5}$; সমাধান করিয়া, $x=7\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $7\frac{1}{2}$ বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত $7:5$ এর সমান হইবে।

কিন্তু x এর মান ক্রমে বর্দ্ধিত হইলে $\dfrac{24+x}{15+x}$ অনুপাতটির মান $\dfrac{24}{15}$, অর্থাৎ $\frac{8}{5}$ হইতে কমিয়া ক্রমে একের দিকে অগ্রসর হইবে। $x=7\frac{1}{2}$ হইলে অনুপাতটির মান হ্রাস প্রাপ্ত হইয়া ঠিক $7:5$ হইবে ; কিন্তু x এর মান $7\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বাড়িতে থাকিলে অনুপাতটীর মান $7:5$ অপেক্ষা কমিতে থাকিবে।

সুতরাং নির্ণেয় বৎসর-সংখ্যা অন্তত 8 বৎসর।

উদা. 3. দুইটি সমান আকারের পাত্র জলমিশ্রিত স্পিরিট-দ্বারা পূর্ণ রহিয়াছে ; প্রথমটিতে স্পিরিট এবং জলের অনুপাত $3:2$ এবং দ্বিতীয়টিতে $4:3$. উভয় পাত্রের মিশ্রণ একত্র করিলে, নূতন মিশ্রণে স্পিরিট এবং জলের অনুপাত কত হইবে?

মনে কর, প্রত্যেক পাত্রে v গ্যালন তরল বস্তু ধরে, তাহা হইলে প্রথম পাত্রে $\frac{3}{5}v$ গ্যালন স্পিরিট এবং $\frac{2}{5}v$ গ্যালন জল আছে। এইরূপ, দ্বিতীয় পাত্রে $\frac{4}{7}v$ গ্যালন স্পিরিট এবং $\frac{3}{7}v$ গ্যালন জল আছে।

উভয় পাত্রের মিশ্রণ একত্র করিলে, নূতন মিশ্রণে $(\frac{3}{5}v+\frac{4}{7}v)$ গ্যালন স্পিরিট এবং $(\frac{2}{5}v+\frac{3}{7}v)$ গ্যালন জল থাকিবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় অনুপাত } = \left(\frac{3v}{5}+\frac{4v}{7}\right) : \left(\frac{2v}{5}+\frac{3v}{7}\right)$$

$$=\frac{(21+20)v}{35} : \frac{(14+15)v}{35}$$

$$=\frac{41v}{35} : \frac{29v}{35} = 41 : 29.$$

প্রশ্নমালা 108

1. কোন্ সংখ্যার সহিত যথাক্রমে 1, 3 এবং 6 যোগ করিলে, প্রাপ্ত রাশিত্রয়-দ্বারা একটি ক্রমিক সমানুপাত উৎপন্ন হইবে ?

2. একই দুই অঙ্কবিশিষ্ট দুইটি সংখ্যার অনুপাত 4 : 7 এবং সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 99. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. 9 : 14 এই অনুপাতটির উভয় পদ হইতে কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে নূতন অনুপাতটি 1 : 2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ?

4. 11000 এবং 7000 লোকের দুইটি সেনাদলের প্রত্যেকটিতে 1000 সৈন্য যোগদান করিল। নূতন সৈন্য যোগদান করাতে কোন্ দল অধিক পুষ্ট হইল ?

5. দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুধ আছে; প্রথমটিতে দুধ এবং জলের অনুপাত 5 : 3 এবং দ্বিতীয়টিতে 8 : 1. উভয় পাত্রের মিশ্রণ কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে দুধ এবং জলের অনুপাত 4 : 1 হইবে ?

6. আয়েশা ও জাহানারা দুই ভগিনীর বর্তমান বয়সের যোগফল 13; 11 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত 4 : 3 হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

7. এক পরিবারস্থ 12 জন লোকের প্রত্যেকের জন্য দৈনিক সমান পরিমাণ চাল প্রয়োজন হয়। কয়েকজন লোক অনুপস্থিত থাকাতে, কোন এক দিন চালের খরচ 4 : 3 অনুপাতে কম হইল। ঐ দিন কত লোক অনুপস্থিত ছিল ?

8. তিনটি স্কুলের ছাত্রসংখ্যা 150, 200 এবং 250. দুর্ভিক্ষ ও প্লাবনের জন্য প্রত্যেক স্কুলের ছাত্রসংখ্যা 50 জন করিয়া কমিয়া গেলে, কোন্ স্কুলটি সর্বাপেক্ষা অধিক ক্ষতিগ্রস্ত হইল ?

9. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার বাম পার্শ্বের সংখ্যাটি দক্ষিণ পার্শ্বের সংখ্যাটির দ্বিগুণ, অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, 60 এর সহিত তাহার অনুপাত 4 : 5. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

10. তিনটি সংখ্যার অনুপাত 2 : 3 : 5 এবং উহাদের ঘনসমূহের সমষ্টি 4320. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

11. দুই ব্যক্তির বয়সের অনুপাত 3 : 4, 18 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 6 : 7 হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

12. পরীক্ষোত্তীর্ণের সংখ্যা পরীক্ষায় অনুত্তীর্ণের সংখ্যার তিন গুণ; যদি পরীক্ষার্থিগণের সংখ্যা 16 জন কম হইত এবং অনুত্তীর্ণের সংখ্যা 6 জন অধিক হইত, তাহা হইলে উত্তীর্ণ এবং অনুত্তীর্ণের সংখ্যার অনুপাত 2 : 1 হইত। পরীক্ষার্থিগণের সংখ্যা নির্ণয় কর।

13. কোন পরীক্ষায় একজন পরীক্ষার্থী 5 টি আবশ্যিক বিষয় এবং 2 টি ঐচ্ছিক বিষয় গ্রহণ করিল। প্রত্যেক বিষয়ের পূর্ণ সংখ্যা সমান। পরীক্ষার্থীটি সকল বিষয়ে একই নম্বর পাইয়া 45 নম্বরের জন্য অকৃতকার্য্য হইল। দ্বিতীয় বারে সে পূর্বাপেক্ষা 36 : 25 অনুপাতে অধিক নম্বর পাইল এবং একটি ঐচ্ছিক বিষয়ের পরীক্ষা না দিয়াও পাসের নম্বর অপেক্ষা 37 নম্বর অধিক পাইল। পাসের নম্বর কত ?

308. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. যদি $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$ax+by+cz=0.$$

মনে কর, $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k$;

$\therefore \quad x=k(b-c), \quad y=k(c-a), \quad z=k(a-b),$

$\therefore \quad ax+by+cz=k\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=k\times 0=0.$

উদা. 2. যদি $x=cy+bz$, $y=az+cx$ এবং $z=bx+ay$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

এ স্থলে $x=cy+bz$ ··· (1)

$y=az+cx$ ··· (2)

$z=bx+ay$ ··· (3)

(3) হইতে z এর মান (1) এ লিখিয়া,

$$x=cy+b(bx+ay)=y(c+ab)+b^2x,$$

বা, $x(1-b^2)=y(c+ab)$; $\therefore \frac{x}{y}=\frac{c+ab}{1-b^2}$ ··· (4)

এইরূপে (3) এবং (2) হইতে, $\frac{x}{y}=\frac{1-a^2}{c+ab}$ ··· (5)

(4) এবং (5) গুণ করিয়া, $\frac{x^2}{y^2}=\frac{1-a^2}{1-b^2}$, বা $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}$.

এইরূপে, (2) হইতে y এর মান (1) এ লিখিয়া, প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{z^2}{1-c^2};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

উদা. 3. $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

প্রদত্ত অনুপাতত্রয়ের প্রথমটির লব এবং হরকে c দ্বারা, দ্বিতীয়টির লব এবং হরকে b দ্বারা এবং তৃতীয়টির লব এবং হরকে a দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}$$

$$=\frac{\text{লবগুলির সমষ্টি}}{\text{হরগুলির সমষ্টি}}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$\therefore \quad acy-bcx=0$, অতএব, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

এবং $bcx-abz=0$, অতএব, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$;

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

উদা. 4. যদি $\dfrac{bx-ay}{cy-az}=\dfrac{cx-az}{by-ax}=\dfrac{z+y}{x+z}$ হয় এবং $b+c\neq 0$, তাহা হইলে এই ভগ্নাংশসমূহের প্রত্যেকটি $=\dfrac{x}{y}$.

তৃতীয় ভগ্নাংশটির লব এবং হরকে a দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{a(z+y)}{a(x+z)}=\frac{\text{লবগুলির সমষ্টি}}{\text{হরগুলির সমষ্টি}}$$

$$=\frac{(b+c)x-a(z+y)+a(z+y)}{(b+c)y-a(x+z)+a(x+z)}=\frac{(b+c)x}{(b+c)y}=\frac{x}{y}$$

(যদি $b+c=0$ না হয়)।

যদি $b+c=0$ হয়, তাহা হইলে ইহা $\frac{0}{0}$ অনির্ণেয় (indeterminate) আকার প্রাপ্ত হয়।

উদা. 5. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

মনে কর, প্রদত্ত সমান রাশিমালাসমূহের প্রত্যেকটি $=k$.

$$\therefore \quad y+z=\frac{k}{a},\quad z+x=\frac{k}{b},\quad x+y=\frac{k}{c},$$

$$\therefore \quad y-z=(x+y)-(z+x)=k\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{k(b-c)}{bc}.$$

$$\therefore \quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{k}{abc}. \text{ এইরূপে, } \frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{k}{abc}=\frac{x-y}{c(a-b)};$$

$$\therefore \quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

উদা. 6. যদি $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হয়, তাহা **হইলে** প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}.$$

এ স্থলে, $$x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0 \qquad (1)$$

এবং $$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0 \qquad (2)$$

$\therefore$ বজ্রগুণন-দ্বারা,

$$\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}.$$

প্রশ্নমালা 109

1. যদি $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x+y+z=0.$$

2. যদি $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

3. যদি $\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$ হয় এবং $a+b+c\neq 0$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

4. $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b-c}{bz-cy}=\frac{c-a}{cx-az}=\frac{a-b}{ay-bx}.$$

5. যদি $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a+b+c=0, \text{ অথবা } a=b=c$$

6. যদি $\dfrac{a+b-c}{a+b}=\dfrac{b+c-a}{b+c}=\dfrac{c+a-b}{c+a}$ হয় এবং $a+b+c\neq 0$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

7. যদি $\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b+c}{a}=1$ হয় এবং $b+c-a\neq 0$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

8. $\dfrac{a}{y+z-x}=\dfrac{b}{z+x-y}=\dfrac{c}{x+y-z}$, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$$

9. যদি $\dfrac{a-b}{ay+bx}=\dfrac{b-c}{bz+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a+b+c}{ax+by+cz}$ হয় এবং $a+b+c\neq 0$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\text{উক্ত অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি}=\frac{1}{x+y+z}.$$

10. $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x(y-z)}{b^2-c^2}=\frac{y(z-x)}{c^2-a^2}=\frac{z(x-y)}{a^2-b^2}$$

11. $(a+b)(y+z-x)=(b+c)(z+x-y)=(c+a)(x+y-z)$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x-y}{c^2-a^2}=\frac{y-z}{a^2-b^2}=\frac{z-x}{b^2-c^2}.$$

12. যদি $a=\frac{x}{y+z}$, $b=\frac{y}{z+x}$ এবং $c=\frac{z}{x+y}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কব যে,

$$\frac{x^2}{a-abc}=\frac{y^2}{b-abc}=\frac{z^2}{c-abc}.$$

13. যদি a এবং b দুইটি অসমান রাশি হয় এবং $\frac{a}{1-a^2}=\frac{b+c}{1+bc}$ $\frac{b}{1-b^2}=\frac{c+a}{1+ca}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{c}{1-c^2}=\frac{a+b}{1+ab}$.

14. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$; প্রমাণ কর যে,

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$.

15. যদি $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{2x+3y+5z}{2a+3b+5c}=\frac{3x+4y+5z}{3a+4b+5c}.$$

16. $x(b+c)=y(c+a)=z(a+b)$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b^2-c^2}{y-z}=\frac{c^2-a^2}{z-x}=\frac{a^2-b^2}{x-y}.$$

17. যদি x এবং y দুইটি অসমান রাশি হয় এবং $\frac{x-\frac{yz}{x}}{1-yz}=\frac{y-\frac{zx}{y}}{1-zx}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটি $=x+y+z$, অথবা $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$. (x^{-1} এর অর্থ $\frac{1}{x}$. অনু. 313.)

18. যদি $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}.$$

19. $\dfrac{y+z-x}{b+c-a}=\dfrac{z+x-y}{c+a-b}=\dfrac{x+y-z}{a+b-c}$; প্রমাণ কর যে,

$$a:b:c=x:y:z.$$

20. $a(x-y)+a^2=b(y-z)+b^2=c(z-x)+c^2$; প্রমাণ কর যে,

ইহাদের প্রত্যেকটি $=\dfrac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$.

21. যদি

$$\frac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$$ হয়,

তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x+y+z=0.$$

22. যদি $x+y+z=0$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, x, y এবং z এর মান যে মানবিশিষ্টই হউক না কেন,

$$\frac{ax+by}{by-cz}=\frac{ay+bz}{bz-cx}=\frac{az+bx}{bx-cy}.$$

অনুপাতগুলির মানের কোন পরিবর্তন হইবে না।

23. $y+z:z+x:x+y=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b-c}{y^2-z^2}=\frac{c-a}{z^2-x^2}=\frac{a-b}{x^2-y^2}.$$

24. যদি $\dfrac{x+2y}{r+2q}=\dfrac{y+2z}{p+2r}=\dfrac{z+2x}{q+2p}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x:y:z=2p+2q-r:2q+2r-p:2r+2p-q.$$

25. করিম এবং আজিজের বয়স যথাক্রমে 32 এবং 5 বৎসর। অন্তত কয়টি বৎসর পরে সর্বপ্রথম তাহাদের বয়সের অনুপাত 3 : 1 অপেক্ষা কম হইবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা V

I

1. সমাধান কর : $\frac{8x+7}{2x+1} - \frac{3x+3}{x+2} = 1.$

[বাম পক্ষস্থ ভগ্নাংশদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে মিশ্র সংখ্যার আকারে প্রকাশ করিয়া লও।]

2. গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) $10x^2+29x+2$; (ii) $6x^2+xyz-y^2z^2$.

3. 4 এবং 9 একক দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট ABCD আয়তক্ষেত্রের DC (দীর্ঘতর) বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু M লওয়া হইল যেন $DM = x$ প্রমাণ কর যে,

$$AM^2 + BM^2 = 2x^2 - 18x + 113.$$

4. সরল কর :

$$(-3x^3y^2)^3,\ a^{p+q} \times a^{2p-q},\ (25\cdot3)^2 - (4\cdot7)^2.$$

5. 50 টি আমের মূল্য 3 টা. 12 আ. 50 পর্যন্ত যে-কোন সংখ্যক আমের মূল্য-নির্ণায়ক লেখ অঙ্কিত কর এবং অঙ্কিত লেখ হইতে 30 টি আমের মূল্য নির্ণয় কর ; 1 টা. 8 আনায় কতগুলি আম পাওয়া যাইবে তাহাও নির্ণয় কর।

II

1. সমাধান কর :

$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = \frac{x+a}{2a+b+c} + \frac{x+b}{2b+c+a} + \frac{x+c}{2c+a+b}.$$

2. তহবিলের অর্ধেক টাকা-দ্বারা একটি ঘোড়া এবং এক-তৃতীয়াংশ টাকা-দ্বারা একখানি গাড়ি ক্রয় করিবার পর একব্যক্তির নিকট 250 টাকা অবশিষ্ট রহিল। ঐ ব্যক্তির তহবিলে কত টাকা ছিল নির্ণয় কর।

3. শতকরা কত হারে x টাকা n বৎসরে সুদে আসলে y টাকা হইবে? $x = 100$, $y = 120$ এবং $n = 4$ লিখিয়া নির্ণীত উত্তরের নির্ভুলতা প্রমাণ কর।

4. সরল কর :

$$\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}+\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{2x^2}{(a-x)(a^2+x^2)}+\frac{2x^2}{(a+x)(a^2+x^2)}.$$

5. যদি $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, ভগ্নাংশ তিনটির প্রত্যেকটি $\frac{1}{2}$, অথবা -1 এর সমান হইবে।

III

1. ভাগশেষ উপপাদ্য (remainder theorem) সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $6x^2+19x+15$ এর একটি গুণনীয়ক $2x+3$ এবং উক্ত উপপাদ্য-সাহায্যে a এবং b এর এমন দুইটি মান নির্ণয় কর যাহাতে $x-1$ এবং $2x-1$ রাশি দুইটি $ax^4-x^3+2x^2-bx+2$ এর গুণনীয়ক হইতে পারে।

2. যদি $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$

3. তিনটি সংখ্যা 2, 3 এবং 5 এর সমানুপাতী; উহাদের বৃহত্তম এবং লঘুতমটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা 24 অধিক। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

4. যদি $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

5. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 10 এবং সংখ্যাটির মধ্যের অঙ্কটি অন্য অঙ্ক দুইটির সমষ্টির সমান, সংখ্যাটিকে উল্টাভাবে লিখিলে 99 বাড়িয়া যায়; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

IV

1. সমাধান কর : $\frac{ax+by}{2(a+b)}=c=\frac{ab(x-y)}{b^2-a^2}.$

2. যদি $F(x) = x^3 - (x-1)^3$ হয়, তাহা হইলে $F(x) - F(x-1)$ এর মান কত? শেষোক্ত রাশিটি $f(x)$ দ্বারা সূচিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $f(x) - f(x-1) = 6$.

3. টাকা, আধুলি এবং সিকিতে একব্যক্তির নিকট 69 টি মুদ্রা আছে; মুদ্রাগুলির মোট মূল্য 42 টাকা। যদি আধুলিগুলির পরিবর্তে ঐ মূল্যের সিকি থাকিত এবং সিকিগুলির পরিবর্তে ঐ মূল্যের এক-আনি থাকিত, তাহা হইলে মুদ্রার সংখ্যা 153 হইত। ঐ ব্যক্তির নিকট প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রা কতগুলি করিয়া আছে?

4. যদি $a = \frac{x-y}{x+y}$, $b = \frac{y-z}{y+z}$ এবং $c = \frac{z-x}{z+x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{1+c}{1-c} = 1$.

5. চারটি সংখ্যার অনুপাত $2:5:6:7$ এবং উহাদের বর্গসমূহের সমষ্টি 456. সংখ্যা চারটি নির্ণয় কর।

V

1. $x = by + cz$, $y = cz + ax$ এবং $z = ax + by$; প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1.$$

2. সমাধান কর:

$$x + a = y + b = z + c, \quad ax + by + cz = 2(ab + bc + ca).$$

3. সরল কর:

$$\left(\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} + 3\right) \div \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right).$$

4. a, b, c, d রাশিগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ এবং $c^2 + d^2$ রাশিগুলিও ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

5. একজন ডাকহরকরাকে 9 ঘণ্টা সময়ের মধ্যে আমগ্রাম হইতে মাদারিপুর আসিয়া ফিরিয়া যাইতে হয়; ঐ সময়ের মধ্যে সে মাদারিপুরে 3 ঘণ্টা বিশ্রাম করে। পূর্বাপেক্ষা ঘণ্টায় $\frac{4}{5}$ মাইল অধিক বেগে চলিলে সে 4 ঘণ্টা বিশ্রাম

করিতে পারে। ঐ ব্যক্তির স্বাভাবিক বেগ এবং আমগ্রাম হইতে মাদাবিপুবেব দূরত্ব নির্ণয় কর।

VI

1. এমন একটি রাশি নির্ণয় কর যাহার দ্বারা সর্বদাই অযুগ্ম সংখ্যা সূচিত হইবে। প্রমাণ কর যে, যে-কোন তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার বর্গসমূহের সমষ্টিব সহিত 1 যোগ করিলে যোগফলটি সর্বদাই 12 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

2. A এবং B এর বার্ষিক আয়ের অনুপাত 1 : 2 এবং তাহাদের বার্ষিক ব্যযেব অনুপাত 4 : 9. বৎসরের শেষে উভযে 300 টাকা জমাইল; কাহাব কত বার্ষিক আয় নির্ণয় কর।

3. যদি $\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=\frac{b-c}{x}$ এবং $\frac{z}{x}-\frac{x}{z}=\frac{c-a}{y}$ হয, তাহা হইলে প্রমাণ কব যে, $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{a-b}{z}$.

4. সমাধান কর : $\frac{x+y-z}{a+b}=\frac{y+z-x}{b+c}=\frac{z+x-y}{c+a}=a+b+c.$

5. যদি $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{b}{a}-\frac{d}{c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{d^3}{c^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{d^3}.$$

ষড়বিংশ অধ্যায়

সূচক-প্রকরণ (Theory of Indices)

309. প্রাথমিক সূচক-নিয়ম

m ও n দুইটি ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

কারণ, $a^m = a \times a \times a \times \cdots$ m সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত,

$a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots$ n সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত ,

$\therefore \quad a^m \times a^n = a \times a \times a \times \cdots$ $(m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$.

এই ফলকে **প্রাথমিক সূচক-নিয়ম** বলে।

310. সূচক-নিয়ম হইতে সিদ্ধান্ত

সূচকগুলি ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, উক্ত সূচক-নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত ফলগুলি পাওয়া যায় :—

I. $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots\cdots = a^{m+n+p+\cdots\cdots}$

কারণ, $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = (a \times a \times a \times \cdots$ m সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \times \cdots\cdots$ n সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \times \cdots\cdots$ p সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত) $\times \cdots$

$= a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n+p+\cdots)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n+p+\cdots\cdots}$

II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

মনে কর, $\quad m > n$

এক্ষণে, $\quad a^m = a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

এবং $\quad a^n = a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত ;

$$\therefore \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times \cdots\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$$

$= a \times a \times \cdots\cdots (m-n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}.$

যদি $n > m$ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times \cdots\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$$

$$= \frac{1}{a \times a \times \cdots\cdots (n-m) \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$$ [এখানে লব এবং হর হইতে m সংখ্যক গুণনীয়ক অপসারিত করা হইয়াছে।]

$= \frac{1}{a^{n-m}}.$

III. $(a^m)^n = a^{mn}$

কারণ, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$ [I হইতে]

$= a^{mn}.$

IV. $(ab)^m = a^m \times b^m$

$(ab)^m = (ab) \times (ab) \times \cdots\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a^m \times b^m.$

V. $a^0 = 1$

$$a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n,$$

$$\therefore \quad a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

অতএব যে-কোন রাশির 0 ঘাত 1 এর সমান।

311. সূচক-নিয়মের সামান্যীকরণ (Generalisation)

সূচক-নিয়ম এবং উহার সিদ্ধান্তসমূহ প্রমাণ করিবার সময় সূচকগুলিকে ধন, পূর্ণসংখ্যা মনে করা হইয়াছে ; কিন্তু ইহারা ভগ্নাংশ কিংবা ঋণ রাশি হইলে, অনু. 309 এবং 310 এ বর্ণিত প্রমাণসমূহ প্রয়োগ করা চলে না ; কারণ m একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা না হইলে "$a^m = a \times a \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত" এই বাক্যের কোন অর্থ হয় না।

সূচকগুলি ধন, পূর্ণসংখ্যা না হইলে, সূচক-নিয়ম প্রমাণ করা যায় না ; কিন্তু সেই সমস্ত ক্ষেত্রেও নিয়মটিকে সত্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইয়াছে, অর্থাৎ m এবং n, ভগ্ন কিংবা পূর্ণ, ধন কিংবা ঋণ যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হইবে।

এই সামান্যীকৃত (generalised) সূচক-নিয়ম-সাহায্যে, ভগ্নাংশ কিংবা ঋণ সূচকবিশিষ্ট রাশির অর্থ নির্ণয় করিতে পারা যাইবে।

312. ভগ্নাংশ সূচক

p এবং q ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে $a^{\frac{p}{q}}$ দ্বারা কি বুঝা যায় নিরূপণ করিতে হইবে।

m এবং n যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন, ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

সুতরাং $\qquad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}$.

এইরূপে, $\qquad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \cdots\cdots q$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$

$$= a^{\frac{pq}{q}} = a^p ;$$

$$\therefore \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p ;$$

অর্থাৎ, $a^{\frac{p}{q}}$ এর q-তম ঘাত a^p এর সমান। সুতরাং a^p এর q-তম মূল $a^{\frac{p}{q}}$.

অতএব, $a^{\frac{p}{q}}$ এর অর্থ $\sqrt[q]{a^p}$.

যে হেতু, $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots\cdots\cdots p$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

সুতরাং $a^{\frac{p}{q}}$, $a^{\frac{1}{q}}$ এর p-তম ঘাত, অর্থাৎ $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$.

অতএব, $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$, অর্থাৎ কোন রাশির p-তম ঘাতের q-তম মূল এবং q-তম মূলের p-তম ঘাত সমান।

আবার, $a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots\cdots\cdots q$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$

$$= a^{\frac{1}{q} \cdot q} = a,$$

সুতরাং $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$, অথবা $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

অতএব, $a^{\frac{1}{q}}$ দ্বারা a র q-তম মূলকে বুঝায়।

উদা. 1. $(64)^{\frac{1}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

উদা. 2. $(125)^{\frac{2}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(125)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25.$$

প্রকারান্তর : $(125)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{15625} = 25.$

313. ঋণ-সূচক

m একটি ধনরাশি হইলে, a^{-m} এর অর্থ নির্ণয় করিতে হইবে।

m এবং n যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

সুতরাং, $$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^{m-m} = a^0 = 1\ ;$$

$$\therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ এবং } a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

সুতরাং, a^m এবং a^{-m} ইহাদের একটি অন্যটির বিপরীত (reciprocal).

314. প্রমাণ করিতে হইবে যে, m এবং n যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন,
$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

m এবং n যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন,
$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n}$$
$$= a^m \times a^{-n} \qquad \text{অনু. 313.}$$
$$= a^{m-n}.$$

উদা. 1. $(16)^{-\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(16)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(16)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}.$$

উদা. 2. $(243)^{-\frac{3}{5}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(243)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(243)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\{(243)^{\frac{1}{5}}\}^3}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt[5]{243})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[4]{x^3} \times x^{-\frac{4}{3}} \times x^{-\frac{1}{4}}$.

প্রদত্ত রাশি $$= x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{3}{4}} \times x^{-\frac{4}{3}} \times x^{-\frac{1}{4}}$$
$$= x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{6}}$$
$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\sqrt[3]{x} \times x^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt[15]{x^{-11}} \times (\sqrt[5]{x})^3$.

প্রদত্ত রাশিটি $= x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{5}} \times x^{-\frac{11}{15}} \times x^{\frac{3}{5}}$

$= x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{11}{15}+\frac{3}{5}} = x^0 = 1.$

315. প্রমাণ করিতে হইবে যে, m এবং n যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, $(a^m)^n = a^{mn}$.

(i) n একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, উক্ত ফলটির সত্যতা অনু. 310 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

(ii) n একটি ধন, ভগ্নাংশ হইলে, মনে কর, p, q দুইটি ধন, পূর্ণসংখ্যা এবং $n = \frac{p}{q}$. তাহা হইলে,

$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$ অনু. 312.

$= \sqrt[q]{a^{mp}}$ $\because$ p একটি ধন পূর্ণসংখ্যা,

$= a^{\frac{pm}{q}}$ অনু. 312.

$= a^{mn}$, কারণ $\frac{p}{q} = n$.

(iii) যদি n একটি ঋণ রাশি হয়, তাহা হইলে, মনে কর, q একটি ধন রাশি এবং $n = -q$. সুতরাং,

$(a^m)^n = (a^m)^{-q} = \frac{1}{(a^m)^q}$ অনু. 313.

$= \frac{1}{a^{mq}}$ $\because$ q একটি ধনরাশি

$= a^{-mq}$ অনু. 313.

$= a^{mn}$, $\therefore$ $n = -q$.

অনুসিদ্ধান্ত $\left(a^{m^{n-1}}\right)^m = a^{m^n}$.

কারণ m^{n-1} এর পরিবর্তে p লিখিয়া,

$\left(a^{m^{n-1}}\right)^m = (a^p)^m = a^{pm}$, অনু. 315.

কিন্তু $pm = m^{n-1} \times m = m^{n-1+1} = m^n$;

$$\therefore \quad \left(a^{m^{n-1}}\right)^m = a^{pm} = a^{m^n}.$$

দ্রষ্টব্য। $a^{m^{n-1}}$ এবং $(a^m)^{n-1}$ এর মান এক নহে।

উদা. 1. $(2^{\frac{1}{3}})^6$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(2^{\frac{1}{3}})^6 = 2^{\frac{1}{3} \times 6} = 2^2 = 4.$$

উদা. 2. $(8^{-\frac{3}{4}})^{\frac{4}{9}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(8^{-\frac{3}{4}})^{\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{3}{4} \times \frac{4}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\{(x^{-2})^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{3}{2}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (x^{-2 \times \frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$$

$$= x^{-\frac{2}{3} \times -\frac{3}{2}} = x^1 = x.$$

উদা. 4. সরল কর : $\left(x^{4^{2n-1}}\right)^2$.

$$\left(x^{4^{2n-1}}\right)^2 = x^{(4^{2n-1} \times 2)} = x^{\{2^{2(2n-1)} \times 2\}}$$

$$= x^{(2^{4n-2} \times 2)} = x^{2^{4n-2+1}} = x^{2^{4n-1}}.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$a^{x-y}(b^{x+y})^{\frac{1}{x^2-y^2}}(c^{x^2-y^2})^{\frac{1}{x+y}} \div a^x b^{-y} c^y.$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = a^{x-y} . b^{\frac{1}{x-y}} . c^{x-y} . a^{-x} . b^{+y} . c^{-y}$$

$$= a^{x-y-x} . b^{\frac{1}{x-y}+y} . c^{x-y-y}$$

$$= a^{-y} b^{\frac{1+xy-y^2}{x-y}} c^{x-2y}.$$

316. m যে-কোন মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

(*i*) m ধন, পূর্ণসংখ্যা হইলে, উক্ত ফলটি অনু. 310 এ প্রমাণিত হইয়াছে।

(*ii*) যদি m একটি ধন, ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলে মনে কর, $m = \frac{p}{q}$ এবং p, q উভয়েই ধন, পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$(ab)^m = (ab)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \sqrt[q]{(ab)^p} \qquad \text{অনু. 312.}$$

$$= \sqrt[q]{a^p b^p} \qquad \because\ p \text{ একটি ধন পূর্ণসংখ্যা}$$

$$= \sqrt[q]{a^{mq} b^{mq}}, \qquad \because\ p = mq.$$

কিন্তু $a^{mq} = (a^m)^q$ এবং $b^{mq} = (b^m)^q$; অনু. 315.

সুতরাং $\sqrt[q]{a^{mq} b^{mq}} = \sqrt[q]{(a^m)^q (b^m)^q}$

$$= \sqrt[q]{(a^m b^m)^q} \qquad \because\ q \text{ একটি ধন, পূর্ণসংখ্যা}$$

$$= (a^m b^m)^{\frac{q}{q}} = a^m b^m ;$$

$\therefore$ m ধন ভগ্নাংশ হইলে, $(ab)^m = a^m b^m$.

(*iii*) m একটি ঋণ রাশি হইলে, মনে কর, q একটি ধন রাশি এবং $m = -q$. তাহা হইলে,

$$(ab)^m = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} \qquad \text{অনু. 313.}$$

$$= \frac{1}{a^q b^q}$$

$$= \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} \qquad \because\ q \text{ একটি ধন রাশি}$$

$$= a^{-q} \times b^{-q} \qquad \text{অনু. 313}$$

$$= a^m b^m.$$

অতএব, m এর মান যাহাই হউক না কেন, $(ab)^m = a^m b^m$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $(abcd\cdots)^m = a^m b^m c^m d^m \cdots$

কারণ $(abcd\cdots)^m = (a \times bcd\cdots)^m$

$= a^m \times (bcd\cdots)^m$

$= a^m \times b^m \times (cd\cdots)^m$

$= a^m b^m c^m d^m \cdots$

অনুসিদ্ধান্ত 2. m, n, p এর মান যাহাই হউক না কেন,

$$(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 3. m এর মান যাহাই হউক না কেন,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

কারণ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^m = (ab^{-1})^m$ অনু. 313.

$= a^m . (b^{-1})^m$ অনু. 316.

$= a^m b^{-m}$ অনু. 315.

$= a^m \times \frac{1}{b^m}$ অনু. 313.

$= \frac{a^m}{b^m}.$

উদা. 1. সরল কর :

$$\sqrt[3]{a^4 b^6 c^3} \times \sqrt[4]{a^2 b^4 c^3} \times \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}.$$

প্রদত্ত রাশি $= (a^4 b^6 c^3)^{\frac{1}{3}} \times (a^2 b^4 c^3)^{\frac{1}{4}} \times (a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{3}})^{-6}$

$= a^{\frac{4}{3}} b^2 c \times a^{\frac{1}{2}} b c^{\frac{3}{4}} \times a^{-3} b^{-3} c^2$

$= a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-3} . \ b^{2+1-3} . \ c^{1+\frac{3}{4}+2}$

$= a^{-\frac{7}{6}} b^0 c^{\frac{15}{4}} = a^{-\frac{7}{6}} c^{\frac{15}{4}}.$

উদা. 2. সরল কর : $(x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} \div (xy^{-1})^{\frac{2}{3}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}}{(xy^{-1})^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}}.\, y^{(-\frac{1}{2})\times\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}.\, y^{(-1)\times\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}.\, y^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}y^{0} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

উদা. 3. সরল কর : $\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{-4} \times \left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^{4}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^{\frac{2}{5}\times(-4)}}{y^{\frac{3}{4}\times(-4)}} \times \frac{x^{\frac{3}{4}\times 4}}{y^{\frac{2}{5}\times 4}} = \frac{x^{-\frac{8}{5}}}{y^{-3}} \times \frac{x^{3}}{y^{\frac{8}{5}}} = \frac{x^{-\frac{8}{5}} \times x^{3}}{y^{-3} \times y^{\frac{8}{5}}}$$

$$= \frac{x^{-\frac{8}{5}+3}}{y^{-3+\frac{8}{5}}} = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{y^{-\frac{7}{5}}} = x^{\frac{7}{5}}.\, y^{\frac{7}{5}} = (xy)^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{(xy)^{7}}.$$

প্রশ্নমালা 110

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

1. $8^{\frac{1}{3}}$. 2. $(81)^{\frac{1}{4}}$. 3. $(1024)^{\frac{1}{5}}$. 4. $\sqrt[3]{8^{2}}$.

5. $(16)^{\frac{5}{4}}$. 6. $(32)^{\frac{4}{5}}$. 7. $9^{-\frac{5}{2}}$. 8. $4^{\frac{3}{2}}$.

9. $(27)^{-\frac{4}{3}}$. 10. $4^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{2}{3}}$. 11. $(25 \times 36)^{-\frac{3}{2}}$.

12. $8^{-\frac{4}{3}} \times \frac{1}{(16)^{-\frac{3}{4}}}$. 13. $4^{2} \times 8^{-2}$. 14. $\sqrt[3]{9 \times 3^{4}}$.

15. $(125)^{-\frac{1}{3}} \div (25)^{-\frac{1}{2}}$.

সরল কর :

16 $\sqrt[3]{a^{6}}$. 17. $\sqrt[4]{x^{-8}}$. 18. $(x^{-\frac{1}{3}})^{3}$.

19. $\{(x^{2})^{3}\}^{4}$. 20. $\{(x^{-3})^{\frac{1}{3}}\}^{2}$. 21. $\{(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{5}}$.

22. $\left((a^{-5})^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 23. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{3} \times \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. 24. $\left(x^{3}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

25. $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^{b}\}^{c}$. 26. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

27. $\left(\frac{a^3}{x^3}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. 28. $\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[4]{x^3} \times \sqrt[5]{x^4}$.

29. $\sqrt{x} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{6}} \times x^{-\frac{2}{3}}$. 30. $(x^3y^2)^{-\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.

31. $\sqrt[3]{xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}} \div (xyz)^{\frac{1}{6}}$. 32. $(a^2\sqrt{x^{-5}})^{\frac{1}{2}} \times (a\sqrt[4]{x^5})^{-1}$.

33. $\sqrt[3]{a^3\sqrt{x^{-6}}} \div (a^{-1}x)^{-1}$. 34. $(a^{10}b^{15}c^{20})^{-\frac{1}{5}} \times (a^2b^4c^6)^{-\frac{1}{2}}$.

35. $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$. 36. $\sqrt{a^{x-y} \cdot a^{y-z} \cdot a^{z-x}}$.

37. $2^{a-b} \cdot 2^{b-c} \cdot 2^{c-a}$. 38. $(a-b)^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}$.

39. $\sqrt[3]{a-b} \cdot (a-b)^{\frac{3}{2}} \div \sqrt[6]{(a-b)^{11}}$.

40. $\left(\frac{x^3y^2z^4}{x^{-3}y^{-2}z^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(x^3y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

41. $\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} \left\{\frac{8^{\frac{n}{3}}}{4}\right\}^{-n}$.

42. $$\frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 6^{n}}{6^{m} \cdot 10^{n+2} \cdot 15^{m}}.$$

43. $$\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^{\frac{8}{3}}}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

44. $(8a^3)^{-\frac{1}{3}} \times (16b^4)^{-\frac{1}{4}} \times (243c^5)^{-\frac{1}{5}} \div (144a^2b^2c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

45. $$\left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{m^3n^3} \times \frac{\sqrt{m^3n^2}}{\sqrt[3]{m^2n^3}} \times (mn^{27})^{-\frac{1}{12}}.$$

46. $$\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$$

47. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{5}{6}} \times \left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{7}{12}} \times \left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

48. $\dfrac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{n}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{m}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^{n}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{m}}$.

49. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+c^2+bc} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+a^2+ca}$.

50. $\dfrac{a^{m+n}}{a^{2l}} \times \dfrac{a^{n+l}}{a^{2m}} \times \dfrac{a^{l+m}}{a^{2n}}$.

51. $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^q)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}\,(\sqrt[m]{b})^r\right\}^{mq}} \div \left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right\}$

52. যদি $p=a^x$, $q=a^y$ এবং $a^2=(p^y q^x)^z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$.

317. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উপরি বর্ণিত নিয়ম-সংক্রান্ত কতকগুলি প্রশ্ন নিম্নে সমাধান করা হইল।

উদা. 1. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

$$\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{4}{3}}.$$

উদা. 2. $x^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{4}{5}}$ কে $x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$x^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{4}{5}}=\left(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}\right)\left(x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}}\right)=\left(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}\right)\left(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}}\right)\left(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}\right).$$

সুতরাং নির্ণেয় ভাগফল $=\left(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}}\right)\left(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}\right)$

$$=x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{3}{5}}.$$

উদা. 3. $x^{\frac{3}{8}}-y^{\frac{3}{8}}$ এবং $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

অনু. 170 এ বর্ণিত প্রক্রিয়ানুসারে গ. সা. গু.-টি নির্ণয় করা যায়। নিম্নলিখিতরূপেও গ. সা. গু.-নির্ণয়-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা যায় :

$$x^{\frac{3}{8}}-y^{\frac{3}{8}}=(x^{\frac{1}{8}})^3-(y^{\frac{1}{8}})^3$$
$$=(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})\{(x^{\frac{1}{8}})^2+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+(y^{\frac{1}{8}})^2\}$$
$$=(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}).$$

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}=(x^{\frac{1}{4}})^2+(y^{\frac{1}{4}})^2+2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$
$$=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2-(x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}})^2$$
$$=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}).$$

সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}$.

উদা. 4. নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) $x+13\sqrt{x}+40$;

(ii) $a^{3n}-64$.

(i) $x+13\sqrt{x}+40=x+5\sqrt{x}+8\sqrt{x}+40$
$$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)+8(\sqrt{x}+5)$$
$$=(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}+8).$$

(ii) $a^{3n}-64=(a^n)^3-4^3$
$$=(a^n-4)(a^{2n}+4a^n+16).$$

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}\times\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\times\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a-b}$.

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(a+b)(a-b)(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})}{(a-b)(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}$

$$=(a+b)(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}).$$

উদা. 6. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

উভয় রাশিকে a র ঘাতসমূহের অধঃক্রম-অনুসারে লিখিয়া নিম্নলিখিতরূপে গুণন-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা যায় :—

$$
\begin{array}{l}
a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}} \\
a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}} \\
\hline
a+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \\
\quad -a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b \\
\hline
a \qquad\qquad\qquad -b
\end{array}
$$

নির্ণেয় গুণফল $=a-b.$

উদা. 7. $x^{-4}+x^{-3}-24x^{-2}-35x^{-1}+57$ কে $x^{-2}+2x^{-1}-3$ দ্বারা ভাগ কর।

উভয় রাশিকে x এর ঘাতসমূহের ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে লিখিয়া নিম্নলিখিতরূপে ভাগ-ক্রিয়াটি সম্পন্ন করা যায় :

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^{-2}+2x^{-1}-3 & x^{-4}+x^{-3}-24x^{-2}-35x^{-1}+57 & x^{-2}-x^{-1}-19 \\
 & x^{-4}+2x^{-3}-3x^{-2} & \\
\cline{2-2}
 & -x^{-3}-21x^{-2}-35x^{-1} & \\
 & -x^{-3}-2x^{-2}+3x^{-1} & \\
\cline{2-2}
 & -19x^{-2}-38x^{-1}+57 & \\
 & -19x^{-2}-38x^{-1}+57 & \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

নির্ণেয় ভাগফল $=x^{-2}-x^{-1}-19.$

প্রশ্নমালা 111

গুণ কর :

1. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

2. $x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{3}{8}}+1$ কে $x^{\frac{3}{8}}-1$ দ্বারা।

3. $x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+1$ কে $x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}+1$ দ্বারা।

4. $a^{-2}+b^{-2}$ কে $a^{-4}-a^{-2}b^{-2}+b^{-4}$ দ্বারা।

5. $a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+ax$ কে $a^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা।

ভাগ কর :

6. $x^{-3}+y^{-3}$ কে $x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$ দ্বারা।

7. $x^{-\frac{4}{3}}-y^{-\frac{4}{3}}$ কে $x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ দ্বারা।

8. $x^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{4}{3}}$ কে $x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ দ্বারা।

9. $a+ab^{-1}+b^{-1}+2ab^{-\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}b^{-1}+2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$ কে

$a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা।

10. $2a^{2n}-15a^{-3n}+5a^{-n}-6$ কে $a^{n}-3a^{-n}$ দ্বারা।

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

11. $3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2$, $3x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}$ এবং $3x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}-4$.

12. $4x+3x^{\frac{1}{2}}-10$ এবং $4x^{\frac{3}{2}}+7x-3x^{\frac{1}{2}}-15$.

13. $x^{-3}+3x^{-2}-9x^{-1}+5$ এবং $x^{-3}-19x^{-1}+30$.

14. $x^{-\frac{4}{5}}-9a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{5}}+10ax^{-\frac{1}{5}}$ এবং $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{3}{5}}-a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{5}}-4a^{\frac{4}{3}}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

15. $3x^{-2}-10a^{-3}x^{-1}+7a^{-6}$ এবং $x^{-3}-5a^{-3}x^{-2}$

$+7a^{-6}x^{-1}-3a^{-9}$.

16. $6x^{\frac{3}{4}}+7x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{1}{4}}+2$ এবং $8x+6x^{\frac{3}{4}}-15x^{\frac{1}{2}}+9x^{\frac{1}{4}}-2$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

17. $x^{-\frac{3}{8}}+y^{\frac{3}{8}}$. 18. $a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}+1$. 19. $a^{\frac{2}{3}}+15a^{\frac{1}{3}}+56$.

20. $a^{-\frac{3}{4}}-17x^{-\frac{3}{8}}+72$. 21. $a^{-\frac{5}{3}}-7a^{-\frac{5}{6}}x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}$.

22. $a^{-\frac{2}{5}}(b-c^{\frac{1}{4}})+b^{2}(c^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{5}})+c^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{5}}-b)$.

23. $a + a^{-1} + 2a^{\frac{1}{2}} + 2a^{-\frac{1}{2}} + 3.$

24. $4(a^{-1}b - x^{-2}y^{-3})^2 - (a^{-2} - x^{-4} - y^{-6} + b^2)^2.$

25. $12x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - y^{-\frac{4}{3}}.$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

26. $a^{-1} + x^{-1}.$ 27. $a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}.$

28. $a^{-1} + a + 1.$ 29. $a^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}.$

সরল কর :

30. $\dfrac{a^{2n} - x^{-2n}}{a^n + x^{-n}}.$ 31. $\dfrac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}}.$

32. $\dfrac{1}{1 + x^{m-n} + x^{m-p}} + \dfrac{1}{1 + x^{n-m} + x^{n-p}} + \dfrac{1}{1 + x^{p-m} + x^{p-n}}.$

33. $\left(\dfrac{x^{-2} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{-2} - y^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{x^{-2} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{-2} + y^{\frac{2}{3}}}\right) \div \left(\dfrac{x^{-1} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{-1} - y^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{x^{-1} - y^{\frac{1}{3}}}{x^{-1} + y^{\frac{1}{3}}}\right).$

34. $\dfrac{x^{-3n}}{x^{-n} - 1} - \dfrac{x^{-2n}}{x^{-n} + 1} - \dfrac{1}{x^{-n} - 1} + \dfrac{1}{x^{-n} + 1}.$

35. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}.$

36. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $2x^3 + 6x = 3.$

37. $a^x = b^y$ এবং $b^x = a^y$ হইলে প্রমাণ কর যে, $a = b.$

38. $a^x = x^y$ এবং $a^y = x^x$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^2 = yx.$

39. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x - y}$

$$= (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \cdots (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}).$$

40. $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর, এবং $x = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হইলে $x^3 - 6x$ এর মান নির্ণয় কর।

318. সূচকীয় সমীকরণ (Exponential Equation)

অনেক সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিসমূহ ঘাতের সূচকরূপে বিদ্যমান থাকে। এই সকল সমীকরণকে **সূচকীয় সমীকরণ** বলা হয়।

যেমন, $a^x = b$ একটি সূচকীয় সমীকরণ।

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে এক বা একাধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণের সমাধান-প্রণালী সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর: $2^{x+7} = 4^{x+2}$.

$$4^{x+2} = (2^2)^{x+2} = 2^{2x+4}; \quad \therefore \quad 2^{x+7} = 2^{2x+4};$$

$$\therefore \quad x+7 = 2x+4; \quad \therefore \quad x = 3.$$

উদা. 2. সমাধান কর: $2^{2x+3} + 4^x = 36$.

$2^{2x+3} + 4^x = 36$, বা $2^{2x}.2^3 + 2^{2x} = 36$,

বা $2^{2x}(2^3+1) = 36$, বা $2^{2x} \times 9 = 36$;

$\therefore \quad 2^{2x} = 4 = 2^2$; $\quad \therefore \quad 2x = 2$, বা $x = 1$.

উদা. 3. সমাধান কর: $3^{x-2}.\ 5^{x-3} = 675$.

সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়:

$$\frac{3^x}{3^2} \cdot \frac{5^x}{5^3} = 675;$$

$$\therefore \quad 3^x.5^x = 675 \times 3^2 \times 5^3 = 5^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5^3 = 3^5.5^5,$$

বা $(3.5)^x = (3.5)^5$; $\quad \therefore \quad x = 5$.

উদা. 4. সমাধান কর: $a^{x-3} = b^{x-3}$.

$$a^{x-3} = b^{x-3};$$

$$\therefore \quad \frac{a^{x-3}}{b^{x-3}} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0, \text{ অর্থাৎ } \left(\frac{a}{b}\right)^{x-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0;$$

$$\therefore \quad x-3 = 0; \quad \therefore \quad x = 3.$$

উদা. 5. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{r} 2^x.2^{y+2} = 16 \\ 3^{2x+1}.3^{y-1} = 27 \end{array}\right\}$

$2^x.2^{y+2} = 16$; $\quad \therefore \quad 2^{x+y+2} = 2^4$;

$$\therefore \quad x+y+2 = 4 \quad \cdots \quad (1)$$

$$3^{2x+1}.3^{y-1}=27\,; \quad \therefore \quad 3^{2x+y}=3^3\,;$$

$$\therefore \quad 2x+y=3 \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) সমাধান করিয়া,

$$x=1,\ y=1.$$

উদা. 6. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} x^y=y^x \\ x=2y \end{array}\right\}$ $\cdots$ (1) $\cdots$ (2)

(1) এ $x=2y$ লিখিয়া, $(2y)^y=y^{2y}$, অথবা $2^y.y^y=y^{2y}$,

বা, $2^y=\frac{y^{2y}}{y^y}=y^{2y-y}=y^y$; $\quad \therefore \quad y=2,$

$\therefore$ (2) হইতে, $x=4.$

উদা. 7. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} a^x+b^y=a+b \\ a^{x+2}+b^{y+2}=a^3+b^3 \end{array}\right\}$ $\cdots$ (1) $\cdots$ (2)

(1) হইতে, $\quad (a^x-a)+(b^y-b)=0 \qquad \cdots \quad (3)$

(2) হইতে, $\quad a^x.a^2+b^y.b^2=a^3+b^3,$

বা, $a^2(a^x-a)+b^2(b^y-b)=0 \qquad \cdots \quad (4)$

(3) এবং (4) এ, a^x-a র পরিবর্তে u, এবং b^y-b এর পরিবর্তে v লিখিয়া,

$$u+v=0 \text{ এবং } a^2u+b^2v=0\,;$$

সমাধান করিয়া, $u=0, v=0$; $\therefore$ $u=a^x-a=0$; $\therefore$ $x=1$;

এবং $\qquad v=b^y-b=0$; $\therefore$ $y=1.$

উদা. 8. সমাধান কর : $2^x+3^y+5^z=10 \qquad \cdots \quad (1)$

$$2^{x+1}+3^{y+1}+5^{z+1}=38 \qquad \cdots \quad (2)$$

$$2^{x+2}+3^y+5^z=16 \qquad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণ (2) এবং (3) কে যথাক্রমে

$$2.2^x+3.3^y+5.5^z=38$$

এবং $\qquad 2^2.2^x+3^y+5^z=16$, এইরূপে লেখা যায়।

$\therefore$ 2^x, 3^y এবং 5^z এর পরিবর্তে যথাক্রমে u, v এবং w লিখিলে, প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি নিম্নলিখিত আকারে পরিবর্তিত হয় :

$$u+v+w=10 \qquad \cdots \quad (4)$$

$$2u+3v+5w=38 \qquad \cdots \quad (5)$$

$$4u+v+w=16 \qquad \cdots \quad (6)$$

(4), (5) এবং (6) সমাধান করিয়া,

$$u=2,\ v=3,\ w=5.$$

$$\therefore\quad 2^x=u=2=2^1;\qquad \therefore\quad x=1;$$

$$3^y=v=3=3^1;\qquad \therefore\quad y=1;$$

$$5^z=w=5=5^1;\qquad \therefore\quad z=1.$$

প্রশ্নমালা 112

সমাধান কর :

1. $3^{x+2}=81.$

2. $4^x=2^{x+5}.$

3. $8^{x-1}=2^{x+3}.$

4. $2^{x+2}=\frac{1}{2}\ 4^{2x-3}.$

5. $3^{3x-2}=9^{\frac{1}{2}x}.$

6. $3^{x-1}+1=28.$

7. $3^{2x-1}+9=36.$

8. $2^{x+2}+2^{x+3}=24.$

9. $5^{x-2}=5^x-24.$

10. $2^{x-2}.\ 3^{x-3}=2.$

11. $(p-q)^{x-a}+q=p.$

12. $\left(\frac{a}{b}\right)^{x-1}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x-2}$

13. $\left.\begin{array}{l} a^{2x}.\ a^{3y+2}=a^{15} \\ b^{2y}.\ b^{3x+5}=b^{17} \end{array}\right\}.$

14. $\left.\begin{array}{l} 3^{4x}.\ 3^{3y+2}=3 \\ 4^{4y}.\ 4^{3x+11}=4^5 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} a^x.\ a^{y+1}=a^7 \\ a^{2y}.\ a^{3x+5}=a^{20} \end{array}\right\}.$

16. $\left.\begin{array}{l} 3^{4x}=9^{4y-\frac{2}{3}x} \\ 2^{6y-x}=8^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 3^{x+1}+2^y=35 \\ 3^x+2^{y+2}=41 \end{array}\right\}.$

18. $\left.\begin{array}{l} 2^{x-1}+3^{y-1}=5 \\ 3.\ 2^{x-2}+2.\ 3^{y-3}=3\frac{2}{3} \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} 2^{x-y}.\ 3^{x-2y}=2^y \\ 3^{x-2}.5^{x-1}=5^{3y+1}.3^{3y} \end{array}\right\}.$

20. $\left.\begin{array}{l} 2^x+3^y=11 \\ 3^y-2^x=-5 \end{array}\right\}.$

21. $\left.\begin{array}{l} a^x+b^y=a+b \\ a^{x-1}+b^{y-1}=2 \end{array}\right\}.$

22. $\left.\begin{array}{l} 3^x+5^y=8 \\ 3^{x+2}+5^{y+2}=152 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{aligned} &4^{x+y-z}=1 \\ &5^{4x-2y+z}=125 \\ &9^{x+3y+z}=3^{5x+6y+z} \end{aligned}\right\}.$

24. $\left.\begin{aligned} &a^x+b^y+c^z=3 \\ &la^x+mb^y+nc^z=l+m+n \\ &l^2a^x+m^2b^y+n^2c^z=l^2+m^2+n^2 \end{aligned}\right\}.$

25. $\left.\begin{aligned} &2^{x+y+z}=8^{x+z-y} \\ &5^{3y+2}=25^{x+z} \\ &3^{2z+2x+y}=9^{3z+y} \end{aligned}\right\}.$

26. $\left.\begin{aligned} &a^x=(x+y+z)^y \\ &a^y=(x+y+z)^z \\ &a^z=(x+y+z)^x \end{aligned}\right\}.$

27. $\left.\begin{aligned} &a^{x-4}.\,a^{1+y}=a \\ &b^{y-z}.\,b^{z-x}=b^2 \\ &c^{y-1}.\,c^{x-z}=c^3 \end{aligned}\right\}.$

সপ্তবিংশ অধ্যায়

অবঘাতন (Evolution), বর্গমূল (Square Root)

319. অবঘাতন (Evolution)

কোন রাশির মূল নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে **অবঘাতন** বলে।

320. বাস্তব (Real) এবং কল্পিত (Imaginary) রাশি

$+x$ এবং $-x$ উভয়ের বর্গই x^2, সুতরাং একটি রাশি, ধন কিংবা ঋণ যাহাই হউক না কেন, উহার বর্গ সর্বদাই ধন হইবে। এমন কোন রাশি নাই যাহার বর্গ ঋণ; অর্থাৎ ঋণ রাশির বর্গমূলকে **অরূপ** বা **কল্পিত** বলিয়া মনে করিতে হইবে; যেমন, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-x^2}$; ইহারা 'কল্পিত' রাশি।

যে হেতু, $(x)^4 = (-x)^4 = x^4$, $(x)^6 = (-x)^6 = x^6$ ইত্যাদি; সুতরাং যুগ্ম ঘাতযুক্ত ধন কিংবা ঋণ রাশি সর্বদাই ধন হইবে। এমন কোন রাশি নাই যাহার যুগ্ম ঘাত ঋণ, অতএব ঋণ রাশির যুগ্ম মূল 'কল্পিত'; যেমন, $\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[6]{-x^2}$ ইহারা কল্পিত রাশি। যে সকল রাশি কল্পিত; নয়, তাহারা বাস্তব।

$\sqrt{-1}$ এই কল্পিত রাশিটি সাধারণত 'i' অক্ষরটির দ্বারা সূচিত হয়। সুতরাং $\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{2} = i\sqrt{2}$; $\sqrt{-x^2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{x^2} = ix$ ইত্যাদি।

একটি বাস্তব এবং একটি কল্পিত রাশির যোগফল এবং বিয়োগফল উভয়ই কল্পিত রাশি; যেমন, a একটি বাস্তব রাশি এবং ib একটি কল্পিত রাশি হইলে, $a+ib$ একটি কল্পিত রাশি এবং $a-ib$ও একটি কল্পিত রাশি।

$a+ib$, $a-ib$, $x+iy$ প্রভৃতি আকারের রাশিগুলি **জটিল রাশি** (complex quantity) নামেও অভিহিত হয়। ia, ix প্রভৃতি আকারের

রাশিগুলিকে কখন কখন **বিশুদ্ধ** কল্পিত (pure imaginary) রাশিও বলা হয় ; বিশুদ্ধ কল্পিত রাশির বর্গ বাস্তব রাশি , যেমন, $(ia)^2 = -a^2$ ইত্যাদি ।

321. মূলসমূহের চিহ্ন

$$(+x)^2 = +x^2, \qquad (-x)^2 = +x^2,$$
$$(+x)^4 = +x^4, \qquad (-x)^4 = +x^4 \text{ ইত্যাদি ।}$$

উক্ত ফলগুলি হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, **কোন রাশির যুগ্মমূল ধনও হইতে পারে, ঋণও হইতে পারে** , যেমন, x^2 এর বর্গমূল $+x$ কিংবা $-x$.

পুনরায়, $(+x)^3 = +x^3$, $(-x)^3 = -x^3$,
$(+x)^5 = +x^5$, $(-x)^5 = -x^5$ ইত্যাদি ।

উক্ত ফলগুলি হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, **কোন রাশির চিহ্ন এবং উহার অযুগ্মমূলের চিহ্ন একই ।**

322. কোন রাশি সরল কিংবা মিশ্র যাহাই হউক না কেন, উহার দুইটি বর্গমূল, তিনটি ঘনমূল, চারটি চতুর্থ মূল এবং সাধারণভাবে, n-সংখ্যক n-তম মূল থাকে । মূলগুলি বাস্তবও হইতে পারে, কল্পিতও হইতে পারে । পরবর্তী উদাহরণসমূহে শুধু একটি করিয়া বাস্তব মূল নির্ণয় করা হইবে ।

যে হেতু, $\sqrt{x^2} = \pm x$, সুতরাং কোন রাশির বর্গমূলদ্বয় বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, কিন্তু উহাদের পরম মান (absolute value) পরস্পর সমান । সাধারণত, সরল রাশির ধন বর্গমূল এবং মিশ্র রাশির বর্গমূলদ্বয়ের মধ্যে যাহার প্রথম পদ ধন তাহাই নির্ণয় করা হয় । নির্ণীত মূলের পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিলেই অন্য মূলটি পাওয়া যায় ।

323. সরল রাশিসমূহের মূল-নির্ণয়

সূচক-নিয়ম-সাহায্যে অতি সহজেই সরল রাশিসমূহের মূল নির্ণয় করা যায় ।

উদা. 1. $-27a^6b^3c^4$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর :

$$\sqrt[3]{-27a^6b^3c^4} = (-27a^6b^3c^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-27)^{\frac{1}{3}}(a^6)^{\frac{1}{3}}(b^3)^{\frac{1}{3}}(c^4)^{\frac{1}{3}}$$ অনু. 316.

$$= -3a^2bc^{\frac{4}{3}}.$$ অনু. 315.

উদা. 2. $64x^4y^{-2}z^{-5}$ এর ষষ্ঠ মূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt[6]{64x^4y^{-2}z^{-5}} = (64x^4y^{-2}z^{-5})^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{6}}.$$

প্রশ্নমালা 113

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $9a^6b^2$.
2. $16x^4y^6z^8$.
3. $64x^4y^2z^{10}$.
4. $\dfrac{9x^2y^4}{16a^4b^6}$.
5. $\dfrac{36a^8m^7}{25b^5n^6}$.
6. $\dfrac{7a^{-3}b^5}{8x^2y^{-4}}$.
7. $\dfrac{27x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{75a^3b^{\frac{2}{3}}}$.
8. $\dfrac{20x^{-2}y^{-4}}{45a^{-3}b^{-6}}$.
9. $\dfrac{12a^2b^4}{27x^3y^3}$.

সরল কর :

10. $\sqrt[3]{8a^3b^3c^3}$.
11. $\sqrt[3]{27x^3y^6z^2p^2q^3}$.
12. $\sqrt[4]{16p^3q^3x^2y^2}$.
13. $\sqrt[5]{243a^{10}b^{15}c^{20}d^{25}}$.
14. $\sqrt[n]{x^{2n}y^{3n}z^{4n}}$.
15. $\sqrt[p]{a^{2p}b^{3p}c^{-p}x^{-4p}}$.

324. মিশ্র রাশিসমূহের বর্গমূল-নির্ণয়

নিম্নে বর্ণিত প্রক্রিয়াদ্বয়ের যে-কোন একটির সাহায্যে মিশ্ররাশির বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

প্রথম প্রক্রিয়া। পূর্ণ-বর্গরূপে প্রকাশ করিয়া মিশ্র রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $9a^2-30ab+25b^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$9a^2-30ab+25b^2=(3a)^2-2(3a)(5b)+(5b)^2$$
$$=(3a-5b)^2$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=3a-5b.$

দ্রষ্টব্য। $-(3a-5b)$, অর্থাৎ $(5b-3a)$ও একটি বর্গমূল।

উদা. 2. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}+1\right)^2.$$

সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $=x-\frac{1}{x}+1.$

উদা. 3. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের চারটি গুণনীয়ককে এরূপভাবে দুইটি দুইটি করিয়া একত্র করিয়া রাখ যাহাতে যুগ্ম-দ্বয়ের একটির গুণফলের x^2 এবং x-ঘটিত পদ যথাক্রমে অন্যটির গুণফলের x^2 এবং x-ঘটিত পদের সমান হয়। অতএব,

প্রদত্ত রাশি $=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$
$$=a(a+2)+1 \quad [x^2+3x \text{ এর পরিবর্তে } a \text{ লিখিয়া}]$$
$$=a^2+2a+1=(a+1)^2$$
$$=(x^2+3x+1)^2;\quad \because\ a=x^2+3x.$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=x^2+3x+1.$

উদা. 4. $3(3a^2-2ab+b^2)(a^2+3b^2)+b^2(a+4b)^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=3(3a^4+3b^4+10a^2b^2-2a^3b-6ab^3)+b^2(a^2+8ab+16b^2)$$
$$=9a^4-6a^3b+31a^2b^2-10ab^3+25b^4$$
$$=(9a^4+25b^4+30a^2b^2)-2ab(3a^2+5b^2)+a^2b^2$$
$$=(3a^2+5b^2)^2-2ab(3a^2+5b^2)+(ab)^2$$
$$=(3a^2-ab+5b^2)^2.$$

স্নতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $= 3a^2-ab+5b^2.$

প্রশ্নমালা 114

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $4a^2-80ab+400b^2.$
2. $9x^2-150xy+625y^2.$
3. $9a^4b^4+25a^6b^6-30a^5b^5.$
4. $\frac{1}{4}a^6+\frac{1}{3}a^3b^3+\frac{1}{9}b^6.$
5. $x+y-2\sqrt{xy}.$
6. $\frac{1}{9}a^4b^8+\frac{1}{16}a^6b^6+\frac{1}{6}a^5b^7.$
7. $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy.$
8. $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx+2xy.$
9. $4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx.$
10. $9a^4+4b^4+25c^4+12a^2b^2-20b^2c^2-30c^2a^2.$
11. $x^{-4}+9y^{-4}+6x^{-2}y^{-2}.$
12. $x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3.$
13. $x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$
14. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+3.$
15. $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}+2\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)-1.$
16. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right).$

17. $\left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2-14\left(a-\dfrac{1}{2a}\right)+47.$

18. $x^4+\dfrac{1}{x^4}+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2.$

19. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6.$

20. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1.$

21. $(2x-1)(2x-3)(2x-5)(2x-7)+16.$

22. $a^4b^2(a^2+b^2)+2a^2b(a-b)-2a^5b^3+1.$

23. $x^{-10}+x^{-8}+2x^{-9}+2x^{-5}+2x^{-4}+1.$

24. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy-2bcyz+2cazx.$

25. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\frac{3}{4}.$

26. $\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}-2\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)+3\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-4\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+5.$

27. $(x^2+8x+7)(2x^2-x-3)(2x^2+11x-21)$ এর বর্গমূলের গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিয়া রাখ।

325. দ্বিতীয় প্রক্রিয়া। নিম্নে বর্ণিত প্রক্রিয়াটি মিশ্র রাশিসমূহের বর্গমূল-নির্ণয়ের সাধারণ প্রক্রিয়া।

$x^2+2xy+y^2$ রাশিমালাটি ধরা যাউক। ইহার বর্গমূল $x+y$. নিম্নলিখিত উপায়ে এই মূলটি নির্ণয় করা যায়।

বর্গমূলের প্রথম পদ x রাশিমালার প্রথম পদের বর্গমূল। রাশিমালাটি হইতে x এর বর্গ বিয়োগ করিলে $2xy+y^2$, অর্থাৎ $y(2x+y)$ অবশিষ্ট থাকে।

অবশিষ্টের প্রথম পদ $2xy$ কে বর্গমূলের প্রথম পদ x এর দ্বিগুণ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল y হয়। ইহা বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ। ইহাকে $2x$ এর সহিত যোগ করিয়া যোগফল $2x+y$ কে নূতন ভাজক এবং y কে ভাগফল মনে করিলে

পূর্বলব্ধ অবশিষ্ট $y(2x+y)$ পাওয়া যায়। প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতভাবে প্রদর্শিত হইতে পারে :

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2xy+y^2 \; (\; x+y \\ & x^2 \\ \hline 2x+y \;) & 2xy+y^2 \\ & 2xy+y^2 \\ \hline \end{array}$$

প্রদত্ত রাশিমালা তিনের অধিক পদবিশিষ্ট হইলেও একই প্রক্রিয়া অবলম্বন করা হয়। সুতরাং বর্গমূল-নির্ণয়ের নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়মটি পাওয়া যায় :—

1. প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার মধ্যস্থ যে-কোন অক্ষরের ঘাতসমূহের অধঃক্রম কিংবা ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজাও।

2. রাশিমালাটির প্রথম পদের বর্গমূল নির্ণয় করিয়া সম্পূর্ণ রাশিমালার দক্ষিণ দিকে ভাগফলের ন্যায় স্থাপন কর। ইহাই নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ।

3. উক্ত মূলের বর্গকে ঐ রাশিমালা হইতে বিয়োগ কর এবং অবশিষ্টের প্রথম পদকে ঐ বর্গমূলেব দ্বিগুণ-দ্বাবা মনে মনে ভাগ কর। লব্ধ ফলটি নির্ণেয় বর্গমূলেব দ্বিতীয় পদ হইবে।

4. এই দ্বিতীয় পদকে পূর্বনির্ণীত প্রথম পদেব দ্বিগুণের সহিত যোগ কবিয়া যোগফলকে উক্ত অবশিষ্টের বাম দিকে ভাজকের ন্যায় স্থাপন কর।

5. এই ভাজককে বর্গমূলেব দ্বিতীয় পদ-দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল পূর্বোক্ত অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ কর।

6. বর্গমূলের প্রথম ও দ্বিতীয় পদকে একটি রাশি মনে করিয়া বর্গমূলের প্রথম পদ এবং প্রথম অবশিষ্টে প্রযুক্ত প্রক্রিয়া-অনুযায়ী কার্য কর। এইরূপে, যে পর্যন্ত কোন অবশিষ্ট না থাকে সে পর্যন্ত ভাগ করিতে থাক।

উদা. 1. $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l} & x^4+4x^3-2x^2-12x+9 \; (\; x^2+2x-3 \\ & x^4 \\ \hline 2x^2+2x \;) & 4x^3-2x^2-12x+9 \\ & 4x^3+4x^2 \\ \hline 2x^2+4x-3 \;) & -6x^2-12x+9 \\ & -6x^2-12x+9 \\ \hline \end{array}$$

নির্ণেয় বর্গমূল $= x^2+2x-3.$

উদা. 2. $x^4+\frac{1}{x^4}+8\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+14$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

রাশিমালাটিকে x এর ঘাতসমূহের অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইয়া বর্গমূল নির্ণয় করা হইল।

$$
\begin{array}{l}
x^4+8x^2+14-8x^{-2}+x^{-4}\,(x^2+4-x^{-2} \\
x^4 \\
2x^2+4\,)\,8x^2+14-8x^{-2}+x^{-4} \\
\quad 8x^2+16 \\
2x^2+8-x^{-2}\,)\,-2-8x^{-2}+x^{-4} \\
\quad -2-8x^{-2}+x^{-4}
\end{array}
$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=x^2+4-\frac{1}{x^2}$.

উদা. 3. $x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2y^{\frac{1}{3}}+1$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{l}
x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2y^{\frac{1}{3}}+1\,(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}-1,\ \text{নির্ণেয় বর্গমূল।} \\
x^{\frac{4}{3}} \\
2x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\,)\,2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2y^{\frac{1}{3}}+1 \\
\quad 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\qquad +y^{\frac{2}{3}} \\
2x^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{1}{3}}-1\,)\,-2x^{\frac{2}{3}}\qquad -2y^{\frac{1}{3}}+1 \\
\quad -2x^{\frac{2}{3}}\qquad -2y^{\frac{1}{3}}+1
\end{array}
$$

উদা. 4. $x^4+(x-y)(x-y-2)-2x^2(x-y-1)+1$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^4+(x-y)^2+1-2x^2(x-y)-2(x-y)+2x^2$
$=x^4-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1$, এ স্থলে $z=x-y$.

$$
\begin{array}{l}
x^4-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1\,(x^2-z+1 \\
x^4 \\
2x^2-z\,)\,-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1 \\
\quad -2x^2z+z^2 \\
2x^2-2z+1\,)\,2x^2-2z+1 \\
\quad 2x^2-2z+1
\end{array}
$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=x^2-z+1=x^2-(x-y)+1=x^2-x+y+1$.

প্রশ্নমালা 115

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca.$
2. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca.$
3. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx.$
4. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1.$
5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$
6. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy-2bcyz+2cazx.$
7. $9a^2+16b^2+c^2+24ab-6ac-8bc.$
8. $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca.$
9. $4x^4-12x^3+13x^2-6x+1.$
10. $9x^4-30x^3+13x^2+20x+4.$
11. $9x^4-6x^3-11x^2+4x+4.$
12. $x^6+2x^4+8x^3+x^2+8x+16.$
13. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{2}{3}x+1.$
14. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3.$
15. $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+9.$
16. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)+3.$
17. $x+\frac{1}{x}+2\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)+3.$
18. $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{6}}+1.$
19. $a^{2m}+a^{-2n}+2a^{m}a^{-n}.$
20. $4x^{-4}+9y^{-6}+12x^{-2}y^{-3}+4x^{-2}+6y^{-3}+1.$
21. $a^2x^{-4}+b^2y^{-6}+c^2z^{-8}+2abx^{-2}y^{-3}+2bcy^{-3}z^{-4}$
$+2cax^{-2}z^{-4}.$

22. $x+y+2\sqrt{xy}$.

23. $x+y+2\sqrt{xy}-2\sqrt{x}-2\sqrt{y}+1$.

24. $x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$.

25. $x^3-2x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x-2x^{\frac{1}{2}}+1$.

26. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd+2ac-2ad+2bd$.

27. $4x^2+9y^2+16z^2+u^2-12xy+16xz+4xu-24yz-6yu+8zu$.

28. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2+2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+2b^2d^2-2c^2d^2$.

29. $x^6+\frac{1}{x^6}+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20$.

30. $x^8+4x^6(1+x)+6x^4(1+x)^2+4x^2(1+x)^3+(1+x)^4$.

326. অসম্পূর্ণ বর্গ

নিম্নে অসম্পূর্ণ বর্গসম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রশ্ন সমাধান করা হইল।

উদা. 1. $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$ এর সহিত কত যোগ করিলে, যোগফলটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?

প্রদত্ত রাশির বর্গমূল নির্ণয় করা যাউক।

$$
\begin{array}{l|l}
 & 4a^4-12a^3-7a^2+23a+14 \,\big(\, 2a^2-3a-4 \\
 & 4a^4 \\
\hline
4a^2-3a & -12a^3-7a^2+23a+14 \\
 & -12a^3+9a^2 \\
\hline
4a^2-6a-4 & -16a^2+23a+14 \\
 & -16a^2+24a+16 \\
\hline
 & -a-2
\end{array}
$$

$-(a+2)$ অবশিষ্ট রহিয়াছে। যদি অবশিষ্ট শূন্য হইত, তবেই রাশিমালাটি একটি সম্পূর্ণ বর্গ হইত। রাশিমালাটির সহিত $a+2$ যোগ করিলে, অবশিষ্টটি শূন্য হয়, অর্থাৎ নূতন রাশিমালাটি একটি সম্পূর্ণ বর্গ হয়।

উদা. 2. কোন্ সর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+2bx+c$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?

বর্গমূল নির্ণয় করিয়া,

$$\begin{array}{r|l} & ax^2+2bx+c\;\big(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}} \\ & ax^2 \\ 2\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\;\big) & 2bx+c \\ & 2bx+\frac{b^2}{a} \\ & c-\frac{b^2}{a} \end{array}$$

সুতরাং $c-\frac{b^2}{a}=0$, অর্থাৎ $ac-b^2=0$, অর্থাৎ $b^2=ac$ হইলে, $ax^2+2bx+c$ একটি পূর্ণ বর্গ হইবে।

উদা. 3. $1-x^2$ এর বর্গমূল চারটি পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

দ্রষ্টব্য। যে রাশিমালা পূর্ণ বর্গ নহে তাহার বর্গমূল, বর্তমান উদাহরণের ন্যায়, ইচ্ছানুসারে কয়েকটি পদ পর্যন্ত নির্ণয় করা যাইতে পারে।

$$\begin{array}{r|l} & 1-x^2\;\big(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16} \\ & 1 \\ 2-\frac{x^2}{2}\;\big) & -x^2 \\ & -x^2+\frac{x^4}{4} \\ 2-x^2-\frac{x^4}{8}\;\big) & -\frac{x^4}{4} \\ & -\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{64} \\ 2-x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{16}\;\big) & -\frac{x^6}{8}-\frac{x^8}{64} \\ & -\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{16}+\frac{x^{10}}{64}+\frac{x^{12}}{256} \end{array}$$

নির্ণেয় বর্গমূল $= 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}$.

প্রশ্নমালা 116

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল চারটি পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর :

1. $1+2x$.
2. a^2+x^2.
3. $1+x+x^2$.
4. $1-x-x^2$.
5. প্রমাণ কর যে, $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$ একটি পূর্ণ বর্গ।
6. m এর মান কত হইলে, $x^4+6x^3+7x^2-6x+m$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?
7. x এর মান কত হইলে, $9x^4-12x^3+22x^2-13x+12$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?
8. x এর মান কত হইলে, $x^6-6x^5+17x^4-26x^3+22x^2+4x-3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?
9. প্রমাণ কর যে, $(x+a)(x+b)(x+2a-b)(x+2b-a)+(a-b)^4$ একটি পূর্ণ বর্গ।
10. $x^4+4x^3+10x^2+12x+3$ এর সহিত কত যোগ করিলে, যোগফলটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?
11. প্রমাণ কর যে, $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ একটি পূর্ণ বর্গ।
12. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(bz-cy)^2-(cx-az)^2-(ay-bx)^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।
13. প্রমাণ কর যে, x এবং y এর মান যাহাই হউক না কেন, $9x^6-12x^5y+10x^4y^2-10x^3y^3+5x^2y^4-2xy^5+y^6$ রাশিটি সর্বদাই একটি পূর্ণ বর্গ হইবে।
14. x এর মান কত হইলে, $4x^4+28x^3+25x^2-83x+29$ একটি পূর্ণ বর্গ হইবে ?

অষ্টাবিংশ অধ্যায়

করণী

327. করণী (Surd)

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^2-y^2}$ এইরূপ বাস্তব রাশিগুলির মূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না; ইহাদিগকে **করণী** বা **অমূলদ রাশি** (irrational quantity) বলে। যে সকল বাস্তব রাশি 'অমূলদ' নহে তাহাদিগকে **মূলদ রাশি** (rational quantity) বলে।

$\sqrt{x^2-y^2}$ একটি 'করণী'; কারণ ইহার মান (x এবং y অক্ষরে) ঠিক নির্ণয় করা যায় না। x এবং y এর কতকগুলি বিশেষ মান লইলে উহার মান ঠিক ঠিক নির্ণীত হইতে পারে। যেমন, যদি $x=5$, $y=3$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt{x^2-y^2}=4$.

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ এই রাশিগুলি করণী নহে, কারণ ইহাদের মান ঠিক ঠিক নির্ণীত হইতে পারে। ইহারা যথাক্রমে 2, 3 এবং $x-y$ এর সমান।

দ্রষ্টব্য। মূলদ রাশিরূপে প্রকাশ্য হইলেও অনেক সময়ে মূল-চিহ্নযুক্ত রাশিকেই করণীরূপে মনে করা হইয়া থাকে।

328. অমেয় রাশি (Incommensurable Quantity)

যে সমস্ত রাশিকে ধন বা ঋণ পূর্ণসংখ্যা কিংবা ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা যায় না তাহাদিগকে **অমেয় রাশি** কহে, কারণ কোন একক-সাহায্যেই ইহাদিগের প্রকৃত পরিমাণ নির্ণয় করা যায় না। (অনু. 291 দ্রষ্টব্য।)

উপরি লিখিত সংজ্ঞা হইতে প্রতীয়মান হইতেছে যে, করণীসমূহ 'অমেয়'; কিন্তু এমন অনেক অমেয় রাশিও আছে যাহারা করণী নহে।

329. পূর্ণ করণী (Complete Surd)

যে সকল করণীর কোন মূলদ (rational) সহগ থাকে না তাহাদিগকে **পূর্ণ করণী** কহে।

যে-কোন রাশিকেই পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $7\sqrt{11}$ এবং $10\sqrt[3]{5}$ কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$7\sqrt{11}=7\times 11^{\frac{1}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}\times 11^{\frac{1}{2}}$ অনু. 315.

$=(7^2\times 11)^{\frac{1}{2}}$ অনু. 316.

$=(49\times 11)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{539}.$

$10\sqrt[3]{5}=10\times 5^{\frac{1}{3}}=(10^3)^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}$ অনু. 315.

$=(10^3\times 5)^{\frac{1}{3}}$ অনু. 316.

$=(1000\times 5)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5000}.$

উদা. 2. $a^2b\sqrt[3]{b^3c}$ কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$a^2b\sqrt[3]{b^3c}=a^2b\times(b^3c)^{\frac{1}{3}}=(a^6b^3)^{\frac{1}{3}}\times(b^3c)^{\frac{1}{3}}$ অনু. 315.

$=(a^6b^3\times b^3c)^{\frac{1}{3}}$ অনু. 316.

$=\sqrt[3]{a^6b^6c}.$

উদা. 3. $\sqrt{405}$ এবং $\sqrt[3]{875}$ কে মূলদ সহগ এবং করণীর গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

$\sqrt{405}=\sqrt{81\times 5}=\sqrt{9^2\times 5}=(9^2)^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}$ অনু. 316.

$=9\sqrt{5}.$

$\sqrt[3]{875}=\sqrt[3]{125\times 7}=(5^3\times 7)^{\frac{1}{3}}$

$=5\times 7^{\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{7}.$

প্রশ্নমালা 117

1. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের কোন্‌গুলি প্রকৃত করণী ?

(i) $\sqrt{9}$; (ii) $\sqrt{27}$; (iii) $\sqrt[3]{27}$, (iv) $\sqrt[3]{64}$;
(v) $\sqrt{a^2+x^2}$; (vi) $\sqrt{(x^4-y^4)}$.

2. একটি সমকোণী (right-angled) সমদ্বিবাহু (isosceles) ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 1 হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার অতিভুজের (hypotenuse) দৈর্ঘ্য একটি অমেয় রাশি।

3. বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য মূলদ হইলে, উহার কর্ণ অমেয় হইবে।

4. একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য 3 ফুট, বিস্তার 2 ফুট এবং উচ্চতা 1 ফুট। প্রমাণ কর যে, উহার যে-কোন কোণ হইতে বিপরীত কোণের দূরত্ব একটি অমেয় রাশি।

5. একটি বর্গক্ষেত্রের কালি 250 বর্গগজ। প্রমাণ কর যে, ইহার বাহুর দৈর্ঘ্য ঠিক পরিমাপ করা যায় না।

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর :

6. $2\sqrt{6}$. 7. $3\sqrt{10}$. 8. $8\sqrt[3]{27}$.

9. $x^2\sqrt[5]{y}$. 10. $2a\sqrt[3]{xy}$. 11. $5a^3\sqrt[4]{b^3}$.

সরল কর :

12. $\sqrt{27}$. 13. $\sqrt{350}$. 14. $\sqrt[3]{270}$.

15. $\sqrt[3]{80}$. 16. $\sqrt[4]{112}$. 17. $\sqrt[5]{486}$.

18. $\sqrt[6]{x^{12}y^2}$. 19. $\sqrt[5]{-x^5y^{10}z^2}$. 20. $\sqrt[n]{x^{2n}y^n}$.

330. করণীর ক্রম (Order)

মূলনির্দেশক প্রতীক-দ্বারা করণীর ক্রম নিরূপিত হয়; যেমন, $\sqrt{2}$ একটি দ্বিতীয় ক্রমের করণী ; $a^{\frac{2}{3}}$ একটি তৃতীয় ক্রমের করণী ইত্যাদি।

দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি ক্রমের করণীসমূহ **দ্বিঘাত করণী, ত্রিঘাত করণী** ইত্যাদি নামেও অভিহিত হয়।

যখন কয়েকটি করণী একই ক্রমবিশিষ্ট হয় তখন উহাদিগকে **সমমূলীয়** (equiradical) বলা হয় ; যথা, $\sqrt[3]{2}$ এবং $x^{\frac{5}{3}}$ করণী দুইটি 'সমমূলীয়'।

331. বিভিন্ন ক্রমের করণীসমূহকে সমমূলীয় করণীসমূহে রূপান্তরিত-করণ

বিভিন্ন ক্রমের যে-কোন সংখ্যক করণীকে সমমূলীয় করণীসমূহে রূপান্তরিত করিলে, রূপান্তরিত করণীসমূহের 'ক্রম' প্রদত্ত করণীসমূহের ক্রমের ল. সা. গু.-র সমান হইবে।

উদাহরণ। $\sqrt[4]{3}$ এবং $\sqrt[5]{4}$ কে সমমূলীয় করণীতে রূপান্তরিত কর।

4 এবং 5 এর ল. সা. গু. 20. সুতরাং প্রদত্ত করণী দুইটির প্রত্যেককে 20-তম ক্রমবিশিষ্ট করণীতে রূপান্তরিত করিতে হইবে।

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = (3^5)^{\frac{1}{20}} \qquad \text{অনু. 315.}$$
$$= \sqrt[20]{243}.$$
$$\sqrt[5]{4} = 4^{\frac{1}{5}} = (4^4)^{\frac{1}{20}} \qquad \text{অনু. 315.}$$
$$= \sqrt[20]{256}.$$

332. করণীসমূহের তুলনা

সমমূলীয় পূর্ণ করণীসমূহে পরিবর্তিত করিয়া দুই বা তদধিক করণীর তুলনা করা যায়।

উদাহরণ। $\sqrt[4]{5}$ এবং $\sqrt[5]{6}$ এর মধ্যে কোন্‌টি বড় ?

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = (5^5)^{\frac{1}{20}} = (3125)^{\frac{1}{20}};$$
$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}} = (6^4)^{\frac{1}{20}} = (1296)^{\frac{1}{20}},$$
সুতরাং $\sqrt[4]{5} > \sqrt[5]{6}$.

333. সদৃশ এবং অসদৃশ করণী

একই অমূলদ গুণনীয়ক-বিশিষ্ট করণীসমূহকে **সদৃশ** (similar অথবা like) এবং বিভিন্ন অমূলদ গুণনীয়ক-বিশিষ্ট করণীসমূহকে **অসদৃশ** (dissimilar অথবা unlike) বলা হয়।

যেমন, $\sqrt{175}$ এবং $\sqrt{63}$ দুইটি সদৃশ করণী ; কারণ উহারা যথাক্রমে $5\sqrt{7}$ ও $3\sqrt{7}$ এর সমান এবং $5\sqrt{7}$ ও $3\sqrt{7}$ উভয়েরই অমূলদ গুণনীয়ক $\sqrt{7}$. $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ দুইটি অসদৃশ করণী।

প্রশ্নমালা 118

নিম্নলিখিত করণী-সমূহকে সমমূলীয় করণী-সমূহে রূপান্তরিত কর :

1. $\sqrt{5}$ এবং $\sqrt[3]{4}$.
2. $\sqrt[3]{5}$ এবং $\sqrt[5]{3}$.
3. $\sqrt[4]{5}$ এবং $\sqrt[6]{2}$.
4. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ এবং $\sqrt[6]{7}$.

নিম্নলিখিত করণীগুলি তুলনা কর :

5. $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt[3]{4}$.
6. $\sqrt[4]{5}$ এবং $\sqrt[3]{4}$.
7. $\sqrt[3]{5}$ এবং $\sqrt{3}$.
8. $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[3]{3}$.

প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত করণীগুলি সদৃশ :

9. $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$.
10. $\sqrt{75}$, $\sqrt{147}$.
11. $\sqrt{108}$, $\sqrt{300}$.
12. $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{1715}$.

প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত করণীগুলি অসদৃশ :

13. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{54}$.
14. $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{320}$.

334. করণী-সমূহের যোগ এবং বিয়োগ

দুই বা তদধিক সদৃশ করণীর বৈজিক যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের সাধারণ অমূলদ গুণনীয়কের সহগগুলির বৈজিক সমষ্টিকে উক্ত অমূলদ গুণনীয়ক-দ্বারা গুণ করিতে হয়। অসদৃশ করণী-সমূহের যোগফল একটি পদ-দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।

উদা. 1. $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ এবং $-3\sqrt{3}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}+(-3\sqrt{3})$$
$$=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\sqrt[3]{32}+5\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{1372}$.

$$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\times 4}=2\sqrt[3]{4}.$$
$$\sqrt[3]{1372}=\sqrt[3]{4\times 343}=7\sqrt[3]{4}.$$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালা $=2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{4}$
$=(2+5-7)\sqrt[3]{4}=0\times\sqrt[3]{4}=0.$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$.

$$\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{36\times 3}-\sqrt{25\times 3}$$
$$=\sqrt{6^2\times 3}-\sqrt{5^2\times 3}=6\sqrt{3}-5\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}.$$

প্রশ্নমালা 119

যোগ কর :

1. $3\sqrt{5}, -7\sqrt{5}$ এবং $2\sqrt{5}$.
2. $5\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ এবং $-8\sqrt{7}$.
3. $6\sqrt{2}, 8\sqrt{2}$ এবং $-3\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{12}, \sqrt{75}$ এবং $\sqrt{147}$.
5. $\sqrt{5}, \sqrt{20}$ এবং $-\sqrt{45}$.

সরল কর :

6. $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{98}$.
7. $\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$.
8. $2\sqrt{32}+4\sqrt{50}-6\sqrt{18}$.
9. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{192}$.
10. $2\sqrt[3]{54}+9\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}$.
11. $3\sqrt{4x^3}+5\sqrt{x^5}+2\sqrt{16x^7}$.
12. $2\sqrt{3x^3}-3\sqrt{3xy^2}+2\sqrt{12xz^2}$
13. $a\sqrt[3]{4a^3x}+2\sqrt[3]{-32xb^6}+c\sqrt[3]{500xc^3}$

335. সরল (Simple) এবং মিশ্র (Compound) করণী

একপদ করণীসমূহ অনেক সময় **সরল করণী** (Simple Surds) নামে অভিহিত হয়। '+' এবং '−' চিহ্ন-যুক্ত সরল করণীসমূহ, অথবা উক্ত চিহ্ন-যুক্ত মূলদ রাশি এবং সরল করণীসমূহ **মিশ্র করণী** (Compound Surds) নামে অভিহিত হয়। যথা, $5\sqrt{2}$ এবং $3\sqrt[3]{7}$, ইহারা 'সরল' করণী; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ এবং $5-3\sqrt{7}$, ইহারা 'মিশ্র' করণী।

336. করণী-সমূহের গুণন

সরল (সমমূলীয় এবং বিভিন্নমূলীয়) এবং মিশ্র করণী-সমূহের গুণনের নিয়ম নিম্নে প্রদত্ত হইল।

সমমূলীয় করণীসমূহের গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, করণীসমূহের মূলদ (rational) গুণনীয়কগুলির গুণফলকে অমূলদ (irrational) গুণনীয়কগুলির গুণফল-দ্বারা গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$ এবং $\sqrt{2}$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{7}\times\sqrt{2}$$
$$=2\times 3\times 1\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}$$
$$=6\sqrt{5\times 7\times 2} \qquad \text{অনু. 316.}$$
$$=6\sqrt{70}.$$

বিভিন্ন ক্রমের করণীসমূহের গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে প্রথমে অনু. 331 সাহায্যে সমমূলীয় করণীসমূহে রূপান্তরিত করিতে হয়, পরে উপরি-বর্ণিত নিয়মানুসারে এই রূপান্তরিত করণীসমূহের গুণফল নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 2. $2\sqrt[3]{2}$ কে $4\sqrt{6}$ দ্বারা গুণ কর।

$$2\sqrt[3]{2}\times 4\sqrt{6}=2(2^2)^{\frac{1}{6}}\times 4(6^3)^{\frac{1}{6}}$$
$$=2\times 4\times(4\times 216)^{\frac{1}{6}} \qquad \text{অনু. 316.}$$
$$=8\sqrt[6]{864}.$$

মিশ্র রাশিসমূহের গুণনের প্রক্রিয়া-অনুসারেই **মিশ্র করণীসমূহের** গুণন-ক্রিয়া সাধিত হয়।

উদা. 3. $2+\sqrt{3}$ কে $3-\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})$$
$$=2\times3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$$
$$=6+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

উদা. 4. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}$ কে $2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ দ্বারা গুণ কর।

$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3})(2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$$
$$=2\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}+2\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}$$
$$=2\times(2^3)^{\frac{1}{6}}\times(2^2)^{\frac{1}{6}}+2\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}+(2\times3)^{\frac{1}{3}}+(3^4)^{\frac{1}{12}}\times(3^3)^{\frac{1}{12}}$$
$$=2(8\times4)^{\frac{1}{6}}+2(4\times3)^{\frac{1}{4}}+6^{\frac{1}{3}}+(81\times27)^{\frac{1}{12}}$$
$$=2\sqrt[6]{32}+2\sqrt[4]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[12]{2187}.$$

উদা. 5. $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ কে $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ দ্বারা গুণ কর।

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})$$
$$=2-\sqrt{2}\sqrt{7}+\sqrt{2}\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{7}$$
$$=2-7=-5.$$

উদা. 6. $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2$$
$$=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})(2\sqrt{5})+(2\sqrt{5})^2$$
$$=3-4\sqrt{15}+20$$
$$=23-4\sqrt{15}.$$

উদা. 7. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})^2$$
$$=(\sqrt{a+x})^2+(\sqrt{a-x})^2-2\sqrt{a+x}\,.\sqrt{a-x}$$
$$=(a+x)+(a-x)-2\sqrt{(a+x)(a-x)},$$
$$=2a-2\sqrt{a^2-x^2}.$$

প্রশ্নমালা 120

গুণ কর :

1. $\sqrt{2}$ কে $\sqrt{3}$ দ্বারা। 2. $\sqrt{3}$ কে $5\sqrt{2}$ দ্বারা।

3. $\sqrt{6}$ কে $3\sqrt{7}$ দ্বারা। 4. $\sqrt[3]{2}$ কে $\sqrt[3]{3}$ দ্বারা।

5. $\sqrt[4]{7}$ কে $\sqrt[4]{3}$ দ্বারা। 6. $\sqrt[3]{2}$ কে $\sqrt{3}$ দ্বারা।

7. $\sqrt{20}$ কে $\sqrt{80}$ দ্বারা। 8. $\sqrt{45}$ কে $\sqrt{75}$ দ্বারা।

9. $\sqrt[3]{4}$ কে $\sqrt[4]{7}$ দ্বাবা।

সরল কব :

10. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{9}$. 11. $\sqrt[3]{5} \times 5$. 12. $\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{270}$.

13. $\sqrt[4]{112} \times \sqrt[4]{240}$. 14. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{6}$. 15. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{2}$.

16. $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[6]{2}$. 17. $\sqrt[5]{2} \times \sqrt[10]{9}$. 18. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{12}$.

19. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$. 20. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}$.

21. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{9} \times \sqrt[9]{27}$. 22. $2\sqrt{2} \times 3\sqrt[3]{3}$.

23. $\sqrt{ax^2} \times \sqrt{bx^2} \times \sqrt{cx^2}$. 24. $2\sqrt[3]{a^3x} \times 3\sqrt[3]{b^3x}$.

25. $\sqrt[4]{a^2b^2} \times \sqrt[4]{2b^2c^2} \times \sqrt[4]{8c^2a^2}$.

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর :

26. $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$. 27. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

28. $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$. 29. $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$.

30. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$. 31. $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

32. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. 33. $(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)$.

34. $(\sqrt{a}+\sqrt{x})(2\sqrt{a}+3\sqrt{x})$.

35. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

36. $(\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{6})$.

37. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$.

38. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(3\sqrt{y}-4\sqrt{z})$.

39. $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1)$.

40. $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt{5})$.

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গ নির্ণয় কর :

41. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$. 42. $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$. 43. $8\sqrt{5}+3\sqrt{8}$.

44. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$. 45. $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$.

46. $\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}$. 47. $\sqrt{a^2-x^2}+x$.

48. $3\sqrt{x^2+2}-2\sqrt{x^2+3}$.

সরল কর :

49. $(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})(a+\sqrt{a+x})$.

50. $(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$.

51. $(a\sqrt{b^2x^2-1}-b\sqrt{1-a^2x^2})(a\sqrt{b^2x^2-1}+b\sqrt{1-a^2x^2})$.

337. করণী-নিরসন-প্রক্রিয়া (Rationalisation)

সরল কিংবা মিশ্র করণীকে কোন উপযুক্ত রাশিদ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিবর্তিত করিবার প্রক্রিয়াকে **করণী-নিরসন-প্রক্রিয়া** বলে।

মূলদ রাশিতে পরিবর্তিত করিবার জন্য করণীকে যে রাশি-দ্বারা গুণ করা হয় তাহাকে **করণী-নিরসক** (rationalising) গুণনীয়ক বলা হয়।

উদা. 1. $3\sqrt{7}$ করণীটিকে নিরসন কর।

$3\sqrt{7}$ কে $\sqrt{7}$ দ্বারা গুণ করিলে,

$3\sqrt{7}\times\sqrt{7}=3\times7=21$ একটি মূলদ রাশি।

এ স্থলে $\sqrt{7}$ নিরসক গুণনীয়ক।

উদা. 2. $2\sqrt{3}-4\sqrt{5}$ রাশিমালার করণী নিরসন কর।

$$(2\sqrt{3}-4\sqrt{5})(2\sqrt{3}+4\sqrt{5})$$
$$=(2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{5})^2$$
$$=12-80=-68$$ একটি মূলদ রাশি।

এ স্থলে $2\sqrt{3}+4\sqrt{5}$ নিরসক গুণনীয়ক।

338. বিপরীত করণী (Conjugate Surd)

একই পদদ্বয়বিশিষ্ট দুইটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর পদদ্বয়-মধ্যস্থ চিহ্ন দুইটি পরস্পর বিভিন্ন হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির বিপরীত করণী বলে ; যথা, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ করণী দুইটির একটি অপরটির বিপরীত; $\sqrt{a}+\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{a}-\sqrt{x}$ এর একটি অপরটির বিপরীত ; ইত্যাদি ।

উপপাদ্য। দুইটি বিপরীত করণীর গুণফল একটি মূলদ রাশি ।

মনে কর, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ দুইটি বিপরীত করণী। তাহা হইলে $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ একটি মূলদ রাশি ।

339. করণীঘটিত ভগ্নাংশের সরলীকরণ

এইরূপ ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে উহার হরকে উপযুক্ত করণী-নিরসক গুণনীয়ক-দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিবর্তিত করাই সুবিধাজনক ।

যদি হর একটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী হয়, তবে অনু. 338 এর উপপাদ্য-অনুসারে উহাকে উহার বিপরীত করণী-দ্বারা গুণ করিলে উহা একটি মূলদ রাশিতে পরিবর্তিত হইবে ।

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$.

$$\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

উদা. 2. $3\sqrt{7}+5\sqrt{2}$ কে $4\sqrt{3}$ দ্বারা ভাগ কর ।

$$\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{7}+5\sqrt{2})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{21}+5\sqrt{6}}{12}=\frac{1}{4}\sqrt{21}+\frac{5}{12}\sqrt{6}.$$

উদা 3. সরল কর : $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}$.

$$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{2-1}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{3}}$.

হর $=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{-2}=-4+\sqrt{15}.$

উদা. 5. সরল কর :

$$\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}}.$$

এ স্থলে, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12-18}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{-6}$;

$\dfrac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{18-80}=\dfrac{3\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{-62}$;

$\dfrac{1}{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{80-12}=\dfrac{4\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{68}.$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{34}\right)\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{62}\right)\sqrt{2}+\left(\frac{1}{17}+\frac{2}{31}\right)\sqrt{5}$

$$=\frac{14\sqrt{2}}{31}+\frac{65\sqrt{5}}{527}-\frac{37\sqrt{3}}{102}.$$

উদা. 6. সরল কর : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$$=\frac{x^2+x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}-x^2-(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$$

$$=4x\sqrt{x^2-1}.$$

প্রশ্নমালা 121

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি-দ্বারা ভাগ কর :

1. $\sqrt{3},\ \sqrt{2}$.
2. $\sqrt{3},\ \sqrt{5}$.
3. $2\sqrt{7},\ \sqrt{3}$.
4. $3\sqrt{5},\ 2\sqrt{7}$.
5. $\sqrt[3]{4},\ \sqrt{3}$.
6. $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{2}$.
7. $\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}$.
8. $\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{5}$.
9. $3\sqrt{2}+4\sqrt{7},\ \sqrt{6}$.
10. $\sqrt{80}+\sqrt{75},\ \sqrt{2}$.

পরবর্তী প্রত্যেক ভগ্নাংশকে মূলদ হরবিশিষ্ট তুল্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :

11. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.
12. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$.
13. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{3}}$.
14. $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.
15. $\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-3}$.
16. $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.
17. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.
18. $\dfrac{x+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{x-\sqrt{z}}$.
19. $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
20. $\dfrac{4+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

সরল কর :

21. $\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$.
22. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$.
23. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$.
24. $\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2+b^2}}$.
25. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{27}+\sqrt{63}-\sqrt{28}-\sqrt{48}}$.

26. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{75}+\sqrt{50}-\sqrt{48}-\sqrt{32}}$.

27. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

28. $\dfrac{1}{4(1+\sqrt{x})}+\dfrac{1}{4(1-\sqrt{x})}+\dfrac{1}{2(1+x)}$.

29. $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$.

30. নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর :

(*i*) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$. (*ii*) $\dfrac{3\sqrt{5}+2}{2+\sqrt{5}}$.

340. দ্বিঘাত করণীর ধর্ম

নিম্নলিখিত উপপাদ্যসমূহে দ্বিঘাত করণীর অতি প্রয়োজনীয় কতকগুলি ধর্ম প্রমাণিত হইবে।

উপপাদ্য I. মূলদ রাশি কখনও করণীর সমান হইতে পারে না।

এই উপপাদ্যটি করণীর সংজ্ঞা (অনু. 327) হইতে প্রতীয়মান হয়। সুতরাং যদি $a=\sqrt{b}$ হয়, তাহা হইলে উভয় পক্ষই শূন্য হইবে, অর্থাৎ $a=0$, $b=0$.

উপপাদ্য II. যদি $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হয়, তাহা হইলে $a=x$ এবং $b=y$ হইবে।

যদি a, x এর সমান না হয়, তাহা হইলে মনে কর, $a=x+c$; তাহা হইলে প্রদত্ত সর্ত অনুসারে,

$$x+c+\sqrt{b}=x+\sqrt{y};$$

$$\therefore \quad c+\sqrt{b}=\sqrt{y};$$

$$\therefore \quad c^2+2c\sqrt{b}+b=y;$$

$$\therefore \quad \sqrt{b}=\frac{y-c^2-b}{2c};$$

ইহা অসম্ভব, কারণ করণী কখনও মূলদ রাশির সমান হইতে পারে না (উপ. I);

সুতরাং, $a=x$; $\therefore$ $b=y$.

অনুসিদ্ধান্ত। যদি $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হয়, তাহা হইলে

$$a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}.$$

উপপাদ্য III. একটি দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদ রাশি এবং একটি দ্বিঘাত করণীর বৈজিক সমষ্টির সমান হইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তাহা হইলে মনে কর,

$$\sqrt{a}=x+\sqrt{y}.$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $a=x^2+y+2x\sqrt{y}$,

বা, $$\sqrt{y}=\frac{a-x^2-y}{2x};$$

ইহা অসম্ভব, কারণ করণী কখনও মূলদ রাশির সমান হইতে পারে না (উপ. I).

উপপাদ্য IV. যদি $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$;

$\therefore$ উপপাদ্য II অনুসারে, উভয় পক্ষের মূলদ এবং অমূলদ রাশি সমিত করিয়া,

$$a=x+y \quad \text{এবং} \quad \sqrt{b}=2\sqrt{xy};$$

$$\therefore \quad a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2;$$

$$\therefore \quad \sqrt{(a-\sqrt{b})}=\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

এখানে বাম পক্ষ ধনরাশি; সুতরাং $x>y$ হইলে দক্ষিণ পক্ষে + চিহ্ন এবং $x<y$ হইলে দক্ষিণ পক্ষে − চিহ্ন হইবে।

341. $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয়

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$

উভয় পক্ষের মূলদ এবং অমূলদ রাশি সমিত করিয়া (উপ. II),

$$a=x+y \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং $$\sqrt{b}=2\sqrt{xy} \qquad \cdots \qquad (2)$$

(2) হইতে, $$4xy=b \qquad \cdots \qquad (3)$$

(1) হইতে, $$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b\ ;$$

$$\therefore \quad x-y=\sqrt{a^2-b} \qquad \cdots \qquad (4)$$

(1) এবং (4) হইতে, $$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-b} \end{array}\right\}$$

এই দুই সমীকরণ হইতে,

$$x=\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b}),$$
$$y=\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}).$$

সুতরাং $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$.

দ্রষ্টব্য। (4) এ $x-y=-\sqrt{a^2-b}$ লিখিলেও একই ফল পাওয়া যায়।

উদা. 1. $5+2\sqrt{6}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $$\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

বর্গ করিয়া, $$5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}\ ;$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ xy=6 \end{array}\right\} \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=25-24=1\ ;$$

$$\therefore \quad x-y=1 \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে, $x=3,\ y=2$;

$$\therefore \quad \sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

দ্রষ্টব্য। (2) এ $x-y=-1$ লিখিলেও একই ফল পাওয়া যায়।

উদা. 2. $19-6\sqrt{2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

তাহা হইলে $19-6\sqrt{2}=x+y-2\sqrt{xy}$.

উভয় পক্ষের মূলদ এবং অমূলদ রাশি সমিত করিয়া,

$$\left.\begin{array}{r} x+y=19 \\ xy=18 \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$\therefore$ $$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=361-72=289,$$

$\therefore$ $$x-y=17. \quad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং $$x=18, \quad y=1;$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $$=\sqrt{18}-\sqrt{1}$$
$$=3\sqrt{2}-1.$$

দ্রষ্টব্য। (2) এ $x-y=-17$ লিখিলে, উপরি লিখিত ফলটিই পাওয়া যায়, কিন্তু পূর্বে একটি ঋণ-চিহ্ন বসে।

উদা. 3. $11+6\sqrt{2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$x+y+2\sqrt{xy}$ এর বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; সুতরাং $a+2\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে এমন দুইটি রাশি x এবং y নির্ণয় করিতে হয় যাহাতে, $x+y=a$ এবং $xy=b$ হয়। প্রদত্ত রাশিটি পর্যবেক্ষণ করিয়াই অনেক সময় উক্ত রাশিদ্বয় নির্ণয় করা যায়; যেমন, বর্তমান উদাহরণে দেখা যাইতেছে,

$$11+6\sqrt{2}=11+2\sqrt{18}.$$

এ স্থলে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যে, সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 11 এবং গুণফল 18 হয়; সংখ্যা দুইটি 9 এবং 2. সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $=3+\sqrt{2}$.

উদা. 4. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x+\sqrt{x^2-y^2}=a+b+2\sqrt{ab}$,

$$\therefore \quad a+b=x \quad \text{এবং} \quad 4ab=x^2-y^2;$$

$$\therefore \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-(x^2-y^2)=y^2;$$

$$\therefore \quad a-b=y \quad \cdots \quad (1)$$

অতএব, $a+b=x$ এবং $a-b=y$.

সমাধান করিয়া, $a=\frac{x+y}{2}$; $b=\frac{x-y}{2}$;

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{2}}$.

দ্রষ্টব্য 1. (1) এ $a-b=-y$ ধরিলেও একই ফল পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য 2. ঠিক এই উপায়ে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{\frac{x-y}{2}}.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}$
$=\sqrt{2x}$.

বাম পক্ষের বর্গ

$=y+\sqrt{2xy-x^2}+y-\sqrt{2xy-x^2}$
$+2(\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}})(\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}})$

$=2y+2\sqrt{y^2-(\sqrt{2xy-x^2})^2}$

$=2y+2\sqrt{y^2-2xy+x^2}$

$=2y+2\sqrt{(x-y)^2}$

$=2y+2(x-y)$

$=2x$;

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\sqrt{2x}$.

দ্রষ্টব্য। $\sqrt{(x-y)^2}=\pm(x-y)$; কিন্তু বর্গমূলের পূর্বে ঋণ-চিহ্ন লইলে অভেদটি প্রমাণিত হইবে না।

উদা. 6. যদি $x=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ এবং $y=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তাহা হইলে $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$ এর মান কত ?

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{12}{4}=3.$$

$$x-y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}.$$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{5+9}{3\sqrt{5}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{15}.$

342. $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এর বর্গমূল-নির্ণয়

প্রদত্ত রাশির কোন বর্গমূল থাকিলে তাহা $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ এর আকার-বিশিষ্ট হইবে।

অতএব, $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

$$=(x+y+z)+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy};$$

$\therefore\ x+y+z=a,\ 4yz=b,\ 4zx=c$ এবং $4xy=d$ ... (1)

এইরূপ ধরা যাইতে পারে।

(1) এর শেষ তিনটি সমীকরণ হইতে, $64x^2y^2z^2=bcd$.

$$\therefore\ 8xyz=\sqrt{bcd} \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ (2) কে (1) এর শেষ তিনটি সমীকরণের প্রত্যেকটির দ্বারা ভাগ করিয়া, যথাক্রমে,

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}},\ y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}},\ z=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}.$$

x, y, z এর এই তিনটি মান-দ্বারা,

$x+y+z=a$ সমীকরণটি সিদ্ধ হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}=a$ হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ, $bc+cd+bd=2a\sqrt{bcd}$ হওয়া প্রয়োজন ... (3)

অতএব, (3) এর সর্তটি সিদ্ধ না হইলে প্রদত্ত রাশির $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকার-বিশিষ্ট বর্গমূল থাকিবে না।

উদা. $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$6\sqrt{2}=\sqrt{72}$, $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$ এবং $2\sqrt{6}=\sqrt{24}$.

সুতরাং এ স্থলে, $a=11$, $b=72$, $c=48$ এবং $d=24$.

এক্ষণে, $bc+cd+db=72\times48+48\times24+24\times72=6336$;

এবং $2a\sqrt{bcd}$ $=2\times11\times\sqrt{72\times48\times24}$

$=2\times11\times\sqrt{6\times12\times4\times12\times6\times4}$

$=2\times11\times\sqrt{6^2\times12^2\times4^2}$

$=2\times11\times6\times12\times4=6336.$

সুতরাং এ স্থলে (3) এর সর্তটি সিদ্ধ হইয়াছে, অতএব প্রদত্ত রাশির একটি বর্গমূল আছে।

মনে কর, $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$;

পূর্বোক্ত উদাহরণের ন্যায়,

$x+y+z=11$, $4yz=72$, $4zx=48$ এবং $4xy=24$ ... (1)

শেষের সমীকরণ তিনটি হইতে, $64x^2y^2z^2=72\times48\times24$;

$\therefore\ xyz=36$ ... (2)

[$xyz=-36$ ধরিলে অভীষ্ট ফল পাওয়া যায় না।]

(2) কে (1) এর শেষের তিনটির প্রত্যেকটির দ্বারা ভাগ করিয়া,

$x=2$, $y=3$ এবং $z=6$.

x, y, z এর এই তিনটি মানদ্বারা $x+y+z=11$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়;

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

প্রশ্নমালা 122

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $3-2\sqrt{2}$.
2. $11-6\sqrt{2}$.
3. $4-2\sqrt{3}$.
4. $9-4\sqrt{5}$.
5. $5-2\sqrt{6}$.
6. $13-4\sqrt{10}$.

7. $39-12\sqrt{3}$. 8. $14-6\sqrt{5}$. 9. $23-4\sqrt{15}$.

10. $12-2\sqrt{35}$. 11. $7-2\sqrt{6}$. 12. $19-8\sqrt{3}$.

13. $1+2\sqrt{a-a^2}$. 14. $2a+2\sqrt{a^2-1}$.

15. $2a-2\sqrt{a^2-x^2}$. 16. $2a-b+2\sqrt{a^2-ab}$.

17. $2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}$.

18. $\frac{1}{2}(x-z)+\sqrt{xy+yz-zx-y^2}$.

19. $10+\sqrt{24}-\sqrt{40}-\sqrt{60}$.

20. $x+3y+4+4\sqrt{x}-4\sqrt{3y}-2\sqrt{3xy}$.

সরল কর :

21. $\dfrac{1}{\sqrt{(7-4\sqrt{3})}}$. 22. $\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

23. $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

24. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}=\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}.$$

25. $x+y+z+2\sqrt{zx+yz}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

26. যদি $x=\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$ হয়, তাহা হইলে $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2$ এর মান কত ?

27. যদি $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{2x\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ এর মান কত ?

28. যদি $x=\frac{4}{5}a$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ এর মান কত ?

343. করণীঘটিত কতিপয় দুরূহ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. সরল কর :

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\cdots\cdots}}}}\ \text{অসীম পর্যন্ত}$$

মনে কর, $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\cdots\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া,

$$x^2=a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\cdots\cdots}}}}\ \text{অসীম পর্যন্ত}$$

$$=a\sqrt[3]{bx}\ ;$$

উভয় পক্ষ ঘন করিয়া, $x^6=a^3bx$;

উভয় পক্ষ x দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^5=a^3b$; $\therefore\ x=a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

অতএব প্রদত্ত রাশির মান $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

উদা. 2. সরল কর :

$$(\sqrt{1-a^2}.\ \sqrt{1-x^2}+ax)^2-2ax(\sqrt{1-a^2}.\ \sqrt{1-x^2}+ax)+x^2.$$

$(\sqrt{1-a^2}.\ \sqrt{1-x^2}+ax)=X$ এবং $ax=Y$ লিখিয়া,

প্রদত্ত রাশি $=X^2-2XY+x^2$

$=(X^2-2XY+Y^2)+(x^2-Y^2)$

$=(X-Y)^2+(x^2-Y^2)$

$=(1-a^2)(1-x^2)+(x^2-a^2x^2)=1-a^2.$

উদা. 3. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে, x^3-6x^2+6x-2 এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

$$x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}},$$

বা $$x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}+1)\ ;$$

উভয় পক্ষ ঘন করিয়া,

$$x^3-6x^2+12x-8=2(2^{\frac{1}{3}}+1)^3,$$

বা
$$x^3-6x^2+6x-2=2(2^{\frac{1}{3}}+1)^3-6x+6$$
$$=2(3+3.\,2^{\frac{2}{3}}+3.\,2^{\frac{1}{3}})-6x+6$$
$$=6(2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}-x)=0.$$

প্রশ্নমালা 123

1. $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

2. $\dfrac{7}{2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{4}}+1}$ কে মূলদ হরবিশিষ্ট আকারে পরিবর্তিত কর।

3. $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ এবং $y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ হইলে, x^3+y^3 এর মান কত হইবে?

4. $x=2+\sqrt{3}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}=2(1-\sqrt{3}).$$

5. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ হইলে, $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ এর মান কত হইবে?

6. $x=\sqrt{(a-2)^2-1}$ হইলে,
$$\frac{1+x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x}{1-x+\sqrt{1+x^2}}$$ এর মান কত হইবে?

7. $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{x}=0$, এই সমীকরণের করণী নিরসন কর।

8. প্রমাণ কর যে,
$$\sqrt{[a\sqrt{\{a\sqrt{(a\cdots\cdots\text{অসীম পর্যন্ত})}\}}]}=a.$$

9. যদি $c=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4a^2b^2c^2$.

10. $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+\dfrac{5}{2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

11. সরল কর :

$$\frac{\sqrt[3]{64x^6-48x^4+12x^2-1}-\sqrt{16x^4-64x^3+24x^2+80x+25}}{4x^2-12x-7}.$$

12. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=a+x+\sqrt{ax+x^2}$.

13. যদি

$$\sqrt{\{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}+\sqrt{\{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}=2a$$ হয়,

তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

14. যদি $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$bx^2-ax+b=0.$$

15. সরল কর :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}.$$

344. অমূলদ সমীকরণ (Irrational Equation)

সমীকরণের মধ্যে অজ্ঞাত রাশি কিংবা অজ্ঞাত রাশিযুক্ত কোন রাশিমালা মূল চিহ্নযুক্ত হইলে, সমীকরণকে **অমূলদ সমীকরণ** বলা হয়।

যেমন, $\sqrt{x}=2$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$, ইহারা 'অমূলদ সমীকরণ'।

এ স্থলে প্রধানত একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট এবং দ্বিঘাত করণীঘটিত অমূলদ সমীকরণ-সমাধানের প্রক্রিয়া আলোচিত হইবে।

নিম্নের উদাহরণসমূহ হইতে প্রক্রিয়াগুলি সুস্পষ্ট হইবে।

উদা 1. সমাধান কর : $\sqrt{x}+1=\sqrt{x+7}$.

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x+1+2\sqrt{x}=x+7$;

পক্ষান্তর করিয়া, $2\sqrt{x}=6$,

বা $\sqrt{x}=3$, বা $x=9$.

উদা. 2. সমাধান কর : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\sqrt{x-1}=5-\sqrt{x-6}$,

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x-1=25+(x-6)-10\sqrt{x-6}$,

বা $10\sqrt{x-6}=20$, বা $\sqrt{x-6}=2$, বা $x-6=4$; $\therefore$ $x=10$.

যে প্রক্রিয়া-অনুসারে সমীকরণটি সমাধান করা হইয়াছে তাহাকে **পক্ষান্তরী-করণ-প্রক্রিয়া** (method of transposition) বলা হয়।

উদা. 3. সমাধান কর :

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+2}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x+6}.$$

$(3x+1)-(5x+2)=(4x+5)-(6x+6)$ একটি অভেদ।

সুতরাং $$\frac{(3x+1)-(5x+2)}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+2}}=\frac{(4x+5)-(6x+6)}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x+6}};$$

$$\therefore \quad \sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+2}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{6x+6}.$$

প্রদত্ত সমীকরণের সহিত শেষোক্ত সমীকরণ যোগ করিয়া,

$$2\sqrt{3x+1}=2\sqrt{4x+5},$$

বা $3x+1=4x+5$, বা $x=-4$.

এ স্থলে যে প্রক্রিয়া অবলম্বিত হইয়াছে তাহাকে **অভেদ-মূলক-প্রক্রিয়া** (method of identity) বলা হয়।

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$.

'যোগ এবং ভাগ ক্রিয়ার' (অনু. 298) সাহায্যে,

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2+1}{2-1},$$

বা $$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=3;$$

বর্গ করিয়া, $$\frac{x+1}{x-1}=9,$$

বা $$x+1=9x-9,$$

বা $$8x=10; \quad \therefore\ x=\tfrac{5}{4}.$$

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ এবং ভাগক্রিয়া-ঘটিত** প্রক্রিয়া বলা যায়।

উদা. 5. সমাধান কর : $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}.$

প্রদত্ত সমীকরণে $x=u^2$ লিখিয়া,

$$\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u-2}=\frac{3}{u-3},$$

বা $$\frac{1}{u-1}-\frac{2}{u-3}=\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u-2},$$

বা $$\frac{-(u+1)}{u-1}=\frac{1}{u-2},$$

বা $$u^2=3; \quad \therefore\ x=u^2=3.$$

উদা. 6. সমাধান কর: $\sqrt{\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{b}}+9\sqrt{\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{b}}=6\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}}$

সমীকরণটিতে $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{b}=X$ এবং $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{b}=Y$ লিখিয়া,

$$\sqrt{X}+9\sqrt{Y}=6\sqrt[4]{XY};$$

বর্গ করিয়া, $$X+81Y+18\sqrt{XY}=36\sqrt{XY};$$

পক্ষান্তর করিয়া, $$X+81Y-18\sqrt{XY}=0;$$

বা $(\sqrt{X}-9\sqrt{Y})^2=0$;

$\therefore$ $\sqrt{X}-9\sqrt{Y}=0,$

বা $X=81Y$;

X এবং Y এর মান দুইটি লিখিয়া, $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}=81\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{b}\right)$;

$\therefore$ $80\frac{x}{a}=82\frac{a}{b}$; $\therefore$ $x=\frac{82}{80}\cdot\frac{a^2}{b}=\frac{41}{40}\cdot\frac{a^2}{b}$.

উদা. 7. যদি $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x+y}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $x=0$, অথবা $y=0$, অথবা $x+y=0$.

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x+y}$;

উভয় পক্ষ ঘন করিয়া, $x+y+3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=x+y,$

বা $3\sqrt[3]{xy}\,\sqrt[3]{x+y}=0$;

3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\sqrt[3]{xy(x+y)}=0$;

ঘন করিয়া, $xy(x+y)=0$;

$\therefore$ $x=0$, অথবা $y=0$, অথবা $(x+y)=0$.

345. অবান্তর বীজ (Extraneous Solution)

শেষোক্ত অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রক্রিয়াসমূহ-সাহায্যে কোন অমূলদ সমীকরণের করণী-নিরসন (rationalisation) করিলে যে সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার বীজসমূহের প্রত্যেকটি প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নাও হইতে পারে।

উদাহরণ-স্বরূপ নিম্নের উদাহরণটি ধরা যাউক :

$$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=1 \qquad \cdots \quad (1)$$

পক্ষান্তর করিয়া, $\sqrt{2x+5}=1+\sqrt{x+6}$;

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $2x+5=1+x+6+2\sqrt{x+6},$

বা $x-2=2\sqrt{x+6}$;

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x^2-4x+4=4(x+6),$

বা $$x^2-8x-20=0 \qquad \cdots \quad (2)$$

বা $$(x-10)(x+2)=0\,;$$

$\therefore$ $x=10,$ অথবা $-2.$

সমীকরণ (1) এ x এর পরিবর্তে 10 এবং -2 লিখিলে দেখা যাইবে যে, $x=10$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু $x=-2$ দ্বারা হয় না।

এইরূপ ব্যতিক্রমের কারণ এই যে, সমীকরণ (1) কে সোজাসুজি সমাধান করিয়া উক্ত বীজ দুইটি পাওয়া যায় নাই ; উহারা সমীকবণ (2) এব বীজ। এই সমীকরণটি, সমীকরণ (1) এবং $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=-1$, এই উভয় সমীকরণ হইতেই করণী-নিরসন-দ্বারা পাওয়া যায়। -2 এই শেষোক্ত সমীকরণের বীজ।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, কোন অমূলদ সমীকরণ হইতে করণী-নিরসন করিয়া যে সমীকরণ পাওয়া যায়, অনেক সময়ে অন্যান্য সমীকরণের করণী-নিরসন করিয়াও সেই একই সমীকরণ পাওয়া যায় ; এই নিমিত্তই শেষোক্ত করণীহীন সমীকরণের প্রত্যেক বীজদ্বারা প্রদত্ত অমূলদ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

লব্ধ বীজসমূহের মধ্যে যেগুলির দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না তাহাদিগকে **অবান্তর বীজ** বলা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 124

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}+2.$
2. $\sqrt{2x}+\sqrt{2x-7}=7.$
3. $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{5x-2}.$
4. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}.$
5. $\sqrt{3x-3}=\sqrt{3x-11}.$
6. $\sqrt{x+12}=\sqrt{x+7}+1.$
7. $3-\sqrt{2x+26}=\sqrt{2x+29}.$
8. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+17}=7.$
9. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5.$
10. $\sqrt{x}+\sqrt{4+x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$
11. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x+5}.$

12. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$. 13. $\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}=d$.

14. $\sqrt{x+2}=\sqrt{x+9}-1$.

15. $\sqrt{4a+x}-\sqrt{a+x}=2\sqrt{x-2a}$.

16. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=3+\dfrac{3-\sqrt{x}}{2}$.

17. $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=3+\dfrac{\sqrt{ax}+1}{2}$.

18. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=2$.

19. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$.

20. $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$.

21. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=1$.

22. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

23. $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3$.

24. $\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2-x-2}=1$.

25. $\sqrt{\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)}+\dfrac{b}{x}=\sqrt{\left(\dfrac{x-b}{x-a}\right)}+\dfrac{a}{x}$.

26. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\dfrac{b}{\sqrt{x+a}}$.

27. $\sqrt{3+x-\sqrt{x+6}}=\sqrt{x-3}$.

28. $\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-x+1}=1$.

29. $$\frac{\sqrt{x}+a}{(\sqrt{x}-b)(\sqrt{x}-c)}+\frac{\sqrt{x}+b}{(\sqrt{x}-c)(\sqrt{x}-a)}+\frac{\sqrt{x}+c}{(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}-b)}=0.$$

30. $$\frac{\sqrt{x}+a^2}{a+b}+\frac{\sqrt{x}+b^2}{b+c}+\frac{\sqrt{x}+c^2}{c+a}=2(a+b+c).$$

31. $$a\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+(a+2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt{\{a(a+2)\}}.$$

32. $$\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{2x+b}-\sqrt{x-b}}=\frac{x+2a}{x+2b}.$$

33. $$\frac{1}{a^2}\sqrt{a+x}+\frac{2}{ax}\sqrt{a+x}+\frac{1}{x^2}\sqrt{a+x}=\frac{1}{c^2}\sqrt{x}.$$

34. $$\sqrt{1+a}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}+\sqrt{1-a}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\sqrt[4]{(1-a^2)}.$$

ঊনত্রিংশ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation)

346. দ্বিঘাত সমীকরণ

কোন সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত বর্গ হইলে উহাকে **দ্বিঘাত** (quadratic) বা **দ্বিতীয় মানের** (of the second degree) **সমীকরণ** বলা হয়।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির মাত্র দ্বিতীয় ঘাত বিদ্যমান থাকিলে উহাকে **অমিশ্র** (pure) **দ্বিঘাত** বলা হয়।

অজ্ঞাত রাশির প্রথম এবং দ্বিতীয় উভয় ঘাতই বিদ্যমান থাকিলে সমীকরণকে **মিশ্র দ্বিঘাত** (adfected quadratic) বলা হয়।

যথা, $2x^2-3=0$ একটি অমিশ্র এবং $4x^2-5x+1=0$ একটি মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ।

347. অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, পক্ষান্তরীকরণ এবং সরলীকরণ-প্রক্রিয়া-সাহায্যে অজ্ঞাত রাশির বর্গের মান (value) নির্ণয় করিতে হয়; এই মানের বর্গমূলদ্বয়ই নির্ণেয় বীজ। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, অমিশ্র দ্বিঘাতের বীজ দুইটির পরম মান (absolute value) পরস্পর সমান, কিন্তু উহারা বিপরীত চিহ্ন-যুক্ত। (অনু. 322 দ্রষ্টব্য।)

উদা. 1. সমাধান কর : $3x^2=24.$

উভয় পক্ষ 3 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^2=8;$

$\therefore$ $x=+\sqrt{8}$, অথবা $-\sqrt{8}$,

অর্থাৎ $x=+2\sqrt{2}$, অথবা $-2\sqrt{2}$,

বা $x=\pm 2\sqrt{2}.$

উদা. 2. সমাধান কর : $7(x^2-1)=6(x^2+3)$.

বন্ধনী অপসারিত করিয়া, $7x^2-7=6x^2+18$,

বা $x^2=25$;

$\therefore$ $x=\pm 5$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{7x^2+1}{3x^2+1}-\dfrac{x}{7}=3-\dfrac{5+x}{7}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{7x^2+1}{3x^2+1}=\dfrac{x}{7}+3-\dfrac{5+x}{7}=\dfrac{16}{7}$;

$\therefore$ $16(3x^2+1)=7(7x^2+1)$,

বা $48x^2+16=49x^2+7$,

বা $x^2=9$;

$\therefore$ $x=\pm 3$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\dfrac{a}{b}$.

যোগ ও ভাগ-ক্রিয়া প্রয়োগ করিয়া,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{a+b}{a-b};$$

বর্গ করিয়া, $$\frac{1+x^2}{x^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2},$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x^2}+1=1+\frac{4ab}{a^2-2ab+b^2},$$

$\therefore$ $$x^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}.$$

$\therefore$ $$x=\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

উদা. 5. সমাধান কর : $\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+2}=1$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\sqrt{x^2+8}=1+\sqrt{x^2+2}$;

বর্গ করিয়া, $x^2+8=1+x^2+2+2\sqrt{x^2+2}$,

বা $2\sqrt{x^2+2}=5$,

বা $\sqrt{x^2+2}=\frac{5}{2}$,

বা $x^2+2=\frac{25}{4}$,

বা $x^2=\frac{25}{4}-2=\frac{17}{4}$;

$\therefore$ $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

প্রশ্নমালা 125

সমাধান কর :

1. $5x^2=45$.
2. $3(x^2-1)=2(x^2+11)$.
3. $7(x^2-3)=5(x^2-1)$.
4. $2(x^2+3)=x^2+22$.
5. $\frac{x^2+3}{5}=\frac{3x^2-7}{2}$.
6. $\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}=3$.
7. $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-3}$.
8. $\frac{7}{x^2-7}-\frac{4}{x^2-3}=\frac{3}{x^2-2}$.
9. $\frac{x^2-2}{x^2-3}+\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{x^2-1}{x^2-2}+\frac{x^2-4}{x^2-5}$.
10. $\frac{x^2-4}{x^2-1}+\frac{x^2-7}{x^2-3}+\frac{x^2-2}{x^2-9}=3$.
11. $\frac{2}{11}(6+x)-\frac{3x^2+5}{2x^2+3}=\frac{1}{11}(2x-5)$.
12. $\frac{3(3+x)}{8}-\frac{5x^2+1}{3x^2+5}=\frac{6x-5}{16}$.
13. $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=2x$.
14. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=5$.
15. $\sqrt{\left(\frac{x+6}{x-6}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x-6}{x+6}\right)}=\frac{14}{\sqrt{13}}$.
16. $\sqrt{\left(\frac{x+4}{x-4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)}=3\frac{1}{3}$.

348. মিশ্র দ্বিঘাতের সমাধান

নিম্নে বর্ণিত প্রক্রিয়াসমূহ-সাহায্যে মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করা যায়।

গুণনীয়ক-বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়া। এই প্রক্রিয়া-অনুসারে দক্ষিণ পক্ষস্থ পদ-সমূহ বাম পক্ষে পক্ষান্তরিত করিয়া নূতন বাম পক্ষস্থ দ্বিঘাত রাশিমালাটির গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিতে হয়।

উদা. 1. সমাধান কর: $x^2 = 7x - 12$.

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2 - 7x + 12 = 0$,

বা $(x-4)(x-3) = 0$;

যে হেতু $x-4$ এবং $x-3$ এই দুই গুণনীয়কের গুণফল শূন্য, উহাদের যে-কোন একটির মান অবশ্যই শূন্য হইবে।

সুতরাং $x - 4 = 0$, অথবা $x - 3 = 0$;

$\therefore$ $x = 4$, অথবা 3.

উদা. 2. সমাধান কর: $15x^2 - 22x + 8 = 0$.

$$\begin{aligned} & 15x^2 - 22x + 8 \\ &= 15x^2 - 10x - 12x + 8 \\ &= 5x(3x-2) - 4(3x-2) \\ &= (5x-4)(3x-2). \end{aligned}$$

সুতরাং $(3x-2)(5x-4) = 0$;

$\therefore$ $3x - 2 = 0$, অথবা $5x - 4 = 0$;

$\therefore$ $x = \frac{2}{3}$, বা $\frac{4}{5}$.

উদা. 3. সমাধান কর:

$$\frac{1}{(x-c)^2} - \frac{2a+b-2c}{(x-c)(a-c)(a+b-c)} + \frac{1}{(a-c)(a+b-c)} = 0.$$

বাম পক্ষ $= \dfrac{1}{(x-c)^2} - \dfrac{1}{x-c}\left\{\dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{a+b-c}\right\} + \dfrac{1}{(a-c)(a+b-c)}$

$$= \left(\frac{1}{x-c} - \frac{1}{a-c}\right)\left(\frac{1}{x-c} - \frac{1}{a+b-c}\right).$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a-c}=0, \\ \text{অথবা,}\quad &\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a+b-c}=0. \end{aligned}\right\}$$

এই দুই সমীকরণ হইতে,

$$\left.\begin{aligned} &x-c=a-c \\ \text{অথবা,}\quad &x-c=a+b-c\,; \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \quad x=a, \text{ বা } a+b.$$

প্রশ্নমালা 126

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $x^2-5x+6=0.$
2. $x^2-7x+12=0.$
3. $x^2+x-2=0.$
4. $x^2+7x+10=0.$
5. $x^2+x-42=0.$
6. $12x^2-7x+1=0.$
7. $10x^2+9x+2=0.$
8. $x^2-\cdot8x+\cdot15=0.$
9. $x^2-(a+b)x+ab=0.$
10. $x^2-(a^2+b^2)x+a^2b^2=0.$
11. $(x-3a)^2-5(x-3a)+6=0.$
12. $x^2-ax-2a^2+3ab-b^2=0.$
13. $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-4}{x+1}+\frac{1}{4}=0.$
14. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\frac{25}{12}.$

[$\dfrac{x+1}{x}=z$ লিখিলে, $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{z}$ হয়, এবং প্রদত্ত সমীকরণ $z+\dfrac{1}{z}=\frac{25}{12}$ এই সমীকরণে পরিবর্তিত হয়।]

15. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0.$

16. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}.$

349. পূর্ণবর্গে পরিবর্তন-প্রক্রিয়া

এই প্রক্রিয়া-অনুসারে, প্রদত্ত সমীকরণ এরূপভাবে লিখিতে হয় যাহাতে বাম পক্ষস্থ রাশি একটি পূর্ণবর্গ হয়। নিম্নে বর্ণিত প্রক্রিয়াদ্বয়ের যে-কোন একটির সাহায্যে ইহা সম্পাদন করা যায়।

সাধারণ প্রক্রিয়া। $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণটি বিবেচনা করা যাউক ; ইহা দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার।

সমীকরণটি পক্ষান্তর করিয়া,

$$ax^2+bx=-c,$$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ (উভয় পক্ষ a দ্বারা ভাগ করিয়া);

উভয় পক্ষে x এর সহগের অর্ধেকের বর্গ, অর্থাৎ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ যোগ করিয়া,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

বা, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

উদা. সমাধান কর : $2x^2-16x+3=0$.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষ 2 দ্বারা ভাগ করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া,

$$x^2-8x=-\tfrac{3}{2}\,;$$

উভয় পক্ষে x এর সহগের অর্ধেকের বর্গ, অর্থাৎ 16 যোগ করিয়া,

$$x^2-8x+16=-\tfrac{3}{2}+16=\tfrac{29}{2}\,;$$

$$\therefore\quad (x-4)^2=\tfrac{29}{2}\,;$$

$$\therefore\quad x-4=\pm\sqrt{\frac{29}{2}}\,;$$

$$\therefore\quad x=4\pm\sqrt{\frac{29}{2}}.$$

350. শ্রীধর আচার্যের প্রক্রিয়া

$ax^2+bx+c=0$ এই মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণটির আলোচনা করা যাউক।

উভয় পক্ষ $4a$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

বাম পক্ষে b^2 যোগ এবং বিয়োগ করিয়া,

$$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0,$$

$$\text{বা}\quad (2ax+b)^2=b^2-4ac\,;$$

$$\therefore\quad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$$

$$\therefore\quad 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.$$

সাধারণ প্রক্রিয়া-অনুসারেও এই ফল পাওয়া গিয়াছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $3x^2-6x+2=0$.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষ 4×3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$36x^2-72x+24=0\,;$$

বাম পক্ষে 6^2 যোগ এবং বিয়োগ করিয়া,

$$36x^2-72x+36-36+24=0,$$

বা $(6x-6)^2=12$, বা $6x-6=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$;

$$\therefore\ 6x=6\pm 2\sqrt{3}\ ;\quad \therefore\ x=1\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

উদা. 2. $4x^2-7x+2=0$, এই সমীকরণের বীজ নির্ণয় কর।

এ স্থলে, $x=\dfrac{7\pm\sqrt{7^2-4\times4\times2}}{2\times4}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-32}}{8}=\frac{7}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{17}.$

প্রশ্নমালা 127

পূর্ণবর্গে পরিবর্তন-প্রক্রিয়া-সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $x^2+px+q=0.$
2. $ax^2+2bx+c=0.$
3. $ax^2-bx+c=0.$
4. $x^2+px-q=0.$
5. $x^2-5x+6=0.$
6. $3x^2+2x-1=0.$
7. $3x^2-8x+4=0.$
8. $5x^2+33x-14=0.$
9. $x^2+2x-1=0.$
10. $2x^2-5x+2=0.$
11. $3x^2-2x-7=0.$
12. $3x^2+2x-5=0.$
13. $7x^2-6x+1=0.$
14. $141x^2-88x-45=0.$
15. $8x^2-6x-35=0.$
16. $12x^2-85x-175=0.$
17. $13x^2-14x-15=0.$
18. $x^2-141x+3410=0.$
19. $35x^2-946x-27429=0.$
20. $(x-2)^2+3(x-2)+2=0.$
21. $(3x-4)^2-5(3x-4)+6=0.$ [$3x-4=z$ লেখ।]
22. $(3x-5)^2-7(3x-5)(5x-7)+12(5x-7)^2=0.$

[মনে কর, $3x-5=a$, $5x-7=b$;

$\therefore \qquad a^2-7ab+12b^2=0,$

বা $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2-7\frac{a}{b}+12=0\;;$

এই সমীকরণ হইতে $\frac{a}{b}$ এর মূল নির্ধারণ করিয়া, $\frac{a}{b}=4$, বা 3, অর্থাৎ $\frac{3x-5}{5x-7}=4$, বা 3. ইহা হইতে x এর মান নির্ণয় করা যায়।]

23. $(7x-2)^2-11(7x-2)(5x-3)+30(5x-3)^2=0.$

শ্রীধর আচার্যের প্রক্রিয়া-অনুসারে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

24. $2x^2-3x-7=0.$ 25. $ax^2-(a+b)x+b=0.$

26. $3x^2-9x+5=0.$ 27. $a^2x^2-4ax-5=0.$

28. $5x^2-7x+2=0.$ 29. $3x^2+mx-n=0.$

30. $6x^2-7x-3=0.$ 31. $2x^2-x-10=0.$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজ নির্ণয় কর :

32. $x^2-3x+2=0.$ 33. $6x^2+7x+1=0.$

34. $3x^2+10x-11=0.$ 35. $7x^2+2x-123=0.$

351. দুরূহ উদাহরণমালা

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে দ্বিঘাত সমীকরণ-সমাধানের নানাবিধ প্রক্রিয়া সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{x+3}{2x+7}=\frac{4x-6}{3x+4}.$

বজ্রগুণন দ্বারা, $\qquad (x+3)(3x+4)=(4x-6)(2x+7),$

বা $\qquad 3x^2+13x+12=8x^2+16x-42,$

বা $\qquad 5x^2+3x-54=0,$

বা $\qquad (5x+18)(x-3)=0\;;$

$\therefore \qquad 5x+18=0$, অথবা $x-3=0\;;$

$\therefore \qquad x=-\frac{18}{5}$, অথবা 3.

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{a-b}{x}-\frac{x}{a}=\frac{b}{a}$.

বাম পক্ষ সরল করিয়া, $\frac{a(a-b)-x^2}{ax}=\frac{b}{a}$,

বা $a(a-b)-x^2=bx$,

বা $x^2+bx-a(a-b)=0$,

বা $(x-a+b)(x+a)=0$;

$\therefore$ $x-a+b=0$, অথবা $x+a=0$;

$\therefore$ $x=a-b$, বা $-a$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-5}=\frac{3}{x-2}$.

বাম পক্ষ সরল করিয়া, $\frac{2x-2}{x^2-2x-15}=\frac{3}{x-2}$.

বা $2(x-1)(x-2)=3(x^2-2x-15)$,

বা $x^2=49$; $\therefore$ $x=\pm 7$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\sqrt{(x+5)}+\sqrt{(x+12)}=\frac{7}{2}\sqrt{x}$.

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া,

$$x+5+x+12+2\sqrt{(x^2+17x+60)}=\tfrac{49}{4}x,$$

বা $8\sqrt{(x^2+17x+60)}=41x-68$.

বর্গ করিয়া, $64(x^2+17x+60)=1681x^2-5576x+4624$,

বা $1617x^2-6664x+784=0$,

বা $(x-4)(1617x-196)=0$;

$\therefore$ $x=4$, বা $\frac{196}{1617}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $(x-2)(x-3)=\frac{18}{17^2}$.

মনে কর, $a=17$; তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণ হইতে

$$(x-2)(x-3)=\frac{a+1}{a^2},$$

বা $\qquad a^2(x-2)(x-3)-a-1=0,$

অর্থাৎ $\qquad (ax-2a)(ax-3a)+(ax-3a)-(ax-2a)-1=0,$

বা $\qquad (ax-3a)(ax-2a+1)-(ax-2a+1)=0,$

অর্থাৎ $\qquad (ax-2a+1)(ax-3a-1)=0$;

$\therefore \qquad ax-2a+1=0$, অথবা $ax-3a-1=0$;

$$\therefore \qquad x=\frac{2a-1}{a}=\frac{34-1}{17}=\frac{33}{17}=1\frac{16}{17};$$

অথবা $\qquad x=\dfrac{3a+1}{a}=\dfrac{52}{17}=3\dfrac{1}{17}.$

উদা. 6. সমাধান কর :

$(4-2\sqrt{3})x^2+2(1-\sqrt{3})x-3=0.$

$4-2\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})^2$; $\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $1-\sqrt{3}$ এর পরিবর্তে a লিখিয়া, $a^2x^2+2ax-3=0$, বা $(ax+3)(ax-1)=0$;

$\therefore \quad x=-\dfrac{3}{a}$, অথবা $\dfrac{1}{a}$;

$\therefore \quad a$ র পরিবর্তে $1-\sqrt{3}$ লিখিয়া,

$$x=-\frac{3}{1-\sqrt{3}}=\frac{-3(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}),$$

অথবা $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-3}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{-2}.$

প্রশ্নমালা 128

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{2x+11}{2x-1}.$

2. $\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-2}.$

3. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{9}{x+17}.$

4. $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+4}{x+5}=1\frac{31}{46}.$

5. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{3}{x-5}=2\frac{1}{6}.$

6. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}=\frac{2}{3}.$

7. $\frac{2x+3}{7x-15}+13\frac{1}{8}=\frac{3x+22}{7-5x}.$ 8. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$

9. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{2c}{x-c}$ 10. $\frac{x-a}{bx}+\frac{x-b}{ax}=\frac{2x}{(a+b)^2}.$

11. $(x-1)(x-2)=\frac{15}{14^2}.$ 12. $(x-5)(x-6)=\frac{36}{35^2}.$

13. $(x-3)(x-4)=\frac{67\times 34}{33^2}.$

14. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{c+a}{c-a}+\frac{c-a}{c+a}.$

15. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{x-b}{x+b}-\frac{x+b}{x-b}.$

16. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$

17. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}.$

18. $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x+a}{x-a}\right)-12=0.$

19. $\sqrt{(x+24)}-\sqrt{(x+15)}=\sqrt{x}.$

20. $\sqrt{(2x+5)}+\sqrt{(3x+10)}=\sqrt{(25x-1)}.$

352. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ-সমূহের ধর্ম

(*a*) প্রথমে $ax^2=b$, এই অমিশ্র দ্বিঘাতটি ধরা যাউক।

এ স্থলে, $x^2=\frac{b}{a}$; $\therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$

I. যদি a এবং b উভয়ই ধন কিংবা উভয়ই ঋণ হয়, অর্থাৎ যদি $\frac{b}{a}$ ভগ্নাংশটি ধন হয়, তাহা হইলে বীজ দুইটি বাস্তব (real) রাশি হইবে।

II. যদি a এবং b রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তাহা হইলে $\frac{b}{a}$ ভগ্নাংশটি ঋণ হইবে এবং $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ ও $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ বর্গমূলদ্বয় কল্পিত (imaginary) রাশি হইবে। (অনু. 320 দ্রষ্টব্য।)

মনে কর, $\frac{b}{a}$ একটি ঋণ রাশি এবং $= -k^2$; এ স্থলে k^2 একটি ধন রাশি।

তাহা হইলে $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{-k^2} = \{(-1)k^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \times k.$ অনু. 316.

$\sqrt{-1}$ কে i দ্বারা সূচিত করিলে, $\sqrt{-k^2} = ik$ হয়।

সুতরাং যদি $x^2 = -k^2$ হয়, তাহা হইলে $x = \pm ik$.

(b) এইবার $ax^2+bx+c=0$, এই মিশ্র দ্বিঘাতটি আলোচনা করা যাউক।

এ স্থলে, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

I. যদি $b=0$ হয়, তাহা হইলে সমীকরণটি একটি অমিশ্র দ্বিঘাতে পরিণত হইবে এবং **বীজ দুইটি একই পরমমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট হইবে**।

II. যদি $b^2 = 4ac$ হয়, তাহা হইলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিটি শূন্য হইবে এবং **বীজ দুইটি বাস্তব এবং পরস্পর সমান হইবে**। এই স্থলে দ্বিঘাতের বাম পক্ষটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

III. যদি $b^2 > 4ac$ হয়, তাহা হইলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিটি ধন হইবে এবং **বীজ দুইটি বাস্তব এবং পরস্পর অসমান হইবে**।

IV. $b^2 < 4ac$ হইলে, b^2-4ac ঋণ হইবে সুতরাং $\sqrt{b^2-4ac}$ কল্পিত হইবে। এ স্থলে **বীজ দুইটি কল্পিত এবং পরস্পর অসমান হইবে**।

353. দ্বিঘাত সমীকরণে বীজ এবং সহগের সম্বন্ধ

মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের উভয় পক্ষ x^2 এর সহগ-দ্বারা ভাগ করিলে সমীকরণটি $x^2+px+q=0$ আকারে পরিবর্তিত হইবে।

যদি α এবং β এই সমীকরণের বীজ হয়, তাহা হইলে

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\{-p+\sqrt{p^2-4q}\},\ \beta = \tfrac{1}{2}\{-p-\sqrt{p^2-4q}\}.$$

সুতরাং,
$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= -p \\ \alpha\beta &= \ \ q \end{aligned}\right\}.$$

অর্থাৎ (1) **বীজদ্বয়ের সমষ্টি, পরিবর্তিত-চিহ্ন-বিশিষ্ট দ্বিতীয় পদের সহগের সমান** এবং (2) **বীজদ্বয়ের গুণফল সমীকরণস্থ ধ্রুবক রাশির সমান।**

দ্রষ্টব্য। α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ এই সমীকরণের বীজ হইলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

উদা. 1. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ 3 এবং -4 হইবে।

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2+px+q=0$.

তাহা হইলে, $-p=$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি

$=3+(-4)=-1$, অর্থাৎ $p=1$,

এবং $q=$ বীজদ্বয়ের গুণফল

$=3\times(-4)=-12.$

সুতরাং $x^2+x-12=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $x^2+px+q=0$ এই সমীকরণের বীজদ্বয়ের দ্বিগুণ হইবে।

মনে কর, α এবং β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ। তাহা হইলে, $\alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

যদি নির্ণেয় সমীকরণের বীজ α' এবং β' হয়, তাহা হইলে $\alpha'=2\alpha$ এবং $\beta'=2\beta$. সুতরাং $\alpha'+\beta'=2(\alpha+\beta)=-2p$, এবং $\alpha'\times\beta'=4\alpha\beta=4q$. সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2+2px+4q=0$.

উদা. 3. α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ হইলে, প্রমাণ কর যে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}, \quad \because \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

উদা. 4. α এবং β, $2x^2+3x-7=0$ সমীকরণটি বীজ হইলে $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}.$$

এক্ষণে, $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ এবং $\alpha\beta=-\frac{7}{2}$;

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশি } =\frac{(-\frac{3}{2})^2-2(-\frac{7}{2})}{-\frac{7}{2}}$$

$$=-2\tfrac{9}{14}.$$

উদা. 5. যদি α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ (এ স্থলে a ধন), এই সমীকরণের দুইটি বাস্তব বীজ হয়, তাহা হইলে, x এর মান α ও β এবং তদন্তর্বর্তী মান ভিন্ন অন্য যাহাই হউক না কেন, ax^2+bx+c রাশিমালার মান ধন হইবে এবং $x=\alpha$ অথবা, β হইলে রাশিমালাটির মান শূন্য হইবে।

ইতিপূর্বে দেখান হইয়াছে যে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. উদা. 3.

অতএব, $x=\alpha$, অথবা β হইলে রাশিমালাটির মান শূন্য হইবে।

মনে কর, α এবং β র মধ্যে α রাশিটি বৃহত্তর।

যদি $x>\alpha$ হয়, তাহা হইলে ইহা β অপেক্ষাও বৃহত্তর হইবে। সুতরাং $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয়ই ধন হইবে। সুতরাং রাশিমালাটি ধন হইবে।

যদি $x<\beta$ হয়, তাহা হইলে $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয়ই ঋণ হইবে। সুতরাং রাশিমালাটি ধন হইবে।

যদি x, α এবং β র অন্তর্বর্তী কোন রাশি হয়, তাহা হইলে $x-\alpha$ ঋণ হইবে এবং $x-\beta$ ধন হইবে। সুতরাং রাশিমালাটি ঋণ হইবে।

সুতরাং $x=\alpha$, অথবা β হইলে রাশিমালাটির মান শূন্য হইবে; x এর মান α এবং β র অন্তর্বর্তী হইলে, রাশিমালাটি ঋণ হইবে এবং x উক্ত মান ভিন্ন অন্য কোন মান-বিশিষ্ট হইলে রাশিমালাটি ধন হইবে।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, m যে-কোন বাস্তবমান-বিশিষ্ট হউক না কেন, $x^2+2x\left(m+\frac{1}{m}\right)+3=0$ সমীকরণটির বীজগুলি সর্বদাই বাস্তব।

বীজদ্বয়কে বাস্তব হইতে হইলে,

$4\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-12$ এর ধন হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-3$ এর ধন হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ $m^2+\frac{1}{m^2}-1$ এর ধন হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ m^4-m^2+1 এর ধন হওয়া প্রয়োজন,

অর্থাৎ $(m^2-1)^2+m^2$ এর ধন হওয়া প্রয়োজন।

শেষোক্ত রাশিমালা দুইটি বর্গের সমষ্টি, সুতরাং m যে-কোন বাস্তব মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, ইহা একটি ধনরাশি। অতএব, m যে-কোন বাস্তব মান-বিশিষ্ট হউক না কেন, বীজদ্বয় বাস্তব হইবে।

উদা. 7. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$, এই দুইটি সমীকরণের একটি সাধারণ (common) বীজ থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2.$$

মনে কর, a প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ। তাহা হইলে a দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে ; সুতরাং

$$\left.\begin{aligned} aa^2+ba+c&=0 \\ \text{এবং}\quad a'a^2+b'a+c'&=0 \end{aligned}\right\}$$

বজ্রগুণন-প্রণালী-অনুসারে,

$$\frac{a^2}{bc'-b'c}=\frac{a}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b};$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\quad \text{এবং}\quad a=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore\quad \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2,\ \text{বা}\ (bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2.$$

354. উপপাদ্য

দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণটির তিনটি বিভিন্ন বীজ, α, β এবং γ.

α, β এবং γ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, স্থতরাং

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \cdots \quad (2)$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(1) এবং (2) হইতে, $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0.$

যে হেতু, α এবং β পরস্পব বিভিন্ন, $\alpha-\beta$ শূন্য হইতে পাবে না ; স্থতরাং শেষোক্ত সমীকবণের উভয পদ $\alpha-\beta$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \quad \cdots \quad (4)$$

এইরূপে (2) এবং (3) হইতে,

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \quad \cdots \quad (5)$$

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া,

$$a(\alpha-\gamma)=0.$$

স্থতরাং $a=0$, অথবা $\alpha-\gamma=0$. কিন্তু a শূন্য হইতে পারে না, কারণ এ স্থলে দ্বিঘাত সমীকরণের আলোচনা করা হইতেছে। α, β এবং γ কে পরস্পর বিভিন্ন ধরা হইয়াছে, স্থতরাং $\alpha-\gamma$-ও শূন্য হইতে পারে না। স্থতরাং আমরা একটি অসম্ভব সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়াছি। অতএব α, β এবং γ কে যে পরস্পর বিভিন্ন ধরা হইয়াছে ইহা ভুল ; **অর্থাৎ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।**

দ্রষ্টব্য। এ স্থলে দেখান হইল যে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না। একটি দ্বিঘাত সমীকরণে দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে, এই প্রতিজ্ঞাটি নিম্নে প্রমাণিত হইল।

দুইটি একঘাত রাশিমালার গুণফল একটি দ্বিঘাত রাশিমালা হইবে, এবং বিপরীত ভাবে, যে-কোন দ্বিঘাত রাশিমালাকে দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি

সমান অথবা অসমান, বাস্তব অথবা কল্পিত একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে।

$ax^2+bx+c=0$ এই সমীকরণটির আলোচনা করা যাউক।

সোজাসুজি ভাগ করিয়া, অথবা অনু. 230 এর সাহায্যে দেখা যায় যে, ax^2+bx+c রাশিটিকে $x-\alpha$ দ্বারা ভাগ করিলে, $a\alpha^2+b\alpha+c$ অবশিষ্ট থাকে।

প্রত্যেক সমীকরণের অন্তত একটি বীজ থাকিবে এইরূপ ধরিয়া লইয়া, মনে কর যে, α ঐ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ। তাহা হইলে, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, অর্থাৎ উক্ত অবশিষ্টটি শূন্য হইবে। সুতরাং ax^2+bx+c রাশিটি $x-\alpha$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য; অর্থাৎ $x-\alpha$, ax^2+bx+c এর একটি গুণনীয়ক। অতএব সমীকরণটির যে-কোন বীজ α র জন্য ax^2+bx+c এর একটি একঘাত গুণনীয়ক $x-\alpha$ পাওয়া যাইবে। কিন্তু ax^2+bx+c এই দ্বিঘাত রাশিমালাটির দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি একঘাত (সমান অথবা অসমান, বাস্তব অথবা কল্পিত) গুণনীয়ক থাকিতে পারে। সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি (সমান অথবা অসমান, বাস্তব অথবা কল্পিত) বীজ থাকিবে।

যে হেতু n-তম মান (degree) বিশিষ্ট রাশিমালার n এবং কেবলমাত্র n-সংখ্যক একঘাত গুণনীয়ক থাকে, উপরি লিখিত উপায়ে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, n-ঘাত সমীকরণের n এবং কেবলমাত্র n-সংখ্যক বীজ থাকিবে।

একটি দ্বিঘাত সমীকরণের α, β, γ তিনটি বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না, অনু. 354 এ ইহাই প্রমাণ করা হইয়াছে; কিন্তু ইহা প্রমাণ করা হয় নাই যে, সমীকরণটির 'α, α, β' বা 'α, β, β' এইরূপ তিনটি বীজ (দুইটি সমান এবং একটি অসমান) থাকিতে পারে না।

প্রশ্নমালা 129

প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের বীজগুলি বাস্তব:

1. $x^2=5.$ 2. $2x^2=7.$ 3. $6x^2=9.$

4. $x^2-4x+1=0.$ 5. $3x^2-9x+5=0.$

প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের বীজগুলি কল্পিত :

6. $x^2+3=0.$ 7. $4x^2+15=0.$ 8. $3x^2=-27.$

9. $x^2+x+2=0.$ 10. $3x^2-x+2=0.$

প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের বীজগুলি পরস্পর সমান :

11. $x^2+2x+1=0.$ 12. $9x^2-132x+484=0.$

13. $5x^2-30x+45=0.$ 14. $9x^2+126x+441=0.$

নিম্নলিখিত প্রত্যেক উদাহরণের বীজগুলি লইয়া এক একটি সমীকরণ গঠন কর :

15. 3, 5. 16. $-21, \frac{3}{2}.$

17. $a+b, a-b.$ 18. $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}.$

19. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ দুইটি $x^2+4x+13=0$, এই সমীকরণের বীজদ্বয়ের তিনগুণ হইবে।

20. $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজ α এবং β ; এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}.$

21. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের বর্গ হইবে।

22. α এবং β, $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজ ; এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$,

23. α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ হইলে, $\alpha^3+\beta^3$ এর মান কত ?

24. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গ হইলে, প্রমাণ কর যে, $b^3+a^2c+ac^2-3abc=0.$

25. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bcx^2+cax+ab=0$, এই দুইটি সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ থাকে এবং $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $b^4(c-a)^2=a^2c^2(a-b)(b-c).$

355. দ্বিঘাত সমীকরণ-সাহায্যে অন্য সমীকরণ-সমাধান

অনেক সমীকরণ আছে যাহাদের সমাধান করিতে হইলে দ্বিঘাত সমীকরণের সাহায্য গ্রহণ করিতে হয়। নিম্নে এইরূপ সমীকরণের কতিপয় উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0.$

মনে কর, $x^{\frac{1}{3}} = z.$ তাহা হইলে সমীকরণটি $z^2 - 5z + 6 = 0$ এই আকার ধারণ করে।

এই সমীকরণের বীজ $z = 2$, বা 3 ;

$\therefore \quad x^{\frac{1}{3}} = 2$, অথবা 3 ;

$\therefore \quad x = 8$, অথবা 27.

উদা. 2. সমাধান কর : $x^6 - 9x^3 + 8 = 0.$

মনে কর, $x^3 = z.$ তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণটি

$$z^2 - 9z + 8 = 0,$$

বা $(z-1)(z-8) = 0$ এই আকার ধারণ করে।

এই সমীকরণের বীজ $z = 1$, অথবা 8 ;

$\therefore \quad x^3 = 1$, অথবা 8 ,

$\therefore \quad x = 1^{\frac{1}{3}}$, অথবা $8^{\frac{1}{3}}$

$= 1$, অথবা 2.

উদা. 3. সমাধান কর : $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0.$

বাম পক্ষ $= (x-2)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$

$= (x-2)(x+2)(x^2 - 4x + 3)$

$= (x-2)(x+2)(x-1)(x-3)$;

$\therefore \quad (x-1)(x-2)(x+2)(x-3) = 0$;

$\therefore \quad x = 1, 2, -2$, অথবা 3.

উদা. 4. সমাধান কর : $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=360$.

সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া, $\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}=360$,

বা $(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-360=0$,

বা $z(z+2)-360=0$, এ স্থলে $z=x^2+7x+10$,

বা $z^2+2z-360=0$,

বা $(z+20)(z-18)=0$,

$\therefore$ $z=18$, অথবা -20.

সুতরাং $x^2+7x+10=18$, অথবা -20,

$\therefore$ $x^2+7x-8=0$ ... ... (1)

অথবা $x^2+7x+30=0$ ... ... (2)

(1) হইতে $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{81}}{2}=1$, অথবা -8.

(2) হইতে $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{-71}}{2}=\frac{1}{2}(-7\pm i\sqrt{71})$.

উদা. 5 সমাধান কর : $3(9^x-4.3^{x-1})+1=0$.

$3(9^x-4.3^{x-1})+1=0$,

বা $3.9^x-4.3^x+1=0$,

বা $3.3^{2x}-4.3^x+1=0$;

3^x এর পবিবর্তে y লিখিয়া,

$3y^2-4y+1=0$;

সমাধান করিয়া, $y=\frac{1}{3}$, বা 1 ;

$\therefore$ $3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}$; $\therefore$ $x=-1$

বা $3^x=1=3^0$; $\therefore$ $x=0$

উদা. 6. সমাধান কর : $x^4+1=0$.

$x^4+1=0$;

উভয় পক্ষ x^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=0,\ \text{বা}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=2\ ;$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{2}\ ;$$

$\therefore \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0$, অতএব, $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$;

অথবা $x^2+\sqrt{2}x+1=0$;

অতএব $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

প্রশ্নমালা 130

সমাধান কর :

1. $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}+12=0.$ 2. $x^{\frac{4}{5}}-3x^{\frac{2}{5}}+2=0.$

3. $x^{2n}-5x^n+6=0.$ 4. $x^{\frac{1}{3}}-30x^{-\frac{1}{3}}+1=0.$

5. $x^4-17x^2+16=0.$ 6. $x^6-28x^3+27=0.$

7. $x^{12}-65x^6+64=0.$ 8. $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0.$

9. $x^4-5x^3-19x^2+125x-150=0.$

10. $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+36=0.$

11. $(x-2)(x+3)(x+6)(x+1)+56=0.$

12. $4x^4-16x^3+23x^2-16x+4=0.$

13. $2(4^x-3.2^{-1})+1=0.$

14. $5.2^{2x}=2(2^{3x}+2^x).$

15. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=a^4.$

356. দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান-প্রক্রিয়া বুঝা যাইবে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} x+3y&=4 \\ 2y^2+5x&=7 \end{aligned}\right\}$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটি হইতে, $y=\dfrac{4-x}{3}$;

y এর পরিবর্তে উপরি লিখিত মানটি দ্বিতীয় সমীকরণে লিখিয়া,

$$2\left(\frac{4-x}{3}\right)^2+5x=7,$$

বা, $$2(16-8x+x^2)+45x-63=0,$$

বা, $$2x^2+29x-31=0,$$

বা, $$(x-1)(2x+31)=0\,;$$

$\therefore$ $$x=1, \text{ বা } -\tfrac{31}{2}.$$

সুতরাং প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$y=1, \text{ বা } \tfrac{13}{2}.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=13 \\ xy&=\ 6 \end{aligned}\right\}.$$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=13+12=25\,;$$

$$\therefore\quad x+y=\pm 5.$$

পুনরায়, $$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=13-12=1\,;$$

$$\therefore\quad x-y=\pm 1.$$

সুতরাং নিম্নলিখিত চারটি সহ-সমীকরণ পাওয়া যায় :

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ x-y&=-1 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x+y&=-5 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\} \text{ এবং } \left.\begin{aligned} x+y&=-5 \\ x-y&=-1 \end{aligned}\right\};$$

$$\therefore\quad x=3, y=2\,;\qquad x=-2, y=-3\,;$$

$$x=2, y=3\,;\qquad x=-3, y=-2.$$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$xy+3(x+y)=11 \quad \cdots \quad (1)$$

$$yz+3(y+z)=21 \quad \cdots \quad (2)$$

$$zx+3(z+x)=15 \quad \cdots \quad (3)$$

সমীকরণসমূহের প্রত্যেক পক্ষে 9 যোগ করিয়া এবং প্রাপ্ত বাম পক্ষসমূহের গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিয়া,

$$(x+3)(y+3)=20 \quad \cdots \quad (4)$$

$$(y+3)(z+3)=30 \quad \cdots \quad (5)$$

$$(z+3)(x+3)=24 \quad \cdots \quad (6)$$

পরস্পর গুণ করিয়া,

$$(x+3)^2(y+3)^2(z+3)^2=14400\ ;$$

$$\therefore\quad (x+3)(y+3)(z+3)=\pm 120 \quad \cdots \quad (7)$$

(7) কে যথাক্রমে (4), (5) এবং (6) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$z+3=\pm 6,\ x+3=\pm 4,\ y+3=\pm 5\ ;$$

$\therefore\quad x=1$, অথবা -7 ; $y=2$, অথবা -8 ; $z=3$, অথবা -9.

প্রশ্নমালা 131

সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{l} 3x+y=4 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\}.$

2. $\left.\begin{array}{l} x+4y=13 \\ y^2-xy=6 \end{array}\right\}.$

3. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ x^2-2xy=8 \end{array}\right\}.$

4. $\left.\begin{array}{l} 5x+2y=12 \\ 2x^2+3xy+y^2=15 \end{array}\right\}.$

5. $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ x^2+y^2=34 \end{array}\right\}.$

6. $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x^2+y^2=41 \end{array}\right\}.$

7. $\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ xy=21 \end{array}\right\}.$

8. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{array}\right\}.$

9. $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ xy=40 \end{array}\right\}.$

10. $\left.\begin{array}{l} 3x+y=15 \\ xy=12 \end{array}\right\}.$

11. $\left.\begin{array}{l} xy=12 \\ yz=20 \\ zx=15 \end{array}\right\}.$

12. $\left.\begin{array}{l} x(y+z)=8 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{array}\right\}.$

13. $\left.\begin{array}{l} (x+y)(x+z)=15 \\ (y+z)(y+x)=18 \\ (z+x)(z+y)=30 \end{array}\right\}.$

14. $\left.\begin{array}{l} x^2yz=18 \\ xy^2z=12 \\ xyz^2=6 \end{array}\right\}.$

15. $\left.\begin{array}{l} xy+5(x+y)=45 \\ yz+5(y+z)=35 \\ zx+5(z+x)=17 \end{array}\right\}.$

16. $\left.\begin{array}{l} xyz=2(x+y) \\ \qquad =\frac{6}{5}(y+z) \\ \qquad =\frac{3}{2}(z+x) \end{array}\right\}.$

357. দ্বিঘাত সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্ন

নিম্নে দ্বিঘাত সমীকরণ-ঘটিত কতিপয় সরল প্রশ্ন সমাধান করা হইল।

উদা. 1. এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 15 এবং বর্গের সমষ্টি 117 এর সমান হইবে।

মনে কর, সংখ্যা দুইটির একটি x ; তাহা হইলে অন্যটি $15-x$.

স্থতরাং $\quad x^2+(15-x)^2=117,$

অথবা $\quad 2x^2-30x+108=0,$ অথবা $x^2-15x+54=0,$

অথবা $\quad (x-9)(x-6)=0$; $\quad \therefore \quad x=9,$ অথবা $6.$

স্থতরাং সংখ্যা দুইটি 9 এবং $15-9=6.$

উদা. 2. দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের গুণফল 15 এবং বর্গের অন্তর 16.
মনে কর, সংখ্যা দুইটি x এবং y.

তাহা হইলে $\quad xy=15 \quad \cdots \quad (1)$

এবং $\quad x^2-y^2=16 \quad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে $\quad y=\dfrac{15}{x}$;

(2) এ $\quad y=\dfrac{15}{x}$ লিখিয়া,

$$x^2-\left(\frac{15}{x}\right)^2=16,$$

অথবা $\quad x^4-16x^2-225=0,$

অথবা $\quad (x^2+9)(x^2-25)=0.$

এখন $x^2+9=0$ হইতে পারে না, কারণ ইহার প্রত্যেক পদই ধন।

স্থতরাং $x^2-25=0$; $\quad \therefore \quad x=\pm 5.$

$\therefore$ (1) হইতে $\quad y=\pm 3.$

স্থতরাং নির্ণেয় সংখ্যাগুলি 5, 3, অথবা -5, -3.

উদা. 3. একব্যক্তি 6000 টাকায় কতকগুলি ঘোড়া কিনিল। যদি সে ঐ টাকায় 4 টি ঘোড়া কম কিনিত তাহা হইলে তাহাকে প্রতি ঘোড়ার জন্য 50 টাকা বেশি দিতে হইত। সে কতগুলি ঘোড়া কিনিয়াছিল ?

মনে কর, ঘোড়াগুলির সংখ্যা x. তাহা হইলে প্রত্যেক ঘোড়ার মূল্য $\dfrac{6000}{x}$ টাকা। যদি সে 4 টি ঘোড়া কম কিনিত তাহা হইলে প্রত্যেকটির মূল্য $\dfrac{6000}{x-4}$ টাকা হইত।

অতএব প্রশ্নানুসারে, $\quad \dfrac{6000}{x-4}-\dfrac{6000}{x}=50,$

বা, $\frac{120}{x-4} - \frac{120}{x} = 1,$

বা, $x^2 - 4x - 480 = 0,$

বা, $(x-24)(x+20) = 0$,

$\therefore \quad x = 24$, অথবা -20.

সুতরাং ঘোড়াগুলির সংখ্যা $= 24$.

দ্রষ্টব্য। '$x = -20$' উত্তরটি এখানে অসম্ভব।

উদা. 4. কোন প্রশ্নের সমাধানে একটি সারির তিনটি অঙ্ক অস্পষ্ট হইয়া গিয়াছে। অস্পষ্ট অঙ্ক তিনটির স্থান '*' চিহ্ন-দ্বারা সূচিত করিলে ঐ সারিটি $(*\,4)^2 = *\,*\,96$ এইরূপে লেখা যায়। অস্পষ্ট অঙ্ক তিনটি নির্ণয় কর।

মনে কর, অস্পষ্ট অঙ্ক তিনটি যথাক্রমে x, y এবং z. তাহা হইলে,

$$(10x+4)^2 = 1000y + 100z + 96,$$

বা, $100x^2 + 80x + 16 = 1000y + 100z + 96,$

বা, $100x^2 + 80x - 80 = 1000y + 100z = 100(10y + z).$

শেষোক্ত সমীকরণের দক্ষিণ পক্ষ 100 দ্বারা বিভাজ্য ; সুতরাং বাম পক্ষও 100 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এক্ষণে বাম পক্ষের $100x^2$ পদটি 100 দ্বারা বিভাজ্য ; অতএব $80x - 80$, অথবা $20(4x-4)$ পদটিও 100 দ্বারা বিভাজ্য হইবে; অর্থাৎ $4x-4$ কে, সুতরাং $x-1$ কে 5 এর একটি গুণিতক হইতে হইবে। এক্ষণে x এর মান 1 হইতে 9 পর্যন্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলির যে-কোন একটি ; অতএব $x - 1 = 5$;

$$\therefore x = 6.$$

কিন্তু $(64)^2 = 4096$; $\therefore y = 4$ এবং $z = 0$.

উদা. 5. একখানি ট্রেনের x^2 টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কোন স্টেশনে পৌঁছিবার কথা; ভুল করিয়া x টা বাজিয়া x^2 মিনিটের সময় স্টেশনে আসিয়া একব্যক্তিকে ট্রেনের জন্য x ঘণ্টার x মিনিট কম সময় অপেক্ষা করিতে হইল। ট্রেনখানির স্টেশনে পৌঁছিবার সময় নির্ণয় কর।

12 টার $\left(x^2 + \frac{x}{60}\right)$ ঘণ্টা পরে ট্রেনখানির স্টেশনে পৌঁছিবার কথা ;

12 টার $\left(x+\frac{x^2}{60}\right)$ ঘণ্টা পরে ঐ ব্যক্তি স্টেশনে পৌছিয়াছিল ;

$\therefore$ ঐ ব্যক্তির $\left(x^2+\frac{x}{60}\right)-\left(x+\frac{x^2}{60}\right)$ ঘণ্টা অপেক্ষা করিতে হইয়াছিল।

প্রশ্নানুসারে, $x^2+\frac{x}{60}-\left(x+\frac{x^2}{60}\right)=x-\frac{x}{60}$,

বা $\frac{59}{60}x^2-\frac{59}{60}x=\frac{59}{60}x$,

বা $x^2-2x=0$; $\therefore$ $x=2$, বা 0.

অতএব ট্রেনখানির স্টেশনে পৌছিবার সময় 4 টা বাজিয়া 2 মিনিট। x এর মান 0 ধরিলে ট্রেনখানির পৌছিবার সময় 12 টা হয় এবং লোকটি ঠিক সময়ে স্টেশনে পৌছে,—তাহাকে ট্রেনের জন্য অপেক্ষা করিতে হয় না।

প্রশ্নমালা 132

1. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 12 এবং বর্গের সমষ্টি 74 হইবে।

2. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 17 এবং বর্গের অন্তরও 17.

3. 22 কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যাহাদের গুণফল 105 হইবে।

4. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যে, ঐ সংখ্যা হইতে উহার বিপরীত সংখ্যার 30 গুণ বিয়োগ করিলে 1 হইবে।

5. দুইটি সংখ্যার গুণফল 28 এবং তাহাদের বর্গের অন্তর 33 ; সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

6. এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের দুইটি দুইটি লইয়া গুণ করিলে গুণফল 42, 56 এবং 48 হয়।

7. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2700 বর্গগজ এবং ইহার পরিধি 210 গজ। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

8. কোন সম্মিলনীর একটি উৎসবের ব্যয় 50 টাকা ইহার সভ্যগণের মধ্যে সমান অংশে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল; কিন্তু 4 জন তাহাদের অংশ দিতে অসম্মত হওয়ায় বাকি সভ্যগণের প্রত্যেককে অতিরিক্ত 10 আনা করিয়া দিতে হইল। সভ্য-সংখ্যা নির্ণয় কর।

9. একব্যক্তি 240 টাকায় কতকগুলি ভেড়া ক্রয় করিল। যদি সে ঐ টাকায় আরও 20 টি ভেড়া বেশি কিনিতে পারিত তাহা হইলে প্রত্যেক ভেড়ার মূল্য 2 টাকা করিয়া কম হইত। কতগুলি ভেড়া ক্রয় করা হইয়াছিল?

10. একদল সৈন্যের দ্বারা একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র গঠিত হইল। যদি সম্মুখের সারিতে সমান-সংখ্যক সৈন্য-সমাবেশ করিয়া 3 গভীর একটি অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র রচিত হইত তাহা হইলে 121 জন সৈন্য উদ্বৃত্ত হইত। সৈন্য-সংখ্যা নির্ণয় কর।

11. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গগজ। ক্ষেত্রটির ভিতরে চতুর্দিকে বেষ্টিত 2 গজ প্রশস্ত একটি রাস্তার ক্ষেত্রফল 344 বর্গগজ। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

12. 36 জন পুরুষ এবং স্ত্রী কর্মচারীর বেতন 640 টাকা। প্রত্যেক পুরুষ যত জন স্ত্রীলোক তত টাকা এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক যত জন পুরুষ তত টাকা পায়। পুরুষ এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

13. একখানি 250 পাতার বইএর দ্বিতীয়ার্ধ পড়িবার বেগ প্রথমার্ধ অপেক্ষা ঘণ্টায় 15 পাতা বেশি হইলে একব্যক্তির সমস্ত বইখানি শেষ করিতে $8\frac{1}{3}$ ঘণ্টা লাগে। ঐ ব্যক্তি প্রতি ঘণ্টায় কত পাতা করিয়া পড়ে?

14. একব্যক্তি 1809 খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করিয়াছিল। x^2 খ্রীষ্টাব্দে ঐ ব্যক্তির বয়স $x-3$ বৎসর হইলে x এর মান কত?

15. কোন কর্ম সম্পন্ন করিতে B অপেক্ষা A র 8 মিনিট অধিক সময় লাগে। দুইজনে একত্র কার্য করিলে উহারা $7\frac{1}{2}$ মিনিটে সমস্ত কর্মটি শেষ করিতে পারে। প্রত্যেকে কত সময়ে কর্মটি শেষ করিতে পারে?

ত্রিংশ অধ্যায়

দ্বিঘাত অপেক্ষকের লেখ

358. অষ্টম অধ্যায়ে সমতলের উপর বিন্দু-অঙ্কন-প্রণালী আলোচিত হইয়াছে; পরে চতুর্বিংশ অধ্যায়ে একঘাত অপেক্ষকের লেখ-অঙ্কন-প্রণালী এবং লেখ-দ্বারা প্রশ্নসমাধান-প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে, কিরূপে দ্বিঘাত সমীকরণ এবং দ্বিঘাত অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করিতে হয় তাহা প্রদর্শিত হইবে।

দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের (of the second degree) সমীকরণের সাধারণ আকার

$$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0.$$

এ স্থলে a, b, c, f, g, h রাশিগুলি ধ্রুবক (constants).

উল্লিখিত ধ্রুবকগুলির সংখ্যাত্মক মান জানিয়া, যে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা উপরি উক্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাহাদিগকে ছক কাগজের উপর অঙ্কিত করিলে, অঙ্কিত বিন্দুর সবগুলিই একটি **রেখার** উপর অবস্থিত হইবে; এই রেখাটিকে **কনিক** (conic) বলা হয়।

কনিক পাঁচ প্রকার হইতে পারে; যথা, (1) **সরল রেখাদ্বয়** (pair of straight lines), (2) **বৃত্ত** (circle), (3) **উপবৃত্ত** (ellipse), (4) **অধিবৃত্ত** (parabola), (5) **পরাবৃত্ত** (hyperbola). দ্বিতীয় মানের সাধারণ সমীকরণটির দ্বারা কোন্ প্রকারের কনিক সূচিত হইবে, তাহা ধ্রুবকগুলির মানের উপর নির্ভর করে।

359. সরল রেখাদ্বয়

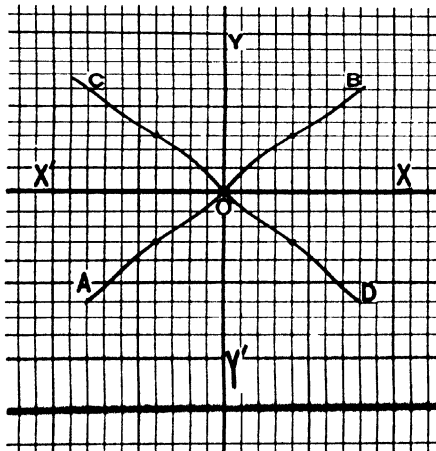
যদি দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বাম পক্ষকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা হইলে সমীকরণটির লেখ দুইটি সরল রেখা হইবে।

উদা. 1. $9x^2-16y^2=0$, এই সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$(3x+4y)(3x-4y)=0.$$

সুতরাং
$$\left.\begin{array}{l}3x+4y=0\\3x-4y=0\end{array}\right\}.$$

$3x+4y=0$ একটি একঘাত সমীকরণ; অতএব ইহার লেখ একটি সরল রেখা হইবে (অনু. 277). এইরূপ, $3x-4y=0$ র লেখও একটি সরল রেখা হইবে।

রেখাদ্বয়ের যে-কোন একটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয়, অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা হয় না। সুতরাং ঐ দুইটি সরল রেখা প্রদত্ত সমীকরণের লেখ; ঐ দুইটি ভিন্ন অন্য কোন রেখা নহে। AB রেখাটি $3x-4y=0$ র এবং CD রেখাটি $3x+4y=0$ র লেখ; রেখা দুইটি একত্র $9x^2-16y^2=0$ র লেখ।

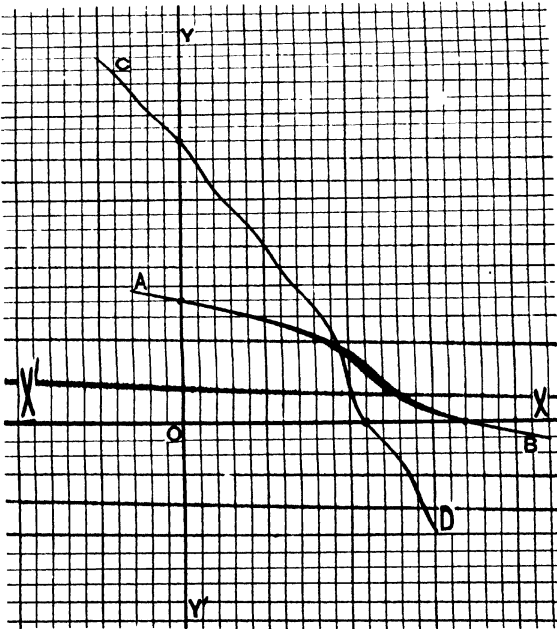
উদা. 2. $52x^2+187y^2+265xy-1456x-3179y+9724=0$, এই সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণটির বাম পক্ষের গুণনীয়ক বিশ্লেষণ করিয়া,

$$(4x+17y-68)(13x+11y-143)=0.$$

সুতরাং লেখটি নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির দ্বারা সূচিত দুইটি সরল রেখা হইবে :

$$\left.\begin{aligned} 4x+17y-68=0 \\ \text{এবং} \quad 13x+11y-143=0 \end{aligned}\right\},$$

অর্থাৎ $\frac{x}{17}+\frac{y}{4}=1$ এবং $\frac{x}{11}+\frac{y}{13}=1.$

উপরের চিত্রে, রেখা দুইটি যথাক্রমে AB এবং CD দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় মানের সাধারণ সমীকরণ, অর্থাৎ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$, এই সমীকরণটির বাম পক্ষকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলেই সমীকরণটির দ্বারা দুইটি সরল রেখা সূচিত হইবে,

অন্যথা হইবে না। ঐ প্রকার গুণনীয়ক-বিশ্লেষণ সম্ভব হইলে, a, b, c প্রভৃতি ধ্রুবকগুলির দ্বারা নিম্নলিখিত সর্তটি সিদ্ধ হয় :

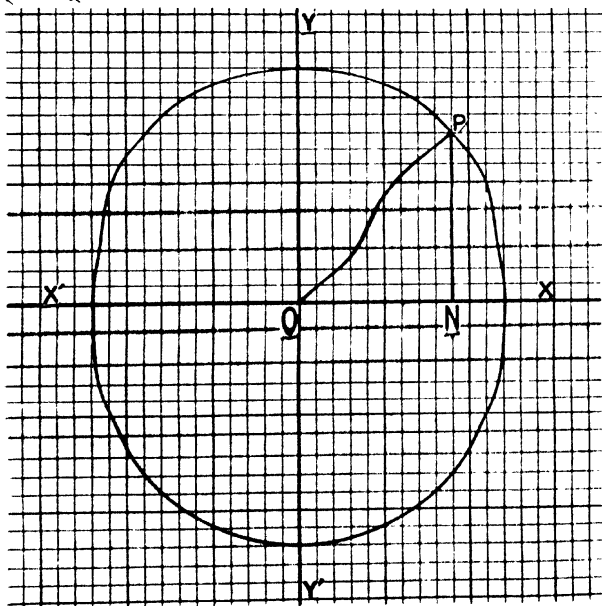
$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

অতএব, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের ধ্রুবকগুলির দ্বারা ঐ সর্তটি সিদ্ধ হইলে সমীকরণটির লেখ দুইটি সরল রেখা হইবে, অন্যথা হইবে না।

360. বৃত্ত (Circle)

x এবং y, এই দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে, x^2 এবং y^2 এর সহগ একই হইলে এবং উহাতে xy-যুক্ত কোন পদ না থাকিলে, সমীকরণটির দ্বারা একটি **বৃত্ত** সূচিত হয়।

উদা. 1. $x^2+y^2=36$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

মূল বিন্দু O কে কেন্দ্র করিয়া এবং $\sqrt{36}=6$ একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত

অঙ্কিত কর। এই বৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়; কারণ P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (ON, NP) এবং $ON^2 + NP^2 = OP^2 = 36$. কিন্তু পরিধির বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অতএব উপরের চিত্রের বৃত্তটিই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ এবং ইহাই উহার একমাত্র লেখ।

চিত্রে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইয়াছে; অর্থাৎ একক = ·2 ইঞ্চি।

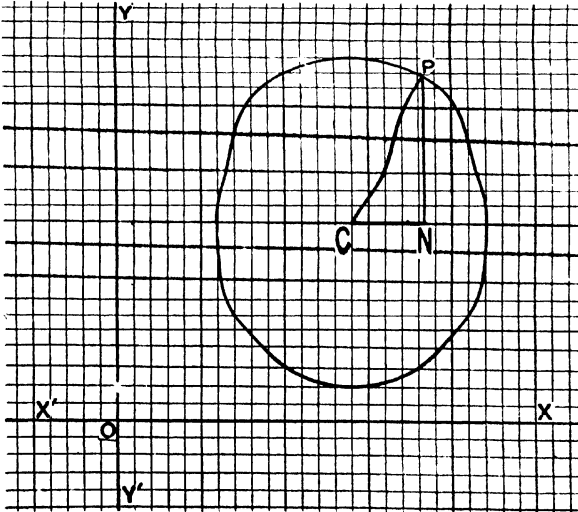
উদা. 2. $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ র লেখ অঙ্কিত কর।

সমীকরণটিতে, x^2 এবং y^2 এর সহগ একই এবং xy-ঘটিত কোন পদ নাই, সুতরাং সমীকরণটির দ্বারা একটি বৃত্ত সূচিত হইবে।

প্রদত্ত সমীকরণ নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়:

$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 10y + 25) = 16,$$

অর্থাৎ
$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 16.$$

C (7, 5) বিন্দুটি অঙ্কিত কর। C কে কেন্দ্র করিয়া এবং 4 একক ব্যাসার্ধ

লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু হইলে,

$$CP^2 = CN^2 + NP^2 = (x-7)^2 + (y-5)^2 ;$$

অর্থাৎ $\quad (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16.$

অতএব বৃত্তের উপরি স্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয়; কিন্তু বৃত্তটির বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না। সুতরাং অঙ্কিত বৃত্তটিই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ এবং উহাই সমীকরণটির একমাত্র লেখ। এ স্থলেও ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুকে, অর্থাৎ ·2 ইঞ্চিকে একক ধরা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ এর আকারের সমীকরণ-দ্বারা (a, b) বিন্দুতে কেন্দ্র-বিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত সূচিত হয়।

দ্রষ্টব্য 2. প্রদত্ত সমীকরণের লেখ বৃত্তটি এইরূপে পাওয়া গেলেও, সমীকরণটি যদ্দ্বারা সিদ্ধ হয় এইরূপ x এবং y এর কতকগুলি মান নির্ণয় করিয়া, তদনুসারে বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া এবং একটি সন্তত রেখাদ্বারা সেগুলি যুক্ত করিয়া উক্ত বৃত্তটি অঙ্কন করাই **প্রকৃত লৈখিক প্রণালী**। একঘাত বা বহুঘাত যে-কোন অপেক্ষক বা সমীকরণের লেখ এই প্রণালীতেই অঙ্কন করা আবশ্যক।

প্রশ্নমালা 133

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর:

1. $x^2 = 9.$ 2. $y^2 = 14.$ 3. $x^2 - y^2 = 0.$

4. $x^2 - 25 = 0.$ 5. $9x^2 - y^2 = 0.$

6. $16x^2 - 25y^2 = 0.$ 7. $49x^2 - 81y^2 = 0.$

8. $x^2 - 2xy + y^2 = 0.$ [সমীকরণটির দ্বারা দুইটি সমাপত (coincident) সরল রেখা সূচিত হয়।]

9. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0.$ 10. $3x^2 + 7xy - 20y^2 = 0.$

11. $x^2 - y^2 + x - y = 0.$ 12. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + x - 2y = 0.$

13. $2x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 3y + 1 = 0.$

14. $7x^2 + 16xy + 9y^2 - 75x - 95y + 50 = 0.$

15. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$ [সমীকরণটির দ্বারা তিনটি সরল রেখা সূচিত হয়।]

16. $x^2 + y^2 = 9.$ 17. $x^2 + y^2 = 16.$ 18. $4x^2 + 4y^2 = 49.$

19. $3x^2+3y^2=16$ 20. $x^2+y^2=\cdot 36$. 21. $x^2+y^2=\frac{9}{121}$.
22. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. 23. $(x-2)^2+(y-3)^2=49$.
24. $(x+3)^2+(y-5)^2=16$. 25. $(x+\cdot 2)^2+(y-\cdot 3)^2=\cdot 25$.
26. $x^2+y^2-8x+6y-11=0$.
27. $x^2+y^2-2x-2y-\frac{7}{8}=0$.
28. $4x^2+4y^2-4x-4y+1=0$.
29. $x^2+y^2-\cdot 6x-\cdot 2y-\cdot 06=0$.
30. $x^3-y^3-xy(x-y)-9(x-y)=0$. [নির্ণেয় লেখ একটি বৃত্ত এবং একটি সরল রেখা হইবে।]

361. উপবৃত্ত (Ellipse)

a, b, c রাশি তিনটি ধন হইলে, $ax^2+by^2=c$ আকারের সমীকরণ-দ্বারা একটি উপবৃত্ত সূচিত হয়। নিম্নের উদাহরণ হইতে রেখাটির (curve) আকার-সম্বন্ধে ধারণা হইবে।

উদা. $16x^2+25y^2=400$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

x এবং y এর যে সকল মান-দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাহাদের একটি তালিকা প্রস্তুত করিবার জন্য সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে লেখা হইল :

$$y=\pm\frac{1}{5}\sqrt{400-16x^2}=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}.$$

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, x এর প্রত্যেক মানের জন্য y এর দুইটি মান থাকিবে; ইহারা পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট। এইরূপ, x কে y দ্বারা প্রকাশ করিয়া দেখান যাইতে পারে যে, y এর প্রত্যেক মানের জন্য x এরও পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি মান থাকিবে। অতএব, রেখাটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়েই প্রতিসম (symmetrical).

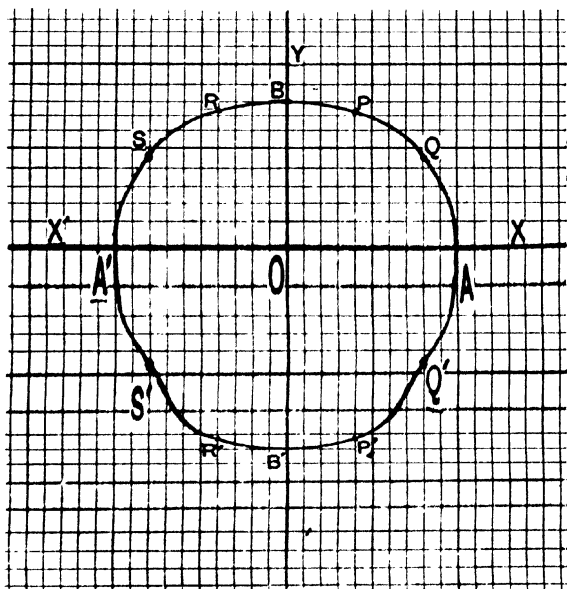
$x>5$, অথবা <-5 হইলে, y এর মান কল্পিত (imaginary) হয়; অতএব রেখাটি $x=\pm 5$, এই দুই সরল রেখার মধ্যে অবস্থিত। এইরূপে, দেখান যাইতে পারে যে, রেখাটি $y=\pm 4$ সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। অতএব নির্ণেয় লেখ একটি বদ্ধ (closed) রেখা; ইহা $x=\pm 5$, $y=\pm 4$, এই সরল রেখা-চতুষ্টয়-দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের মধ্যে সীমাবদ্ধ।

নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক-দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় :

A $\begin{cases} x=5, \\ y=0\,; \end{cases}$ A′ $\begin{cases} x=-5, \\ y=0\,; \end{cases}$ B $\begin{cases} x=0, \\ y=4\,; \end{cases}$ B′ $\begin{cases} x=0, \\ y=-4\,; \end{cases}$

P $\begin{cases} x=2, \\ y=3\cdot66\,; \end{cases}$ P′ $\begin{cases} x=2, \\ y=-3\cdot66\,; \end{cases}$ R $\begin{cases} x=-2, \\ y=3\cdot66\,; \end{cases}$ R′ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-3\cdot66\,; \end{cases}$

Q $\begin{cases} x=4, \\ y=2\cdot4\,, \end{cases}$ Q′ $\begin{cases} x=4, \\ y=-2\cdot4\,; \end{cases}$ S $\begin{cases} x=-4, \\ y=2\cdot4\,; \end{cases}$ S′ $\begin{cases} x=-4, \\ y=-2\cdot4. \end{cases}$

এই বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া একটি সন্তত (continuous) রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে। চিত্রে ·2 ইঞ্চিকে একক ধরা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 1. রেখাটির সমীকরণ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, অথবা $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ এই আকারে লেখা যায়। অক্ষদ্বয়ের উপর অবচ্ছিন্ন অংশ (intercept) AA′ এবং

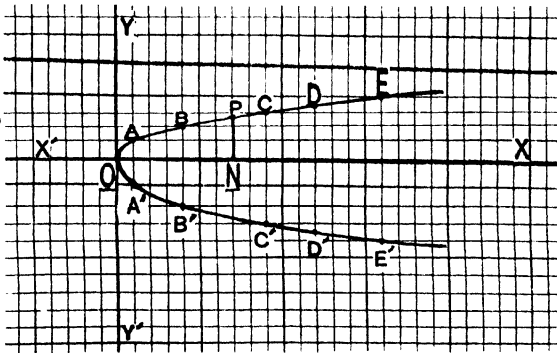
BB′ কে যথাক্রমে উপবৃত্তটির **পরাক্ষ** (major axis) এবং **উপাক্ষ** (minor axis) বলা হয়। এ স্থলে অর্ধাক্ষদ্বয়ের (semi-axis) দৈর্ঘ্য 5 এবং 4. পরাক্ষ এবং উপাক্ষের ছেদ-বিন্দুকে উপবৃত্তের কেন্দ্র বলা হয়। এইরূপ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণটির দ্বারা, মূল বিন্দুতে কেন্দ্র-বিশিষ্ট এবং (a, b) অর্ধাক্ষ-বিশিষ্ট একটি উপবৃত্ত সূচিত হয়।

দ্রষ্টব্য 2. যদি দ্বিতীয় মানের সাধারণ সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$র a, b এবং h, এই তিনটি সহগ এরূপ হয় যে, $h^2<ab$, তাহা হইলে সমীকরণটির দ্বারা একটি উপবৃত্ত সূচিত হয়; যেমন, $2x^2+3y^2+2xy+3x-5y-8=0$ সমীকরণটির দ্বারা একটি উপবৃত্ত সূচিত হয়; কারণ এ স্থলে $a=2, b=3$ এবং $h=1$; অতএব $h^2<ab$.

362. অধিবৃত্ত (Parabola)

দ্বিঘাত সমীকরণে দ্বিতীয় মানের (of the second degree) রাশিগুলি একটি পূর্ণবর্গ হইলে, সমীকরণটির দ্বারা একটি **অধিবৃত্ত** সূচিত হয়।

উদা. $y^2=x$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

x এর প্রত্যেক মানের জন্য y এর দুইটি মান থাকিবে; ইহারা পরস্পর সমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট। অতএব রেখাটি x-অক্ষে প্রতিসম (symmetrical).

রেখাটির উপরি স্থিত নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া একটি সন্তত (continuous) রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যায়।

O (0, 0), A (1, 1), A′ (1, −1), B (4, 2), B′ (4, −2), C (9, 3), C′ (9, −3), D (12, 3·5), D′ (12, −3·5), E (16, 4), E′ (16, −4).

চিত্রে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরা হইয়াছে। x-অক্ষটি, অর্থাৎ প্রতিসাম্য অক্ষটি অধিবৃত্তটির অক্ষ।

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, x এর মান ঋণ হইলে, y এর মান কল্পিত হয়; অতএব রেখাটির (curve) কোন অংশ y-অক্ষের বাম দিকে থাকে না। কিন্তু পজিটিভ পার্শ্বে x এর মান যত বড়ই হউক না কেন y এর তদনুরূপ বাস্তব মান পাওয়া যায়, অতএব y-অক্ষের দক্ষিণ দিকে রেখাটি অনন্ত, অর্থাৎ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। (সরল রেখাও একটি অনন্ত রেখা।)

লেখ-সাহায্যে বর্গমূল-নির্ণয়। উপরের লেখটির সাহায্যে যে-কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, 7 এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। মূল বিন্দু O হইতে x-অক্ষের উপর ON = 7 একক মাপিয়া লও, এবং N বিন্দুর মধ্য দিয়া ঊর্ধ্বদিকে একটি কোটি অঙ্কিত কর। মনে কর, এই কোটি $y^2 = x$ এর লেখটিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দুটি $y^2 = x$ এর লেখ-এর উপর অবস্থিত বলিয়া $NP^2 = ON = 7$. $\therefore NP = \sqrt{7}$. NP এর দৈর্ঘ্য মাপিলে দেখা যায় যে $\sqrt{7}$ = প্রায় 2·6.

দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় মানের সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ র দ্বিতীয় মানের পদগুলির দ্বারা একটি পূর্ণ বর্গ গঠিত হইলে, অর্থাৎ $ax^2 + by^2 + 2hxy$ একটি পূর্ণবর্গ হইলে, সমীকরণটির দ্বারা অধিবৃত্ত সূচিত হয়। $h^2 = ab$ সর্তটি সিদ্ধ হইলে, শেষোক্ত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হয়। অতএব, a, b, h সহগ তিনটির দ্বারা $h^2 = ab$ সর্তটি সিদ্ধ হইলে, সাধারণ সমীকরণটির দ্বারা একটি অধিবৃত্ত সূচিত হয়; যেমন, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$ র লেখ একটি অধিবৃত্ত; কারণ এ স্থলে, $a = 1$, $b = 4$, $h = 2$; অতএব $h^2 = ab$.

363. পরাবৃত্ত (Hyperbola)

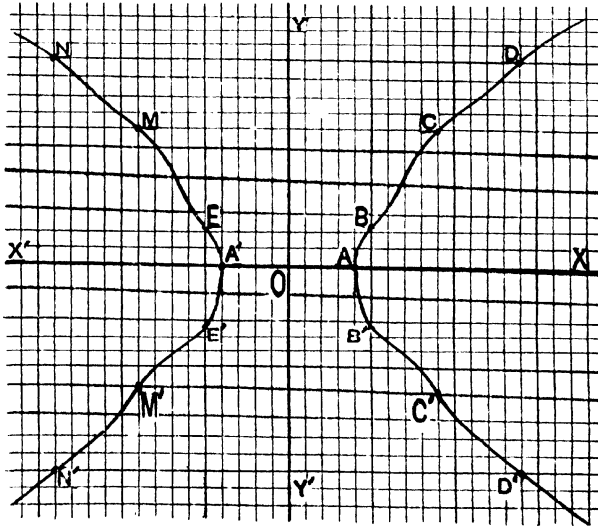
a, b দুইটি ধন রাশি হইলে, $ax^2 - by^2 = 1$ এর আকারের সমীকরণ-দ্বারা **পরাবৃত্ত** সূচিত হয়।

উদা. $9x^2 - 16y^2 = 144$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

অনু. 361 এর ন্যায় এ স্থলেও দেখান যাইতে পারে যে, রেখাটি দুইটি অক্ষেই প্রতিসম। আরও দেখা যাইতেছে যে, রেখাটির কোন অংশ $x = \pm 4$ সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে থাকিবে না; অর্থাৎ রেখাটি $x = +4$ রেখাটির দক্ষিণ পার্শ্বে এবং $x = -4$ রেখাটির বাম পার্শ্বে থাকিবে। অতএব, লেখটি দুইটি রেখার সমষ্টি; এই দুই রেখার প্রত্যেকটিকে পরাবৃত্তের শাখা (branch) বলা হয়।

এ স্থলে, $y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$.

রেখার উপরিস্থিত নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া, সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে।

A (4, 0), A′ (−4, 0), B (5, 2·25), B′ (5, −2·25), C (9, 6·05),

C′ (9, −6·04), D (14, 10·06), D′ (14, −10·06), E (−5, 2·25), E′ (−5, −2·25), M (−9, 6·04), M′ (−9, −6·04), N (−14, 10·06), N′ (−14, −10·06).

A, A′ বিন্দুদ্বয়কে পরাবৃত্তটির **শীর্ষ** এবং AA′ সরল রেখাকে **পরাক্ষ** (major axis) বলা হয়। এ স্থলে উপাক্ষটি (minor axis) কল্পিত (imaginary). O বিন্দুটিকে পরাবৃত্তটির **কেন্দ্র** এবং $9x^2 - 16y^2 = 0$ দ্বারা সূচিত রেখাদ্বয়কে উহার **অসীম পথ** (asymptote) বলে।

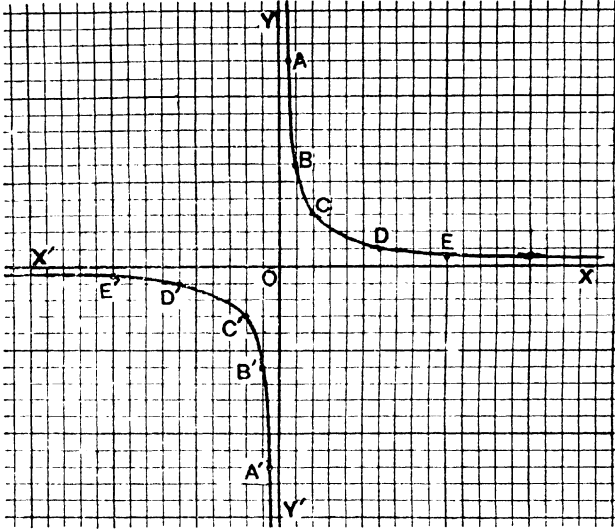
দ্রষ্টব্য 1. সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ আকারেও লেখা যায়। পরাক্ষটির দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{16} = 8$. সাধারণভাবে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা একটি পরাবৃত্ত সূচিত হয়; মূল বিন্দু ইহার কেন্দ্র এবং ইহার বাস্তব পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$. ইহার অসীম পথ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. $a = b$ হইলে, ঐ পরাবৃত্তকে সম-পরাবৃত্ত (rectangular hyperbola) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ এই দ্বিতীয় মানের সাধারণ সমীকরণের a, b, h সহগ তিনটির দ্বারা $h^2 > ab$ সর্তটি সিদ্ধ হইলে সমীকরণটির দ্বারা একটি পরাবৃত্ত সূচিত হয়; যেমন, $3x^2 - 8xy + 4y^2 - 7x + 5y + 2 = 0$ র লেখ একটি পরাবৃত্ত; কারণ এ স্থলে $a = 3$, $b = 4$ এবং $h = -4$; অতএব $h^2 > ab$.

364. $xy = 6$ সমীকরণটির লেখ

এই সমীকরণটির দ্বারা একটি **সম-পরাবৃত্ত** সূচিত হয়; কিন্তু ইহা কোন অক্ষেই প্রতিসম নহে।

নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া, একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে।

A ('5, 12), B (1, 6), C (2, 3), D (6, 1), E (10, '6), A′ (− '5, − 12), B′ (− 1, − 6), C′ (− 2, − 3), D′ (− 6, − 1), E′ (− 10, − '6).

দ্রষ্টব্য। x এর মান 0 হইলে, y এর মান অনন্ত হয়, এবং বিপরীত-ভাবে, y এর মান 0 হইলে, x এর মান অনন্ত হয়; অতএব রেখাটি অক্ষদ্বয়ের অভিমুখে অবিরত অগ্রসর হইলেও কখনও উহাদিগকে স্পর্শ, অথবা ছেদ করিবে না। OX এবং OY রেখাদ্বয় পরাবৃত্তটির অসীম পথ।

365. দ্বিঘাত রাশিমালার লেখ

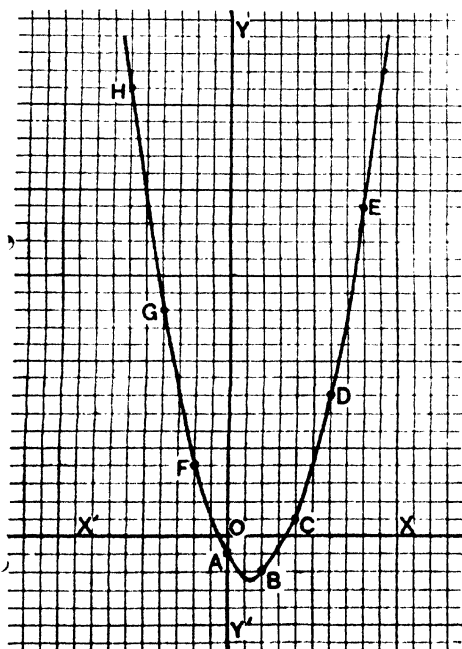
ax^2+bx+c এই দ্বিঘাত রাশিমালাটির লেখ এবং $y=ax^2+bx+c$ এই সমীকরণটির লেখ একই। সমীকরণটিতে ax^2 এই একটি মাত্র দ্বিতীয় মানের পদ আছে এবং ইহা একটি পূর্ণবর্গ; অতএব লেখটি একটি অধিবৃত্ত (parabola) হইবে। কোন নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে, রেখার উপরিস্থিত কয়েকটি বিন্দু

অঙ্কিত করিয়া উহাদিগকে একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলেই নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে।

উদা. $2x^2-3x-1$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

মনে কর, $y=2x^2-3x-1$.

নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া একটি সন্তত রেখা-দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলেই নির্ণেয় লেখটি পাওয়া যাইবে।

A $(0, -1)$, B $(1, -2)$ C $(2, 1)$, D $(3, 8)$, E $(4, 19)$, F $(-1, 4)$ G $(-2, 13)$, H $(-3, 26)$.

চিত্রে OX এর উপর ·2 ইঞ্চিকে এবং OY এর উপর ·1 ইঞ্চিকে একক ধরা হইয়াছে।

366. দ্বিঘাত রাশিমালার চরম (maximum) এবং অবম (minimum) মান

ax^2+bx+c রাশিমালাটির লেখ, অর্থাৎ $y=ax^2+bx+c$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, অনেক ক্ষেত্রে y এর মান কোন একটি নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না; শেষোক্ত রাশিটিকে y এর, অর্থাৎ দ্বিঘাত রাশিমালাটির **অবম** (minimum) মান বলে।

আবার অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, y এর মান কোন একটি নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না; এই রাশিটিকে y এর **চরম** (maximum) মান বলে।

উদা. লৈখিক উপায়ে $2x^2-3x-1$ এর অবম মান নির্ণয় কর।

$y=2x^2-3x-1$ এর অঙ্কিত লেখ হইতে দেখা যায় যে, y এর অবম মান প্রায় $-2\frac{1}{4}$. [প্রকৃত অবম মান $-2\frac{1}{8}$.]

দ্রষ্টব্য। বীজগণিত-সাহায্যে নিম্নলিখিত উপায়ে অবম মান নির্ণয় করা যায় :—

মনে কর, $y=2x^2-3x-1$; $\therefore \quad 2x^2-3x-(1+y)=0$.

দ্বিঘাত সমীকরণটিকে সমাধান করিয়া,

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+8(1+y)}}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{8y+17}.$$

এক্ষণে, x বাস্তব (real) হইলে, মূল-চিহ্নমধ্যস্থ রাশি $8y+17$ কে ধন হইতে হইবে, অর্থাৎ $8y$ কে -17 অপেক্ষা, সুতরাং y কে $-\frac{17}{8}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে হইবে। অতএব y এর মান $-\frac{17}{8}$, অর্থাৎ $-2\frac{1}{8}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। সুতরাং y, অর্থাৎ রাশিমালাটির অবম মান $-2\frac{1}{8}$.

প্রশ্নমালা 134

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

1. $x^2+2y^2=1$.
2. $2x^2+3y^2=1$.
3. $9x^2+4y^2=36$.
4. $25x^2+9y^2=225$.

5. $4x^2+9y^2=36$.　6. $3x^2+5y^2=1$.

7. $x^2-y^2=1$.　8. $2x^2-3y^2=1$.

9. $9x^2-4y^2=36$.　10. $3x^2-7y^2=1$.

11. $25x^2-16y^2=400$.　12. $x^2-49y^2=49$.

13. $y^2=4x$.　14. $y^2=3x$.　15. $3y^2=5x$.

16. $4x^2=y$.　17. $x^2=8y$.　18. $3x^2=7y$.

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের লেখ অঙ্কিত কর :

19. x^2-2x-1.　20. $2x^2-x+1$.　21. $3x^2+x-5$.

22. $3x^2+4x-1$.　23. x^2-4x+5.

24. x^2+x+2.　25. x^2+3x+1.

লেখ-সাহায্যে নিম্নলিখিত সংখ্যাসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর :

26. 8.　27. 11.　28. 13.　29. 17.

30. প্রমাণ কর যে, $1+2x-3x^2$ রাশিটির চরম মান $\frac{4}{3}$.

31. প্রমাণ কর যে, $5x^2-7x+1$ রাশিটির অবম মান প্রায় $-\frac{3}{2}$.

32. প্রমাণ কর যে, $7x^2-9x+20$ রাশিটির অবম মান প্রায় 17.

33. প্রমাণ কর যে, $3+x-5x^2$ এর চরম মান প্রায় 3.

34. প্রমাণ কর যে, $10-6x-3x^2$ এর মান 13 এর বেশি হইতে পারে না।

35. প্রমাণ কর যে, $x^2-2x+23$ রাশিটির মান 22 এর কম হইতে পারে না।

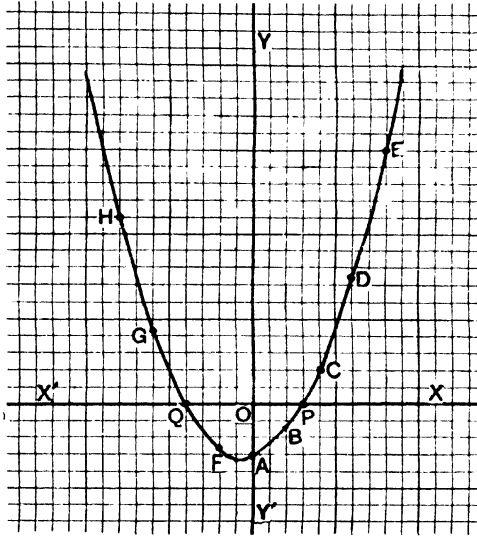
367. লেখ-সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ-সমাধান

লৈখিক উপায়ে দ্বিঘাত সমীকরণ-সমাধান করিবার কতকগুলি প্রক্রিয়া আছে। দুইটি সাধারণ প্রক্রিয়া নিম্নে বিবৃত হইল।

(A) **প্রথম প্রক্রিয়া** : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে। মনে কর, $y=ax^2+bx+c$, এবং এই সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর। লেখটি x-অক্ষকে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করে সেই সকল স্থলে $y=0$, অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$. সুতরাং যে যে বিন্দুতে লেখটি x-অক্ষকে ছেদ করে তাহাদের x-স্থানাঙ্কগুলিই প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

উদা. লৈখিক উপায়ে $2x^2+x-6=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া, $y=2x^2+x-6$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর :—

A (0, −6), B (1, −3), C (2, 4), D (3, 15), E (4, 30), F(−1, −5), G (−3, 9), H (−4, 22).

চিত্রে x-অক্ষের উপর ·2 ইঞ্চিকে এবং y-অক্ষের উপর ·05 ইঞ্চিকে একক ধরা হইয়াছে।

লেখটি যে P এবং Q বিন্দুদ্বয়ে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে, সেই **স্থলে** $y=0$, অর্থাৎ $2x^2+x-6=0$. কিন্তু P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের ভুজ যথা**ক্রমে** 1·5 এবং −2 ; অতএব ইহারাই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজদ্বয়।

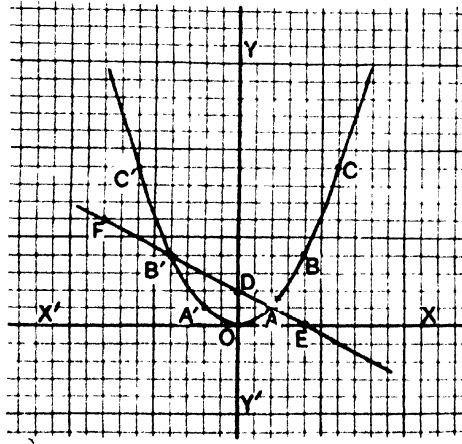
(B) দ্বিতীয় প্রক্রিয়া :

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইলে, মনে কর, $y=x^2$; তাহা হইলে $ay+bx+c=0$. অতএব x এর যে সকল মান-দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাহাদের দ্বারা $y=x^2$ এবং $ay+bx+c=0$ এই দুইটি সমীকরণও সিদ্ধ হয়। অতএব $y=x^2$ এবং $ay+bx+c=0$ র লেখদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুসমূহের ভুজ $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ। $y=x^2$ এর লেখ একটি অধিবৃত্ত, এবং $ay+bx+c=0$ র লেখ একটি সরল রেখা।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, যে-কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, $y=x^2$ এই অধিবৃত্ত এবং অন্য একটি সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া নির্ণয় করা যায়। ইহাদের ছেদ-বিন্দুসমূহের ভুজই নির্ণেয় বীজ।

উদা. লৈখিক উপায়ে $x^2+x-2=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

মনে কর, $y=x^2$, তাহা হইলে $y+x-2=0$.

O (0, 0), A (1, 1), A′(−1, 1), B (2, 4), B′(−2, 4), C (3, 9), C′(−3, 9) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া $y=x^2$ এর লেখটি এবং D (0, 2),

E (2, 0), F (−4, 6) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া $y+x-2=0$ এর লেখটি অঙ্কিত কর।

চিত্রে x-অক্ষের উপর ·2 ইঞ্চিকে এবং y-অক্ষের উপর ·1 ইঞ্চিকে একক ধরা হইয়াছে।

ঐ দুই লেখ-এর ছেদ-বিন্দু A এবং B′ এর স্থানাঙ্ক-দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়, অতএব $x^2+x-2=0$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়। অতএব A এবং B′ এর ভুজদ্বয়ই $x^2+x-2=0$ সমীকরণটির বীজ। ইহারা 1 এবং −2.

দ্রষ্টব্য 1. তৃতীয় প্রক্রিয়া : নিম্নলিখিত লৈখিক উপায়েও $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান করা যায় :—

$a(x^2+y^2)+bx+c=0$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর; ইহা $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ বিন্দুতে কেন্দ্র এবং $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত হইবে। বৃত্তটি যে দুই বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিবে সেই দুই বিন্দুতে $y=0$, সুতরাং $ax^2+bx+c=0$. অতএব এই ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের ভুজই নির্ণেয় বীজ।

দ্রষ্টব্য 2. চতুর্থ প্রক্রিয়া : নিম্নলিখিত লৈখিক উপায়েও $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান করা যায় :—

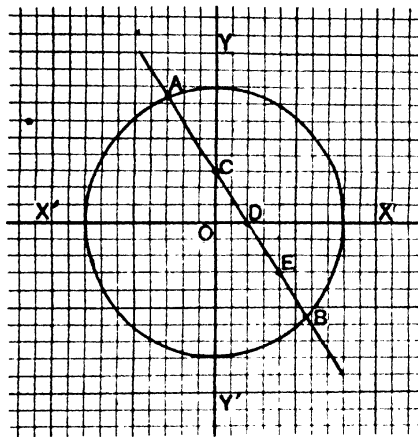
(1) $ax+y+b=0$ এবং (2) $y=c$ এই দুইটি সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর। প্রথমোক্তটি একটি সরল রেখা এবং শেষোক্তটি একটি পরাবৃত্ত হইবে। ইহাদের ছেদ-বিন্দুতে $ax^2+bx+c=0$. অতএব ইহাদের ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের ভুজই নির্ণেয় বীজ।

368. লৈখিক উপায়ে দ্বিঘাত সহসমীকরণ-সমাধান

এই উপায়ে সহসমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, উভয় সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিয়া লেখ দুইটির ছেদ-বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. লৈখিক উপায়ে সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=64 \\ 3x+2y&=\ \ 6 \end{aligned}\right\}.$$

প্রথম সমীকরণটির লেখ মূলবিন্দুতে কেন্দ্র-বিশিষ্ট এবং 8 ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট

একটি বৃত্ত। C (0, 3), D (2, 0), E (4, –3) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দ্বিতীয়টির লেখ অঙ্কিত কর। ইহা একটি সরল রেখা হইবে।

লেখ দুইটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুটির স্থানাঙ্ক প্রায় (–2·9, 7·5) এবং B বিন্দুটির স্থানাঙ্ক প্রায় (5·7, –5·5). অতএব নির্ণেয় বীজ :

$$\left.\begin{array}{rl} & x = -2\cdot9,\ y = 7\cdot5 \\ \text{অথবা,} & x = 5\cdot7,\ y = -5\cdot5 \end{array}\right\} (\text{স্থূলত}).$$

প্রশ্নমালা 135

অনু. 367 এর প্রথম প্রক্রিয়া-অনুসারে, নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $x^2+x-1=0.$
2. $x^2-4x-1=0.$
3. $x^2-4x-5=0.$
4. $x^2-3x-7=0.$
5. $x^2-2x-3=0.$
6. $x^2-7x+4=0.$

অনু. 367 এর দ্বিতীয় প্রক্রিয়ানুসারে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

7. $x^2+2x-1=0$.
8. $3x^2-2x-1=0$.
9. $4x^2-2x-3=0$.
10. $5x^2+x-1=0$.
11. $6x^2+2x-1=0$.
12. $x^2+7x-1=0$.

লৈখিক উপায়ে নিম্নলিখিত সহসমীকরণগুলি সমাধান কর :

13. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{matrix}\right\}$.

14. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=36 \\ 3x-2y=1 \end{matrix}\right\}$.

15. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=169 \\ 2x-y=19 \end{matrix}\right\}$.

16. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=16 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}$.

17. $\left.\begin{matrix} 3x^2+4y^2=16 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\}$.

18. $\left.\begin{matrix} xy=6 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}$.

19. $\left.\begin{matrix} x^2+9y^2=10 \\ 3x+2y=5 \end{matrix}\right\}$.

20. $\left.\begin{matrix} x^2+4y^2=5 \\ xy=1 \end{matrix}\right\}$.

একত্রিংশ অধ্যায়

প্রগতি (Progression)

369. শ্রেণী (Series)

যদি কতকগুলি রাশি এরূপভাবে সজ্জিত হয় যে, উহাদের যে-কোনটিকে পূর্ববর্তী এক বা একাধিক রাশি হইতে, কোন নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে পাওয়া যায় তাহা হইলে এইরূপ রাশির সমাবেশকে **শ্রেণী** বলে। প্রত্যেক রাশিকে শ্রেণীস্থ **পদ** এবং যে নিয়মানুসারে পদগুলি ক্রমবিন্যস্ত হয় তাহাকে **গঠন-নিয়ম** (law of formation) বা **আবৃত্তি-নিয়ম** (law of recurrence) বলে। কোন রাশিমালার পদসমূহ শ্রেণী গঠন করিলে রাশিমালাটিকেও একটি 'শ্রেণী' বলা হয়।

উদা. 1. 2, 4, 6, 8, 10,………রাশিগুলি একটি 'শ্রেণী' গঠন করে; কারণ ইহার যে-কোন পদ অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদের সহিত 2 যোগ করিয়া পাওয়া যায়। n-তম পদ যদি t_n এবং $(n-1)$-তম পদ t_{n-1} হয়, তাহা হইলে $t_n = t_{n-1} + 2$ সমীকরণটির দ্বারা ঐ শ্রেণীর 'গঠন-নিয়ম' প্রকাশিত হয়।

উদা. 2. 3, 6, 12, 24,………রাশিগুলি একটি শ্রেণী গঠন করে। কারণ ইহার যে-কোন পদ অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়। এ স্থলে $t_n = 2t_{n-1}$ সমীকরণটির দ্বারা 'গঠন-নিয়ম' সূচিত হইতেছে।

উদা. 3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10},$………রাশিগুলি একটি শ্রেণী গঠন করে; কারণ ইহার যে-কোন পদ অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদের হরের সহিত 4 যোগ করিয়া পাওয়া যায়। এ স্থলে, $t_n = t_{n-1} + 4$ হরগুলির 'গঠন-নিয়ম'।

দ্রষ্টব্য। কোন শ্রেণীর গঠন-নিয়ম জানা থাকিলে, ঐ শ্রেণীর যে-কোন সংখ্যক পদ নির্ণয় করা যায়; যেমন, শ্রেণীস্থ প্রথম দুইটি পদ যদি 1 ও 3 হয় এবং $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, এই সমীকরণ-দ্বারা 'গঠন-নিয়ম' সূচিত হয়, অর্থাৎ যদি ঐ শ্রেণীর যে-কোন একটি পদ অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি 1, 3, 4, 7, 11, 18,…… হইবে; কারণ $4 = 3 + 1$, $7 = 4 + 3$, $11 = 7 + 4$ ইত্যাদি।

সমান্তর শ্রেণী (Arithmetical Progressions)

370. সমান্তর শ্রেণী

যদি একটি শ্রেণীর যে-কোন পদ অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদের সহিত কোন ধ্রুবকরাশি (constant) যোগ করিয়া পাওয়া যায় তাহা হইলে উহাকে **সমান্তর শ্রেণী** বলে। $t_n = t_{n-1} + k$, এই সমীকরণ-দ্বারা এই জাতীয় শ্রেণীর গঠন-নিয়ম সূচিত হয়; এখানে k একটি ধ্রুবক। ধ্রুবক রাশিটিকে **সাধারণ-অন্তর** (common difference) বলা হয়; কারণ ইহা যে-কোন দুইটি সন্নিহিত পদের অন্তর। যে-কোন পদকে তাহার অব্যবহিত পরবর্তী পদ হইতে বিয়োগ করিয়া 'সাধারণ অন্তর' পাওয়া যায়।

নিম্নে লিখিত (1) ও (2) সারির সংখ্যাগুলি সমান্তর শ্রেণীর অন্তর্গত :

(1) 3, 8, 13, 18, 23,……… [সাধারণ অন্তর $8-3=5$.]

(2) 14, 8, 2, −4, −10,……… [সাধারণ অন্তর $8-14=-6$.]

371. পদসাধারণ (General Term)

কোন শ্রেণীর n-তম পদকে উহার সাধারণ পদ বলা হয়; এ স্থলে n একটি পূর্ণসংখ্যা। এই সাধারণ পদটি t_n দ্বারা সূচিত হয়।

$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots$ শ্রেণীটিকে সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার ধরা যাইতে পারে। এ স্থলে a, প্রথম পদ এবং b, সাধারণ অন্তর।

উক্ত শ্রেণীর

দ্বিতীয় পদ $= a+b = a+(2-1)b$,

তৃতীয় পদ $= a+2b = a+(3-1)b$,

চতুর্থ পদ $= a+3b = a+(4-1)b$ ইত্যাদি।

সুতরাং n-তম পদ $= a+(n-1)b$.

অর্থাৎ, $t_n = a+(n-1)b$.

শেষ পদ (the last term). যদি কোন শ্রেণীতে n-সংখ্যক পদ থাকে তাহা হইলে n-তম পদটি ঐ শ্রেণীর **শেষ পদ** হইবে। সুতরাং l দ্বারা শেষ পদ সূচিত হইলে,

$$l=a+(n-1)b.$$

উদা. 1. 7, 12, 17, 22, 27,......শ্রেণীটির 50-তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=7$; সাধারণ অন্তর $=12-7=5$. অতএব $a=7$, $b=5$ এবং $n=50$.

$$\text{সুতরাং } 50\text{-তম পদ} = 7+(50-1)5$$
$$=7+245=252.$$

উদা. 2. 6, 2, −2, −6,......শ্রেণীটিতে 30 টি পদ আছে। ইহার শেষ পদ নির্ণয় কর।

এ স্থলে, $a=6$, $b=-4$, $n=30$;

$$\therefore \quad l=6+(30-1)\times(-4)=6-116=-110.$$

উদা. 3. একটি সমান্তর শ্রেণীর দশম এবং বিংশ পদ যথাক্রমে 31 এবং 61. শ্রেণীটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে কর, a, প্রথম পদ এবং b, সাধারণ অন্তর।

তাহা হইলে, $31=a+9b$,

এবং $61=a+19b$;

উপরি উক্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $a=4$ এবং $b=3$. সুতরাং প্রথম পদ 4 এবং সাধারণ অন্তর 3.

প্রশ্নমালা 136

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সপ্তম এবং দ্বাদশ পদ নির্ণয় কর :

1. $3, 6, 9, \ldots\ldots$
2. $8, 15, 22, \ldots\ldots$
3. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots\ldots$
4. $2x, 8x, 14x, \ldots\ldots$
5. $-a, -6a, -11a, \ldots\ldots$
6. $a, a+1, a+2, \ldots\ldots$
7. $2a+b, 2a-b, 2a-3b, \ldots\ldots$
8. $a+x, a-x, a-3x, \ldots$

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির n-তম পদ নির্ণয় কর :

9. $6, 12, 18, \cdots\cdots$ 10. $8, 4, 0, \ldots\ldots$

11. $6a, -a, -8a, \cdots\cdots$ 12. $a+b, 2a-3b, 3a-7b, \ldots$

নিম্নলিখিত পদসমূহ-বিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীসমূহের প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর :

13. দ্বিতীয় পদ $=7$ এবং দশম পদ $=31$.

14. তৃতীয় পদ $=a+2b$ এবং সপ্তম পদ $=a+6b$.

15. পঞ্চম পদ $=6a-4b$ এবং অষ্টম পদ $=9a-7b$.

16. চতুর্থ পদ $=0$ এবং নবম পদ $=-\frac{5}{2}$.

17. দ্বিতীয় পদ $=2a$ এবং ষষ্ঠ পদ $=6a-4b$.

নিম্নলিখিত পদসমূহ-বিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীসমূহের n-তম পদ নির্ণয় কর :

18. দ্বিতীয় পদ $=11$ এবং অষ্টম পদ $=53$.

19. তৃতীয় পদ $=16$ এবং দশম পদ $=-33$.

20. যদি $a, 3a-b, 5a-2b, \cdots\cdots$ শ্রেণীর n-তম পদটি $21a-10b$ হয়, তাহা হইলে n কত হইবে নির্ণয় কর।

21. কোন সমান্তর শ্রেণীর 23-তম এবং 41-তম পদ যথাক্রমে 186 এবং 330. শ্রেণীটির 76-তম পদ নির্ণয় কর।

22. a, b, c ও d চারটি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে অবস্থিত থাকিলে, প্রমাণ কর যে, $a+d=b+c$.

23. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম এবং শেষ পদ যথাক্রমে a এবং b হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, প্রথম হইতে r-তম পদ এবং অন্ত হইতে r-তম পদের যোগফল $a+b$ হইবে।

372. সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

তিনটি রাশি-দ্বারা একটি সমান্তর শ্রেণী গঠিত হইলে, তাহাদের মধ্যটিকে অপর দুইটির **সমান্তরীয় মধ্যক** বলে।

যেমন, 8 এবং 18 এর সমান্তরীয় মধ্যক 13.

যদি কতকগুলি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তাহা হইলে প্রথম এবং শেষ পদদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত রাশিগুলিকেও ঐ দুই পদ-মধ্যস্থ সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয়।

যেমন, 8, 13, 18, 23, 28, 33 শ্রেণীটিতে 13, 18, 23, 28 পদগুলি 8 এবং 33 এর মধ্যস্থ সমান্তরীয় মধ্যক ; এবং 8, $16\frac{1}{3}$, $24\frac{2}{3}$, 33 শ্রেণীটিতে $16\frac{1}{3}$, $24\frac{2}{3}$ পদদ্বয় 8 এবং 33 এর মধ্যস্থ সমান্তরীয় মধ্যক।

373. দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক

মনে কর, a এবং b দুইটি রাশি এবং x তাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক ; তাহা হইলে, a, x, b একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore\quad x-a=b-x$, বা $2x=a+b$, বা $x=\dfrac{a+b}{2}$.

অতএব দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক তাহাদের সমষ্টির অর্ধেক।

374. দুইটি রাশির যে-কোন সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয়

মনে কর, a এবং l দুইটি রাশি এবং ইহাদের মধ্যে k-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন করিতে হইবে।

যদি সাধারণ অন্তর b হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি a, $a+b$, $a+2b$,........ l হইবে এবং ইহাতে $k+2$-সংখ্যক পদ থাকিবে। সুতরাং $(k+2)$-তম পদই শেষ পদ l.

$$\therefore\qquad l=a+(k+2-1)b=a+(k+1)b\ ;$$

$$\therefore\qquad b=\frac{l-a}{k+1}.$$

অতএব, মধ্যকগুলি যথাক্রমে,

$$a+\frac{l-1}{k+1},\ a+\frac{2(l-a)}{k+1}\ldots\ldots,\ l-\frac{l-a}{k+1}.$$

উদা. 5 এবং 53 এর মধ্যে 7 টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

মনে কর, b সাধারণ অন্তর। যে হেতু $5+b, 5+2b, \ldots\ldots, 53$ শ্রেণীটির $(7+2)$-তম অর্থাৎ নবম পদ, 53,

$$\therefore \quad 53=5+8b\,; \quad \therefore \quad b=6.$$

সুতরাং মধ্যকগুলি যথাক্রমে 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47.

প্রশ্নমালা 137

1. 30 ও -80 এবং 7 ও 10 এর মধ্যস্থ সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

2. $a+x$ ও $a-x$ এবং $(a+b)^2$ ও $(a-b)^2$ এর মধ্যস্থ সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

3. a এবং $a+3x$ এর মধ্যে 2 টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

4. 7 এবং -32 এর মধ্যে 2 টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

5. 3 এবং $10\frac{1}{2}$ এর মধ্যে 4 টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

6. যদি 10 এবং 74 এর মধ্যে 15 টি সমান্তরীয় মধ্যক থাকে, তাহা হইলে সাধারণ অন্তর কত ?

7. 13 এবং 61 এর মধ্যে n টি সমান্তরীয় মধ্যক আছে। প্রথম মধ্যক এবং $(n-1)$-তম মধ্যকটির অনুপাত $7:15$ হইলে, n এর মান কত নির্ণয় কর।

8. x এবং y এর মধ্যে 4 টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

9. x এবং $3x$ এর মধ্যে x সমান্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর।

375. সমান্তর শ্রেণীর সমষ্টি

মনে কর, $a, \; a+b, \; a+2b\ldots\ldots \; n$-পদ পর্যন্ত

শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে। শ্রেণীটির শেষ পদ $l=a+(n-1)b$. সুতরাং যদি S দ্বারা শ্রেণীটি, বা তাহার সমষ্টি সূচিত হয়, তাহা হইলে

$$S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots\cdots+l\,;$$

এবং শ্রেণীটিকে উল্টা করিয়া লিখিয়া,

$$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots\cdots a\,;$$

যোগ করিয়া,

$$2S = (a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l),$$

(এ স্থলে n-সংখ্যক পদ আছে।)

$$= n(a+l)\ ;$$

$\therefore \qquad S = \frac{1}{2}n(a+l) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad$ (সূত্র 1)

যে হেতু, $\qquad l = a+(n-1)b\ ;$

$\therefore \qquad S = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad$ (সূত্র 2)

(1) এবং (2) এর কোন একটি সূত্র-দ্বারা সমান্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. 3, 5, 7,······শ্রেণীটির n পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে, $\qquad a=3, \quad b=2.$

সুতরাং $\qquad S = \frac{1}{2}n\{6+(n-1)2\} = \frac{1}{2}n(2n+4) = n(n+2).$

উদা. 2. 3, 7, 11, 15, ······শ্রেণীটির 30 পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে সাধারণ অন্তর 4.

সুতরাং $\qquad a=3,\ b=4,\ n=30\ ;$

$\therefore \qquad S = \frac{1}{2}.30.\{2.3+(30-1)4\}$

$\qquad = 15\times(6+116) = 1830.$

উদা. 3. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম এবং শেষ পদ যথাক্রমে 15 এবং 37, এবং সমষ্টি 780. শ্রেণীটিতে কতগুলি পদ আছে নির্ণয় কর।

সূত্র (1) হইতে

$$n = \frac{2S}{a+l} = \frac{2.780}{15+37} = \frac{2.780}{52} = 30.$$

উদা. 4. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 6, শেষ পদ 63 এবং সমষ্টি 690. শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর কত ?

সূত্র (1) হইতে

$$n = \frac{2S}{a+l} = \frac{2.690}{6+63} = 20.$$

যে হেতু, $l = a + (n-1)b$;

∴ $63 = 6 + (20-1)b = 6 + 19b$;

∴ $b = 3$;

∴ সাধারণ অন্তর $= 3$.

উদা. 5. $17, 5, -7, \cdots\cdots$ **শ্রেণীটির সমষ্টি** -78. **ইহার পদগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।**

এখানে, $a = 17$, $b = -12$ এবং $S = -78$.

∴ সূত্র (2) হইতে,

$$-78 = \tfrac{1}{2}n\{34 + (n-1) \times (-12)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}n\{-12n + 46\} = -6n^2 + 23n ;$$
∴ $6n^2 - 23n - 78 = 0,$

বা $(n-6)(6n+13) = 0$;

∴ $n = 6$, অথবা $-\frac{13}{6}$.

দ্বিতীয় উত্তরটি অসম্ভব, কারণ পদগুলির সংখ্যা অবশ্যই কোন ধন, পূর্ণসংখ্যা হইবে ; সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা 6.

উদা. 6. $7, 5, 3, \cdots\cdots$ **শ্রেণীটির প্রথম** n**-সংখ্যক পদের সমষ্টি 12 হইলে,** n **এর মান কত ?**

এখানে, $a = 7$, $b = -2$, $S = 12$.

∴ $$12 = \tfrac{1}{2}n\{14 + (n-1)(-2)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}n(-2n + 16) = -n^2 + 8n.$$
∴ $n^2 - 8n + 12 = 0$;

বা $(n-2)(n-6) = 0$;

∴ $n = 2$, অথবা 6.

দ্রষ্টব্য। এখানে দুইটি উত্তর হইবার কারণ এই যে, শ্রেণীটির 6 টি পদ $7, 5, 3, 1, -1, -3$; 2 টি পদ পর্যন্ত সমষ্টি $7 + 5 = 12$, এবং 6 টি পদ পর্যন্ত সমষ্টিও ঐ একই, কারণ শেষ চারটি পদের সমষ্টি 0.

প্রশ্নমালা 138

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $2, 3, 4, \cdots\cdots 10$ টি পদ পর্যন্ত।
2. $3, 7, 11, \cdots\cdots 12$ টি পদ পর্যন্ত।
3. $5, 1, -3, -7, \cdots\cdots 15$ টি পদ পর্যন্ত।
4. $\sqrt{3}, \sqrt{3}(1-\sqrt{3}), \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}), \cdots\cdots 6$ টি পদ পর্যন্ত।
5. $a, a-b, a-2b, \cdots\cdots 11$ টি পদ পর্যন্ত।
6. $a+x, 2a-x, 3a-3x, \cdots\cdots 6$ টি পদ পর্যন্ত।
7. $3, 6, 5, 9, 7, 12, 9, \cdots\cdots 12$ টি পদ পর্যন্ত।
8. $n, n+1, n+2, \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
9. $1-\frac{1}{a}, 1-\frac{3}{a}, 1-\frac{5}{a}, \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

10. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 4, শেষ পদ 31 এবং সমষ্টি 350 ; পদগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

11. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম এবং শেষ পদ যথাক্রমে 14 এবং 82. শ্রেণীটির সমষ্টি 720. পদগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

12. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 8, পদগুলির সংখ্যা 25 এবং সমষ্টি 2000. শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

13. 23 হইতে 78 পর্যন্ত ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

14. 37 হইতে 137 পর্যন্ত ক্রমিক অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

15. 52 হইতে 112 পর্যন্ত ক্রমিক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

16. $7, 4, 1, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদ লইলে, সমষ্টি 5 হইবে ?

17. $21, 26, 31, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদ যোগ করিলে, সমষ্টি 435 হইবে?

18. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ যথাক্রমে 3 এবং 1. শ্রেণীটির দশম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

19. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 13 এবং শেষ পদ 89. শ্রেণীটির সমষ্টি 1020 হইলে, উহার সাধারণ অন্তর কত ?

20. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 57, শেষ পদ -13 এবং সমষ্টি 330. শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

21. কোন সমান্তর শ্রেণীর দশম পদ পর্যন্ত সমষ্টি 320 এবং বিংশ পদ পর্যন্ত সমষ্টি 1240. শ্রেণীটির 15-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি কত হইবে ?

22. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ, শেষ পদ এবং সমষ্টি যথাক্রমে a, l এবং S. শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর a, l এবং S দ্বারা প্রকাশ কর।

23. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $4n^2+3n$. সাধারণ অন্তর 8 হইলে, শ্রেণীটির প্রথম পদটি কত ?

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $5n^2$ এবং উহার সাধারণ অন্তর 10. শ্রেণীটির প্রথম পদ নির্ণয় কর।

25. যদি কোন শ্রেণীর r-তম পদ $\frac{1}{5}(3r+1)$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি কি ? 30-তম পদ পর্যন্ত শ্রেণীটির সমষ্টি কত হইবে ?

376. স্বাভাবিক সংখ্যা-ঘটিত শ্রেণী

1, 2, 3,..............সংখ্যাগুলিকে **'স্বাভাবিক সংখ্যা'** (natural numbers) বলে। নিম্নে স্বাভাবিক সংখ্যা-বিষয়ক কতকগুলি প্রশ্ন সমাধান করা হইল।

I. **প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।**

মনে কর, $S=1+2+3+\cdots\cdots+n$;

ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী, ইহার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তরও 1.

সুতরাং $S=\frac{n}{2}\{2+n-1\}=\frac{1}{2}n(n+1)$.

II. **প্রথম n অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।**

মনে কর, $S=1+3+5+7+\cdots\cdots+n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

এখানে প্রথম পদ $=1$ এবং সাধারণ অন্তর $=2$.

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}=n^2.$$

এইরূপে n যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

$$=n(n+1).$$

III. **প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি।**

মনে কর, $S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

এক্ষণে, n যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন,

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1,$$

উক্ত অভেদে, $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ পর পর লিখিয়া,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1,$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1.$$

পাটিক্রমে যোগ করিয়া,

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + \cdots n) + n$$
$$= 3S - 3.\tfrac{1}{2}n(n+1) + n, \qquad [\text{ I অনুসারে }]$$

$$\therefore \quad 3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n(n+1) - n$$

$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

IV. প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি।

মনে কর, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3.$

n যে-কোন মানবিশিষ্ট হউক না কেন,

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1\ ;$$

উক্ত অভেদে, $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ লিখিয়া,

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1,$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1,$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4.(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1.$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

পাটিক্রমে যোগ করিয়া,

$$n^4 = 4(1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + n^2)$$
$$+ 4(1 + 2 + \ldots\ldots + n) - n$$
$$= 4S - 6.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4.\tfrac{1}{2}n(n+1) - n\ ;$$

$$\therefore \quad 4S = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$
$$= n(n^3+1) + n(n+1)(2n-1)$$
$$= n(n+1)\{n^2 - n + 1 + 2n - 1\}$$
$$= n(n+1)(n^2+n) = n^2(n+1)^2.$$
$$S = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \{\tfrac{1}{2}n(n+1\}^2.$$

অনুসিদ্ধান্ত। যে হেতু $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+3+\dots\dots+n$;

সুতরাং $1^3+2^3+\dots\dots+n^3 = (1+2+3+\dots\dots+n)^2$.

377. নিম্নে সমষ্টি-নিরূপণ-সম্বন্ধীয় আরও কতকগুলি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. $1.3+3.5+5.7+\cdots$ শ্রেণীটির n পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

1, 3, 5,... শ্রেণীটির n-তম পদ $= 2n-1$.

সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ $= (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$;

$$\therefore \quad S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \cdots\cdots$$
$$= (4.1^2-1) + (4.2^2-1) + (4.3^2-1) + \cdots + (4.n^2-1)$$
$$= 4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) - n$$
$$= 4.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n$$
$$= \tfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - n.$$

উদা. 2. সমষ্টি নির্ণয় কর : $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$$n\text{-তম পদটি} = n(n+2)^2$$
$$= n^3 + 4n^2 + 4n.$$

সুতরাং
$$S = (1^3+4.1^2+4.1) + (2^3+4.2^2+4.2) + \cdots\cdots + (n^3+4.n^2+4n)$$
$$= (1^3+2^3+\cdots+n^3) + 4(1^2+2^2+\cdots+n^2) + 4(1+2+\cdots+n)$$
$$= \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \tfrac{4}{6}n(n+1)(2n+1) + \tfrac{4}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+19n+32).$$

উদা. 3. সমষ্টি নির্ণয় কর: $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$$n\text{-তম পদটি} = 1+2+3+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n.$$

$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\tfrac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n)$$
$$= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{12}n(n+1)(2n+4) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

উদা. 4. সমষ্টি নির্ণয় কর: $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$$n\text{-তম পদটি} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right\}.$$

সুতরাং প্রথম পদটি $= \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4})$,

দ্বিতীয় পদটি $= \frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})$,

তৃতীয় পদটি $= \frac{1}{3}(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})$,

... ...

$$n\text{-তম পদটি} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right);$$

পাটিক্রমে যোগ করিয়া,

$$S = \frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{3n+1}\right\} = \frac{n}{3n+1}.$$

উদা. 5. $3+5+9+15+23+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এই শ্রেণীটির সন্নিহিত পদদ্বয়ের অন্তরগুলি, যেমন 2, 4, 6, 8,$\cdots$একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

মনে কর, S দ্বারা প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি এবং t_n দ্বারা n-তম পদ সূচিত হয়।

$\therefore \quad S = 3+5+9+15+23+\cdots+t_n.$

আবার $\quad S = \quad 3+5+9+15+\cdots+t_{n-1}+t_n.$

বিয়োগ করিয়া, $\quad 0 = 3+2+4+6+\cdots\cdots+(t_n - t_{n-1}) - t_n$

$= 3+(2+4+6+\cdots\cdots n-1$ পদ পর্যন্ত$) - t_n$

$= 3+(n^2-n)-t_n.$

$\therefore \quad t_n = n^2 - n + 3;$

$\therefore \quad S = (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)+3n$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{n}{2}(n+1) + 3n\ldots\ldots$

$= \frac{1}{3}n(n^2-1)+3n = \frac{1}{3}n(n^2+8).$

প্রশ্নমালা 139

নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots$
2. $1^3+5^3+9^3+\ldots\ldots$
3. $3^2+5^2+7^2+\ldots\ldots$
4. $2^2+5^2+8^2+\ldots\ldots$
5. $3^2+7^2+11^2+\cdots\cdots$
6. $1^2+6^2+11^2+\ldots\ldots$
7. $2^3+6^3+10^3+\ldots\ldots$
8. $1.4^2+2.5^2+3.6^2+\ldots\ldots$
9. $1.1^2+3.2^2+5.3^2+\cdots$
10. $1.5+2.6+3.7+\cdots\cdots$
11. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots$
12. $1.7+3.9+5.11+\ldots\ldots$
13. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$
14. $\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{8\cdot13}+\frac{1}{13\cdot18}+\cdots$
15. $1+3+8+16+27+\ldots\ldots$
16. $1+5+16+34+59\ldots\ldots$
17. $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$
18. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$
19. $2.1^2+3.2^2+4.3^2+\cdots\cdots$
20. $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots\ldots$
21. $n.1+(n-1).2+(n-2).3+\cdots+1.n.$
22. প্রমাণ কর যে,

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1).$$

378. নিম্নে সমান্তর শ্রেণী-ঘটিত কয়েকটি সমাধান প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$ এবং $c^2(a+b)$ও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$ এবং $c^2(a+b)$ এর একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিতে হইলে, $b^2(c+a)-a^2(b+c)=c^2(a+b)-b^2(c+a)$ হইবে।

অর্থাৎ $ab(b-a)+c(b^2-a^2)=bc(c-b)+a(c^2-b^2)$,

অথবা $(ab+bc+ca)(b-a)=(ab+bc+ca)(c-b)$,

অর্থাৎ $b-a=c-b$;

সুতরাং a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

উদা. 2. কোন শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি $2n^2+n$ হইলে, ইহার প্রথম 3 টি পদ কত হইবে?

n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত শ্রেণীটির সমষ্টি $=2n^2+n$. সুতরাং $(n-1)$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি $=2(n-1)^2+n-1=2n^2-3n+1$.

n-তম পদটি $=n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি $-(n-1)$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$=(2n^2+n)-(2n^2-3n+1)$$
$$=4n-1.$$

সুতরাং শ্রেণীটির প্রথম 3 টি পদ যথাক্রমে $(4.1-1)$, $(4.2-1)$, $(4.3-1)$, অর্থাৎ 3, 7, 11.

উদা. 3. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর পদগুলির সংখ্যা অযুগ্ম হয়, প্রমাণ কর যে, প্রথম এবং শেষ পদের সমষ্টির অর্ধেক, মধ্যপদের সমান।

মনে কর, a, $a+b$, $a+2b$,.........একটি সমান্তর শ্রেণী এবং ইহাতে $(2n-1)$ -সংখ্যক পদ আছে।

তাহা হইলে, মধ্যপদ $=n$-তম পদ

$$=a+(n-1)b.$$

শেষ পদ $=a+(2n-2)b.$

$\therefore$ প্রথম এবং অন্ত্য-পদের সমষ্টির অর্ধেক

$$=\tfrac{1}{2}\{a+a+2(n-1)b\}$$
$$=a+(n-1)b=\text{মধ্যপদ।}$$

উদা. 4. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে a এবং b ; প্রমাণ কর যে, প্রথম $p+q$ সংখ্যক পদগুলির সমষ্টি

$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right).$$

মনে কর, x, প্রথম পদ এবং y, সাধারণ অন্তর।

তাহা হইলে, $a=x+(p-1)y$,

এবং $b=x+(q-1)y$;

$$\therefore \quad a-b=(p-q)y, \quad \text{বা} \quad y=\frac{a-b}{p-q} \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং} \quad a+b=2x+(p+q-2)y \qquad \cdots \quad (2)$$

$(p+q)$ -সংখ্যক পদগুলির সমষ্টি

$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\{2x+(p+q-1)y\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\{2x+(p+q-2)y+y\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীস্থ তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি 15, এবং ইহাদের প্রথম এবং শেষ পদের বর্গের সমষ্টি 58. পদ তিনটি নির্ণয় কর।

মনে কর, পদ তিনটি $a-b$, a এবং $a+b$.

তাহা হইলে, $(a-b)+a+(a+b)=15$;

$$\therefore \quad 3a=15\,; \quad \therefore \quad a=5\,;$$

$$\text{এবং} \quad (a-b)^2+(a+b)^2=58\,;$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=29\,; \quad \therefore \quad b=\pm 2.$$

সুতরাং নির্ণেয় পদত্রয় 3, 5, 7, অথবা 7, 5, 3.

উদা. 6. একজন কর্মচারীর বেতন 75 টাকা হইতে আরম্ভ করিয়া প্রতি বৎসর 5 টাকা হারে বৃদ্ধি পায়। তাহার 20 বৎসরের মোট বেতন নির্ণয় কর।

প্রথম বৎসরে সে $75\times 12=900$ টাকা পায়।

প্রতি বৎসর সে পূর্ব বৎসর অপেক্ষা $5\times 12=60$ টাকা বেশী পায়।

সুতরাং তাহার বিভিন্ন বৎসরের আয় একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে ; এই শ্রেণীটির প্রথম পদ 900 টাকা এবং সাধারণ অন্তর 60 টাকা।

সুতরাং 20 বৎসরে তাহার মোট বেতন

$= \frac{1}{2} \times 20\{2 \times 900 + 19 \times 60\}$ টাকা

$= 29{,}400$ টাকা।

প্রশ্নমালা 140

1. যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{a+x}{y}, \frac{b+x}{y}, \frac{c+x}{y}$ ইহারাও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

2. যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1+bc}{bc}, \frac{1+ca}{ca}, \frac{1+ab}{ab}$ ইহারাও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

3. যদি a^2, b^2, c^2 একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ইহারাও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

4. যদি $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ এবং $(a-b)^2$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ ইহারাও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

5. (*i*) যদি $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, a, b, c-ও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

(*ii*) যদি ab, bc, ca একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}, \frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ ইহারাও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

6. একটি শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি $3n^2+5n$; শ্রেণীটির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

7. একটি শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি $7n^2-2n$; শ্রেণীটির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

8. একটি শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি n^2+4n; শ্রেণীটির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে, কোন সমান্তর শ্রেণীর $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি, শ্রেণীটির প্রথম $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টির একতৃতীয়াংশের সমান।

10. একটি শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $3n^2-2n$; শ্রেণীটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

11. একটি সমান্তর শ্রেণীর p-সংখ্যক পদের সমষ্টি q এবং q-সংখ্যক পদের সমষ্টি p. প্রমাণ কর যে, $(p+q)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $-(p+q)$.

12. একই প্রথম পদ-বিশিষ্ট তিনটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_1, S_2, S_3. প্রমাণ কর যে, শ্রেণীগুলির সাধারণ অন্তর তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে, S_1, S_2, S_3 -ও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

13. সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এরূপ তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 27 এবং গুণফল 504. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

14. সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এরূপ তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 24 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 242. সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

15. 77 কে এমন সাতটি অংশে বিভক্ত কর যে, অংশগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং শ্রেণীটির প্রথম ও শেষ পদের গুণফল 40 হয়।

16. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম p, q এবং r সংখ্যক পদগুলির সমষ্টি যথাক্রমে a, b এবং c হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

17. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 15° সাধারণ অন্তর-বিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে; কোণগুলি নির্ণয় কর।

18. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলি 20° সাধারণ অন্তর-বিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে; কোণগুলি নির্ণয় কর।

19. একজন কর্মচারীর প্রথম বৎসরের বেতন মাসিক 100 টাকা; তাহার বেতন প্রতি বৎসর 5 টাকা হারে বৃদ্ধি পাইলে, 15 বৎসরের তাহার মোট আয় কত হইবে?

20. কোন পাঠশালার ছাত্রগণের বয়স একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে; ইহার সাধারণ অন্তর 4 মাস। যদি কনিষ্ঠ বালকটির বয়স 8 বৎসর এবং বালকগণের বয়সের সমষ্টি 168 বৎসর হয়, তাহা হইলে ছাত্রসংখ্যা কত?

21. প্রথম সপ্তাহে 1 শিলিং, দ্বিতীয় সপ্তাহে 3 শিলিং, তৃতীয় সপ্তাহে 5 শিলিং ইত্যাদি রূপে দিয়া একটি দেনা এক বৎসরে শোধ করা যায়। বৎসরের শেষ সপ্তাহে দেয় মুদ্রার পরিমাণ এবং দেনার পরিমাণ নির্ণয় কর। [1 বৎসর = 52 সপ্তাহ]

22. প্রথম মাসে 2 টাকা দিলে এবং তারপর প্রত্যেক মাসে অব্যবহিত পূর্ববর্তী মাসে প্রদত্ত টাকা অপেক্ষা 1 টাকা বেশি দিলে, কত মাসে 65 টাকার একটি দেনা শোধ হইবে?

গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression)

379. গুণোত্তর শ্রেণী

যদি একটি শ্রেণীর যে-কোন পদ তাহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদকে কোন ধ্রুবক রাশি-দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই শ্রেণীকে **গুণোত্তর শ্রেণী** বলে।

ধ্রুবক রাশিটিকে **সাধারণ অনুপাত** (common ratio) বলা হয়। শ্রেণীর যে-কোন পদকে তাহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদের দ্বারা ভাগ করিলেই সাধারণ অনুপাতটি পাওয়া যায়।

নিম্নলিখিত সারি দুইটি গুণোত্তর শ্রেণীর অন্তর্গত :

(1) $1, 5, 25, 125, \cdots\cdots$ [সাধারণ অনুপাত 5.]

(2) $a, -6a, 36a, -216a, \cdots\cdots$ [সাধারণ অনুপাত -6.]

যদি t_n এবং t_{n-1} কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম এবং $(n-1)$-তম পদ এবং r ঐ শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত হয়, তাহা হইলে $t_n = t_{n-1}.r$; অতএব ইহাই শ্রেণীটির 'গঠন-নিয়ম'।

যে হেতু $t_1 : t_2 = t_2 : t_3 = \cdots\cdots \frac{1}{r}$; অতএব, গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

380. গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ পদ

মনে কর, a কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ এবং r সাধারণ অনুপাত। তাহা হইলে শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$ এইরূপ হইবে।

এ স্থলে, প্রথম পদ $= ar^0 = ar^{1-1}$,

দ্বিতীয় পদ $= ar = ar^{2-1}$,

তৃতীয় পদ $= ar^2 = ar^{3-1}$;

যদি শ্রেণীতে n-সংখ্যক পদ থাকে এবং অন্ত পদ l হয়, তাহা হইলে

$$l = ar^{n-1}.$$

উদা 1. 3, 6, 12,······শ্রেণীটির দশম পদ নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $= 3$, এবং সাধারণ অনুপাত $= 2$.

সুতরাং দশম পদ $t_{10} = 3.2^9 = 1536$.

উদা. 2. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম এবং তৃতীয় পদ যথাক্রমে 6 এবং 96. শ্রেণীটির চতুর্থ পদ নির্ণয় কর।

মনে কর, শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r

তাহা হইলে, $a = 6,\ ar^2 = 96$.

$\therefore$ $r^2 = 16$, অথবা $r = \pm 4$.

(1) যদি $r = 4$ হয়, তাহা হইলে

চতুর্থ পদ $= 6 \times 4^3 = 6 \times 64 = 384$.

(2) যদি $r = -4$ হয়, তাহা হইলে

চতুর্থ পদ $= 6 \times (-4)^3 = -384$.

প্রশ্নমালা 141

1. 1, 2, 4,······ শ্রেণীটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর।
2. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,······ শ্রেণীটির দশম পদ নির্ণয় কর।
3. $a, ax^2, ax^4, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

4. $-3, -9, -27, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির পঞ্চম পদ নির্ণয় কর।

5. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ 3 এবং 12 ; শ্রেণীটির পঞ্চম পদ নির্ণয় কর।

6. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় এবং পঞ্চম পদ যথাক্রমে -12 এবং 324. ঐ শ্রেণীর সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

7. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কোন্ পদটি $-\frac{1}{243}$ হইবে ?

8. $64, 16, 4, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কোন্ পদটি $\frac{1}{64}$ হইবে ?

9. $\sqrt{3}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

10. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ 3 এবং 1 ; শ্রেণীটির দশম পদ নির্ণয় কর।

381. গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean)

যদি তিনটি রাশি-দ্বারা একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠিত হয়, তাহা হইলে তাহাদের মধ্য পদটিকে অপর দুইটির 'গুণোত্তরীয় মধ্যক' বলে।

যেমন, 5 এবং 20 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক 10 ; কারণ 5, 10, 20 একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

যে-কোন-সংখ্যক রাশি-দ্বারা একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠিত হইলে মধ্য পদগুলিকে, প্রথম এবং শেষ-পদের গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

যেমন, 4, 8, 16, 32 সংখ্যাগুলি 2 এবং 64 সংখ্যা দুইটির মধ্যস্থ গুণোত্তরীয় মধ্যক। এইরূপ 8 এবং 16 সংখ্যা দুইটি 4 এবং 32 এর মধ্যস্থ গুণোত্তরীয় মধ্যক।

382. দুইটি রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক-নির্ণয়

মনে কর, a এবং b দুইটি রাশি এবং x তাহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক, তাহা হইলে a, x, b একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

সুতরাং $\dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x}$; কারণ ইহাদের প্রত্যেকটিই সাধারণ অনুপাতের সমান।

$$\therefore \quad x^2=ab; \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{ab}.$$

অর্থাৎ $\sqrt{ab}$, অথবা $-\sqrt{ab}$ নির্ণেয় মধ্যক।

383. দুইটি সংখ্যার মধ্যস্থ যে-কোন সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক-নির্ণয়

মনে কর, a এবং b দুইটি রাশির মধ্যস্থ n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে। তাহা হইলে, এমন একটি শ্রেণী গঠিত হইবে যাহার প্রথম পদ a এবং শেষ পদ b ; মনে কর, r এই শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত।

তাহা হইলে প্রথম পদ a, এবং $(n+2)$-তম পদ b.

$$\therefore \quad b = ar^{n+1}.$$

$$\therefore \quad r^{n+1} = \frac{b}{a}, \text{ অথবা } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $ar, ar^2, \ldots\ldots ar^n$, এখানে $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;

অর্থাৎ নির্ণেয় মধ্যকগুলি

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \ldots\ldots \; a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

উদা. 1. 7 এবং 63 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় মধ্যক} = \pm\sqrt{7 \times 63} = \pm 21.$$

এখানে মধ্যকটি 21, অথবা -21 হইবে। দুইটি উত্তরই গ্রাহ্য, কারণ 7, 21, 63 এবং 7, -21, 63 উভয়ই এক একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 2. $\frac{1}{9}$ এবং 9 এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

মনে কর, এখানে সাধারণ অনুপাত r. যে হেতু $\frac{1}{9}$ এবং 9 এর মধ্যে তিনটি মধ্যক আছে, সুতরাং $\frac{1}{9}$ প্রথম পদ এবং 9 ঐ গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ হইবে।

সুতরাং $9 = \frac{1}{9} . r^4$, অথবা $r^4 = 81$; $\therefore \quad r = \pm 3$.

(1) যদি $r = 3$ হয়, তাহা হইলে মধ্যকগুলি $\frac{1}{3}$, 1, 3.

(2) যদি $r = -3$ হয়, তাহা হইলে মধ্যকগুলি $-\frac{1}{3}, 1, -3$.

প্রশ্নমালা 142

1. 27 এবং 243 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।
2. 21 এবং $42\frac{6}{7}$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

3. $(a+b)^2$ এবং $(a-b)^2$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

4. $\frac{1}{4}$ এবং 4 এর মধ্যস্থ 3 টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

5. $-\frac{1}{27}$ এবং -27 এর মধ্যস্থ 5 টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

6. 5 এবং 1215 এর মধ্যস্থ 4 টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

7. এক গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 25 এবং পঞ্চম পদ 164025. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

8. 5 এবং 135 এর মধ্যস্থ এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাতে ঐ সংখ্যা চারটি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

9. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, n-তম পদ l এবং প্রথম n-সংখ্যক পদগুলির গুণফল P হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.

10. যদি a এবং b এর গুণোত্তরীয় মধ্যকটি M হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, a এবং b এর মধ্যস্থ n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল M^n হইবে।

11. দুইটি ধন রাশির সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং তাহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক 9. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

384. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি

নিম্নলিখিত নিয়মে গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, প্রথম পদটি a এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, \cdots ar^{n-1}$. মনে কর, শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S.

তাহা হইলে, $$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1};$$

$$\therefore \quad rS= \quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n.$$

বিয়োগ করিয়া,

$$(1-r)S=a-ar^n;$$

$$\therefore \quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

দ্রষ্টব্য 1. 1 অপেক্ষা r ছোট হইলে সমষ্টির উল্লিখিত প্রথম আকারটির এবং বড় হইলে দ্বিতীয়টির প্রয়োগ সুবিধাজনক।

দ্রষ্টব্য 2. শেষ পদ $l = ar^{n-1}$; অতএব সমষ্টি S কে a, l এবং r দ্বারাও প্রকাশ করা যায় ; যেমন,

$$S = \frac{a - lr}{1 - r}.$$

উদা. 1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এ স্থলে, $a = 1,\ r = \frac{1}{3}.$

স্থতরাং $$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 2. $4, -\frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম 5 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এ স্থলে, $a = 4,\ r = -\frac{2}{3},\ n = 5$;

$$\therefore \quad S = \frac{4[1 - (-\frac{2}{3})^5]}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{12}{5}(1 + \tfrac{32}{243}) = 2\tfrac{58}{81}.$$

প্রশ্নমালা 143

সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1 + 2 + 4 + \cdots\cdots 8$ টি পদ পর্যন্ত।
2. $1 + 3 + 9 + \cdots\cdots 6$ টি পদ পর্যন্ত।
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots 5$ টি পদ পর্যন্ত।
4. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots\cdots 6$ টি পদ পর্যন্ত।
5. $3 + 6 + 12 + \cdots\cdots 6$ টি পদ পর্যন্ত।
6. $1 + 3 + 9 + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
7. $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
8. $a + \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
9. $7 + 9\frac{1}{3} + 12\frac{4}{9} + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
10. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ 3 এবং 1. শ্রেণীটির প্রথম টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

11. একটি আপেল গাছে প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসরের দেড়গুণ ফল ধরে ; যদি প্রথম বৎসরে 80 টি ফল ধরে তাহা হইলে 5 বৎসরে গাছটিতে মোট কত ফল ধরিবে ?

12. একব্যক্তি কোন দাতব্য প্রতিষ্ঠানে কিছু মাসিক চাঁদা দিতে স্বীকৃত হইল। যদি তাহার প্রত্যেক মাসের চাঁদা পূর্ব মাসের চাঁদার দ্বিগুণ হয় এবং যদি সে প্রথম মাসে এক পয়সা দেয়, তাহা হইলে 2 বৎসরে তাহার দানের মোট পরিমাণ কত হইবে ?

385. অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি (Sum of an Infinite G. P.)

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, \cdots\cdots$

শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$S = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

এখন, r একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, $r^2 < r$, $r^3 < r^2$, $r^4 < r^3$ ইত্যাদি। [যেমন, যদি $r = \frac{2}{5}$ হয়, $(\frac{2}{5})^2 < \frac{2}{5}$, $(\frac{2}{5})^3 < (\frac{2}{5})^2$, ইত্যাদি।] সুতরাং n যত বৃদ্ধি পাইতে থাকে r^n ততই হ্রাস পায়। এইরূপে n যখন অত্যন্ত বৃহৎ হয়, r^n তখন অতি ক্ষুদ্র হইয়া পড়ে। সুতরাং n কে বর্ধিত করিয়া r^n কে প্রয়োজনানুসারে যত ইচ্ছা ক্ষুদ্র করিতে পারা যায় ; সুতরাং ($1-r$ এর কোনরূপ হ্রাস-বৃদ্ধি না করিয়া) $\frac{ar^n}{1-r}$ কেও যত ইচ্ছা ক্ষুদ্র করিতে পারা যায়।

সুতরাং, n কে যথেষ্ট পরিমাণে বর্ধিত করিয়া, সমষ্টি S এবং $\frac{a}{1-r}$ এর অন্তরকে ইচ্ছানুসারে ক্ষুদ্র করা যায়।

এই সত্যটিকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা হইয়া থাকে : r যদি 1 অপেক্ষা ছোট হয় তাহা হইলে, প্রদত্ত গুণোত্তর শ্রেণীটির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি $\frac{a}{1-r}$.

সুতরাং অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি-নির্ণয়ের নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায় :

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিতে হইবে যে, যদি সাধারণ অনুপাতটি কোন ধন বা ঋণ প্রকৃত ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলেই গুণোত্তর শ্রেণীর অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি একটি সসীম (finite) রাশি হইবে, নতুবা ঐরূপ হইবে না।

উদা. 1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=1$ এবং সাধারণ অনুপাত $=\frac{1}{3}$.

সুতরাং অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

উদা. 2. $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{27}-\cdots\cdots$ এই শ্রেণীটিব অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $a=\frac{3}{4}$ এবং $r=-\frac{4}{9}$;

সুতরাং নির্ণেয় সমষ্টি $=\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{13}=\frac{27}{52}$.

উদা. 3. $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $a=\sqrt{3}, r=\frac{1}{3}$.

সুতরাং নির্ণেয় সমষ্টি $=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

386. আবৃত্ত দশমিকগুলি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর উদাহরণ

$\cdot 3\dot{8}$ দশমিকটি আলোচনা কর।

এখানে $\cdot 3\dot{8}=\cdot 38888\cdots\cdots$

$=\cdot 3+\cdot 08+\cdot 008+\cdot 0008+\cdots\cdots$ অনন্ত পদ পর্যন্ত

$$=\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{100}\cdot\frac{1}{10}+\frac{8}{100}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots\cdots$$

এই শ্রেণীটির দ্বিতীয় পদ হইতে আরম্ভ করিয়া সমস্ত পদগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত ; এই গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $\frac{8}{100}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$.

$$\text{সুতরাং } \cdot 3\dot{8} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + \frac{8}{100} \times \frac{10}{9}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{8}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}.$$

কার্যত, নিম্নলিখিত প্রণালীটি প্রয়োগ করা যাইতে পারে :

$$\text{মনে কর,} \quad S = \cdot 3\dot{8} = \cdot 38888\cdots$$

$$\therefore \quad 10S = 3\cdot 8888\cdots$$

$$\text{এবং} \quad 100S = 38\cdot 8888\cdots$$

$$\therefore \quad 100S - 10S = 38 - 3 = 35 ,$$

$$\therefore \quad 90S = 35 ;$$

$$\therefore \quad S = \tfrac{35}{90} = \tfrac{7}{18}.$$

প্রশ্নমালা 144

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$
3. $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \cdots\cdots$
4. $56 + 28 + 14 + \cdots\cdots$
5. $\frac{1}{3} + \frac{7}{24} + \frac{49}{192} + \cdots$
6. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{6}{25} - \cdots\cdots$
7. $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{9} + \frac{3}{25} + \cdots$
8. $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots\cdots \ (a < 1)$.
9. $\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots\cdots$
10. $(2 + \sqrt{3}) + 1 + (2 - \sqrt{3}) + \cdots\cdots$

11. একটি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ধন এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{x}$ (এখানে, x ধন এবং 2 অপেক্ষা বৃহত্তর), প্রমাণ কর যে, প্রথম পদটি বাকি পদগুলির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

12. প্রমাণ কর যে, ভগ্নাংশ সাধারণ অনুপাত-বিশিষ্ট একটি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর যে-কোন পদ এবং তাহার পরবর্তী পদগুলির সমষ্টির অনুপাত $1-r : r$.

13. একটি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীব প্রথম পদ 1 এবং ইহার যে-কোন পদ তাহার পরবর্তী পদগুলির সমষ্টির সমান। শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

14. একটি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2, এবং ইহার যে-কোন পদ এবং তাহার পরবর্তী পদগুলির সমষ্টির অনুপাতও 2. অনন্ত পদ পর্যন্ত শ্রেণীটিব সমষ্টি নির্ণয় কর।

15. যদি একটি গুণোত্তব শ্রেণীব n-সংখ্যক পদ, $2n$-সংখ্যক পদ এবং অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3 হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$S_1(S_1-S_3)=S_3(S_1-S_2).$$

16. অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টিরূপে প্রকাশ করিয়া নিম্নলিখিত আবৃত্ত দশমিকগুলির মান নির্ণয় কর :—

(1) $\dot{4}$. (2) $\cdot 3\dot{5}$. (3) $\cdot 28\dot{1}$.
(4) $3\cdot 2\dot{7}$. 5) $6.2\dot{5}$ (6) $1\cdot\dot{2}\dot{3}$.

387. নিম্নে গুণোত্তর শ্রেণী-সম্বন্ধীয় কতকগুলি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর শ্রেণীব আদি এবং অন্ত হইতে সমদূরবর্তী যে-কোন দুইটি পদের গুণফল একটি ধ্রুবক হইবে।

মনে কর, $a, ar, ar^2, \cdots ar^{n-1}$ একটি গুণোত্তব শ্রেণী।

আদি হইতে m-তম পদ $= ar^{m-1}$, এবং অন্ত হইতে m-তম পদ = আদি হইতে $(n-m+1)$-তম পদ $= ar^{n-m}$.

সুতরাং এই দুইটি পদের গুণফল

$= ar^{m-1} \times ar^{n-m} = a^2r^{n-1} = a \times ar^{n-1} = a \times l =$ একটি ধ্রুবক রাশি ;

(যে হেতু প্রথম এবং শেষ পদের গুণফল = একটি ধ্রুবক।)

উদা. 2. 62 কে এমন 3 টি অংশে বিভক্ত কর যেন তাহারা একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং তাহাদের গুণফল 1000 হয়।

মনে কর, $\frac{a}{r}$, a, ar নির্ণেয় অংশত্রয়।

$$\therefore \quad \frac{a}{r}+a+ar=62 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$\frac{a}{r}\times a\times ar=1000 \quad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে, $a^3=1000$, $\therefore$ $a=10$.

(1) হইতে, $ar^2+(a-62)r+a=0$,

বা $10r^2-52r+10=0$,

বা $(r-5)(5r-1)=0$,

$\therefore$ $r=5$ বা $\frac{1}{5}$.

সুতরাং 2, 10 এবং 50, নির্ণেয় সংখ্যাত্রয়।

উদা. 3. যদি a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(b^2+c^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(b^2-c^2)$.

যে হেতু a, b, c গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি পদ, অতএব

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}, \quad \text{বা} \quad \frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2};$$

$\therefore$ প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2}$

এবং $=\dfrac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$.

$$\therefore \quad \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}.$$

$$\therefore \quad (b^2+c^2)(a^2-b^2)=(b^2-c^2)(a^2+b^2).$$

উদা. 4. যদি a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{a-b}{b-d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a-c}{b-c}$ও একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k \text{ (মনে কর)।}$$

তাহা হইলে, $k=\frac{a-b}{b-c}=\frac{a-c}{b-d}$; এবং $k^2=\frac{b^2}{c^2}$;

$\therefore \quad \frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)(b-d)}=k^2=\frac{b^2}{c^2}$;

$\therefore \quad \frac{a-b}{b-d}\times\frac{a-c}{b-c}=\left(\frac{b}{c}\right)^2$;

$\therefore \quad \frac{a-b}{b-d}, \frac{b}{c}, \frac{a-c}{b-c}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

উদা. 5. $1+6+31+156+\ldots\ldots$ শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এই শ্রেণীতে সন্নিহিত পদযুগ্মের অন্তর 5, 25, 125,⋯ প্রভৃতি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

মনে কর, $S=1+6+31+156+\cdots\cdots t_n$.

এবং $S= \quad 1+6+31+\cdots\cdots t_{n-1}+t_n$.

বিয়োগ করিয়া,

$$0=1+[5+25+125+\cdots\cdots(n-1) \text{ পদ পর্যন্ত }]-t_n.$$

$$t_n=1+5+25+125+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$

$$=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{5^n-1}{4}.$$

সুতরাং প্রথম পদ $=\frac{1}{4}(5^1-1)$;

দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{4}(5^2-1)$;

n-তম পদ $=\frac{1}{4}(5^n-1)$.

যোগ করিয়া, $S=\frac{1}{4}(5+5^2+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})-\frac{1}{4}n$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{5(5^n-1)}{5-1}-\frac{1}{4}n=\frac{5}{16}(5^n-1)-\frac{1}{4}n.$$

উদা. 6. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots(x<1)$ শ্রেণীটির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, $S=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$

$\therefore \quad x.S= \quad x+3x^2+5x^3+\cdots$

বিয়োগ করিয়া, $(1-x)S = 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots$

$$= 1+2x(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= 1+2x.\frac{1}{1-x}, \quad \because \quad x<1.$$

$$= 1+\frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}.]$$

$$\therefore \qquad S = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

নিম্নলিখিত শ্রেণী দুইটির অনুরূপ পদগুলি গুণ করিয়া শ্রেণীটি পাওয়া যায় :

(1) $1+3+5+7+\cdots\cdots$

(2) $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$

শ্রেণী দুইটির প্রথমটি সমান্তর এবং দ্বিতীয়টি গুণোত্তর ; সুতরাং বর্তমান উদাহরণে প্রদত্ত শ্রেণীটির ন্যায় শ্রেণীগুলিকে **সমান্তরীয়-গুণোত্তর শ্রেণী** (Arithmetico-geometric series) বলে।

উদা. 7. $4+44+444+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

$S = 4+44+444\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= 4(1+11+111+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= \frac{4}{9}(9+99+999+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= \frac{4}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত]

$= \frac{4}{9}[\{10+10^2+10^3+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}-n]$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right] = \frac{40}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{4n}{9}.$$

উদা. 8. একটি বস্তু প্রথম ঘণ্টায় 10 মাইল দ্বিতীয় ঘণ্টায় 8 মাইল, তৃতীয় ঘণ্টায় $6\frac{2}{5}$ মাইল চলে, এবং তাহার এইরূপ ভাবে চলার বেগ একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। প্রমাণ কর যে, বস্তুটি অনন্ত কাল চলিলেও একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিয়া যাইতে পারিবে না।

মনে কর, বস্তুটি অসংখ্য ঘণ্টা চলিতে থাকে, তাহা হইলে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= 10$ মাইল $+ 8$ মাইল $+ 6\frac{2}{5}$ মাইল $+ \ldots\ldots$ অনন্ত পদ পর্যন্ত।

$= (10 + 8 + 6\frac{2}{5} + \ldots\ldots$ অনন্ত পর্যন্ত) মাইল

$= \frac{10}{1-\frac{4}{5}}$ মাইল $= 10 \times \frac{5}{1}$ মাইল $= 50$ মাইল।

সুতরাং ইহা 50 মাইলের অধিক যাইতে পারে না।

প্রশ্নমালা 145

1. যদি একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলির সংখ্যা অযুগ্ম হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, মধ্য পদটির বর্গ, প্রথম এবং অন্ত পদটির গুণফলের সমান।

2. n একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, n-সংখ্যক পদ-বিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণীর মধ্য পদ দুইটি নির্ণয় কর।

3. ধন পদ এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সাধারণ অনুপাত-বিশিষ্ট একটি অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাতটি $\frac{1}{2}$ এর সমান, বা $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, বা বৃহত্তর হইলে, শ্রেণীটির যে-কোন পদ যথাক্রমে তাহার পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টির সমান, বা তদপেক্ষা বৃহত্তর, বা ক্ষুদ্রতর হইবে।

4. যদি p, q, r যথাক্রমে একটি গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $p^{q-r}\, q^{r-p}\, r^{p-q} = 1.$

5. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর শ্রেণীর কোন নির্দিষ্ট পদ হইতে সমদূরবর্তী যে-কোন দুইটি পদের গুণফল নির্দিষ্ট পদটির বর্গের সমান।

6. যদি $a, ar, ar^2, \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত, এই শ্রেণীটির সমষ্টি S, পদগুলির গুণফল P এবং ইহাদের বিপরীতের (reciprocal) সমষ্টি R হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$.

7. যদি x, y, z একটি গুণোত্তর শ্রেণী এবং a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1.$

8. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর n, $2n$ এবং $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3, প্রমাণ কর যে, $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$.

9. গুণোত্তরশ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 91 এবং তাহাদের গুণফল 9261 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

10. গুণোত্তরশ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 26 এবং প্রথম ও শেষ পদের গুণফল 36; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

11. গুণোত্তরশ্রেণীভুক্ত তিনটি পদের সমষ্টি 7, এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 21 ; পদ তিনটি নির্ণয় কর।

12. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি তাহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা 9 বেশি, এবং তাহাদের সমষ্টির বর্গ তাহাদের গুণফল অপেক্ষা 189 বেশি ; সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

13. যদি a, b, c একটি গুণোত্তরশ্রেণী গঠন করে, প্রমাণ কর যে,

$$(a^n+b^n)(b^n-c^n)=(a^n-b^n)(b^n+c^n).$$

14. যদি a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2+ab+b^2}{bc+ca+ab}=\frac{a+b}{b+c}.$$

15. যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী এবং a, b, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, প্রমাণ কর যে, $a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

16. যদি a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ রাশিত্রয়ও একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

17. যদি a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$.

18. a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিলে প্রমাণ কর যে,

$$(b^2-d^2)(a+b+c)^2=(a^2-c^2)(b+c+d)^2.$$

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

19. $1+3+7+15+\cdots\cdots$

20. $1+5+21+85+\cdots\cdots$

21. $2+5+14+41+\cdots\cdots$

22. $5+7+11+19+\cdots\cdots$

23. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অনন্ত পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

24. $1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots\ (x<1)$

25. $1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots\ (x<1)$

26. $1+\frac{3}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\cdots\cdots$

27. $1-\frac{5}{7}+\frac{9}{7^2}-\frac{13}{7^3}+\cdots\cdots$

28. $a+(a+b)x+(a+2b)x^2+(a+3b)x^3\cdots\cdots\ (x<1)$

29. $1+7.2x+13.4x^2+19.8x^3+\cdots\cdots\ (x<\frac{1}{2})$

30. $1-5.3x+9.9x^2-13.27x^3+\cdots\cdots\ (x<\frac{1}{3})$

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

31. $2+22+222+\cdots\cdots$

32. $5+55+555+\cdots\cdots$

33. $\cdot7+\cdot77+\cdot777+\cdots\cdots$

34. একটি বস্তু প্রথম মিনিটে 100 গজ, দ্বিতীয় মিনিটে 60 গজ, তৃতীয় মিনিটে 36 গজ চলে, এবং এই নিয়মে চলিতে থাকে ; এইরূপে তাহার প্রতি মিনিটের চলার বেগ গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। প্রমাণ কর যে, অনন্ত কাল চলিলেও বস্তুটি 250 গজের অধিক যাইতে পারিবে না।

35. একব্যক্তি কোন দাতব্য প্রতিষ্ঠানে প্রথম মাসে 1000 টাকা এবং তাহার পর হইতে প্রতি মাসে পূর্ব মাসের অর্ধেক এই নিয়মে চাঁদা দিতে স্বীকৃত হইলেন। প্রমাণ কর যে, তাঁহার মোট চাঁদার পরিমাণ 2000 টাকার অধিক হইতে পারে না।

36. একব্যক্তি এক সাধুকে প্রথম দিন 2 টি কড়ি দান করিলেন এবং তাহার পর হইতে প্রতি দিন পূর্ব দিনের দ্বিগুণ কড়ি দিতে স্বীকৃত হইলেন। 30 দিনে ঐ ব্যক্তি সাধুটিকে কত টাকা দান করিবেন ? (1 পয়সা = 20 কড়ি)। [লীলাবতী]

দ্বাত্রিংশ অধ্যায়

বিবিধ উপপাদ্যমালা

অভেদ-বিষয়ক উপপাদ্য

388. উপপাদ্য I

যদি x এর কোন পূর্ণ অপেক্ষক (integral function, অনু. 228) এবং 0 পরস্পর অভেদ হয়, তাহা হইলে x এর প্রত্যেক ঘাতের সহগ 0 হইবে।

মনে কর, $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \equiv 0$, একটি অভেদ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

যে হেতু, $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \equiv 0$, একটি অভেদ; অতএব, x এর প্রত্যেক মানের বেলায়ই অপেক্ষকটির মান শূন্য হইবে।

অভেদটিতে $x = 0$ লিখিয়া, $a_0 = 0$.

$$\therefore \quad a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \equiv 0;$$

$$\therefore \quad a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} \equiv 0.$$

এই অভেদটিতে $x = 0$ লিখিয়া, $a_1 = 0$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $a_2 = 0 = \cdots = a_n$;

$$\text{অতএব,} \quad a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

389. উপপাদ্য II

x এর দুইটি পূর্ণ অপেক্ষক পরস্পর অভেদ (identically equal) হইলে, অপেক্ষক দুইটির সমঘাতের সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

মনে কর, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

$$\equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n.$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n \equiv 0.$$

অতএব, উপপাদ্য I অনুসারে,

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0\ ;$$

$$\therefore \quad a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \cdots\cdots,\ a_n = b_n.$$

উদা. 1. m এবং n এর মান কত হইলে, $(x-m)^2+(x-n)^2$ এবং $2x^2-14x+25$ পরস্পর অভেদ (identical) হইবে ?

$(x^2-2mx+m^2)+(x^2-2nx+n^2) \equiv 2x^2-14x+25$, একটি অভেদ,

বা $2x^2-2(m+n)x+m^2+n^2 \equiv 2x^2-14x+25$;

$\therefore \quad m+n=7, \quad m^2+n^2=25$ (উপপাদ্য II অনুসারে)

$\therefore \quad m=4,\ n=3$; বা $m=3,\ n=4$.

উদা. 2. a র মান কত হইলে, $x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a$ রাশিটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইবে ?

যে হেতু $x^2+5xy+6y^2=(x+2y)(x+3y)$; অতএব একঘাত গুণনীয়ক দুইটি $x+2y+m$ এবং $x+3y+n$ আকার-বিশিষ্ট হইবে (অনু. 212 দ্রষ্টব্য)। অতএব,

$$(x+2y+m)(x+3y+n) \equiv x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a,$$

বা, $x^2+5xy+6y^2+(m+n)x+(3m+2n)y+mn$

$$\equiv x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a,$$

বা, $(m+n)x+(3m+2n)y+mn \equiv 3x+7y+a.$

অতএব, উভয় পক্ষের x এর সহগদ্বয়, y এর সহগদ্বয় এবং ধ্রুবকরাশি দুইটি সমিত করিয়া,

$$m+n=3, \quad 3m+2n=7, \quad mn=a.$$

প্রথম সমীকরণ দুইটি হইতে, $m=1,\ n=2.$

$$\therefore \quad a=mn=2.$$

প্রশ্নমালা 146

1. m এবং n এর মান কত হইলে, $(x-m)^2+(x+n)^2$ এবং $2x^2+2x+13$ পরস্পর অভেদ (identical) হইবে ?

2. A, B এবং C এর মান কত হইলে, $A(x+1)^2+B(x+2)+C$ এবং $2x^2+7x+12$ পরস্পর অভেদ হইবে ?

3. c এর মান কত হইলে, $x^2-4y^2+2x+8y-c$ রাশিটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইবে ?

4. a র মান কত হইলে, $6x^2-6y^2-5xy+x+5y-a$ রাশিটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইবে ?

5. a র মান কত হইলে, $4x^2+9y^2-12xy+28x-42y+a$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

6. যদি x^2+mx+n এবং $x^2+m'x+n'$ এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(n-n')^2=(m'-m)(mn'-m'n).$$

7. যদি x^3+mx+n এবং $x^3+m_1x+n_1$ এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(n-n_1)^3=(m_1-m)^2(mn_1-m_1n).$$

390. উপপাদ্য

যে-কোন সংখ্যক বাস্তব (real) রাশির বর্গের সমষ্টি 0 হইলে, রাশিগুলির প্রত্যেকটি 0 হইবে।

রাশিগুলি বাস্তব বলিয়া তাহাদের সকল বর্গগুলিই ধন হইবে (অনু. 320); অতএব, কতকগুলি ধন বাস্তব রাশির সমষ্টি 0 হইতেছে। কিন্তু ধন রাশিগুলির প্রত্যেকটি 0 না হইলে, উহাদের সমষ্টি 0 হইতে পারে না। সুতরাং উক্ত ধন রাশিগুলির প্রত্যেকটি, অর্থাৎ উক্ত বাস্তব রাশিগুলির প্রত্যেকটির বর্গ 0 হইবে ; অতএব বাস্তব রাশিগুলির প্রত্যেকটিও 0 হইবে।

উদা. 1. যদি a, b, c তিনটি বাস্তব রাশি হয় এবং $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ হয়, তাহা হইলে $a=b=c$ হইবে।

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0;$$

$\therefore \quad b-c=0,\ c-a=0$ এবং $a-b=0$, অর্থাৎ $a=b=c$.

উদা. 2. যদি $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

এখানে, $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$,

বা, $a^2(y^2+z^2)+b^2(z^2+x^2)+c^2(x^2+y^2)=2abxy+2acxz+2bcyz$;

পক্ষান্তর করিয়া এবং পদগুলি সজ্ঘবদ্ধ করিয়া,

$$(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2acxz+a^2z^2)=0$$

বা, $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=0$;

অতএব, $ay-bx=0$; $\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$,

$bz-cy=0$; $\therefore \frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,

$cx-az=0$; $\therefore \frac{z}{c}=\frac{x}{a}$,

অতএব, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$

প্রশ্নমালা 147

[নিম্নের উদাহরণসমূহে রাশিগুলিকে ধন বাস্তব রাশি মনে করিতে হইবে।]

1. যদি $(a+b)^2+(c+d)^2=4(ab+cd)$ হয়, তাহা হইলে $a=b$, $c=d$.

2. যদি $(a+b)^2+(b+c)^2=4b(a+c)$ হয়, তাহা হইলে $a=b=c$.

3. যদি $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$ হয়, তাহা হইলে $a=b=c=d$.

4. যদি $x^2+y^2+z^2+u^2+3=2(x+y+z)$ হয়, তাহা হইলে $x=y=z=1$, $u=0$.

5. যদি $3x^2+5y^2+2z^2-6xy+4yz$ হয়, তাহা হইলে $x=y=z$.

6. সমাধান কর : $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$.

7. যদি $a^2+b^2+18=(3+a)(3+b)$ হয়, তাহা হইলে a এবং b এর মান কত ?

8. সমাধান কর : $(x+2a)^3+y^2=0$.

অসমতা (Inequality)

391. একটি রাশি অন্য একটি বাশি অপেক্ষা ছোট কিংবা বড় হইলে, একটি অসমতা দ্বারা তাহা প্রকাশ করা হয়।

$5>4$, $a<x$ ইত্যাদি অসমতার উদাহরণ।

392. কতকগুলি প্রয়োজনীয় ফল

নিম্নের ফলগুলি স্বতঃসিদ্ধ ; ইহাদিগের সাহায্যে বহুবিধ অসমতা প্রমাণ করা যায়। ফলগুলিতে অক্ষরসমূহকে বাস্তব এবং ধন রাশি ধরা হইয়াছে।

(1) $x>y$ হইলে, $y<x$.

(2) $x>y$ হইলে, $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

(3) $x>y$ হইলে, $-x<-y$.

(4) $x>y$ হইলে, $x^n>y^n$.

(5) $x>y$ হইলে, $x+a>y+a$.

(6) $x>y$ হইলে, $x-a>y-a$.

(7) $x>y$ হইলে, $xa>ya$.

(8) $x>y$ হইলে, $\frac{x}{a}>\frac{y}{a}$.

(9) $x_1>y_1$, $x_2>y_2$, $x_3>y_3$ ...... হইলে,

(i) $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots>y_1+y_2+y_3+$

এবং (ii) $x_1x_2x_3\cdots>y_1y_2y_3\cdots$

এইরূপ, $x<y$ হইলে, অনুরূপ ফল অর্থাৎ $xa<ya$, $-x>-y$. ইত্যাদি ফলগুলি পাওয়া যায়।

393. সহজেই বুঝা যায় যে, $x > y$ হইলে, $x-y$ ধন হইবে, এবং $x < y$ হইলে, $x-y$ ঋণ হইবে। অতএব $x-y$ কে ধন প্রমাণ করিতে পারিলে $x > y$ অসমতাটি এবং উহাকে ঋণ প্রমাণ করিতে পারিলে $x < y$ অসমতাটি প্রমাণিত হইবে।

উদা. 1. যদি a এবং b দুইটি বাস্তব এবং অসমান রাশি হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2 > 2ab$.

এ স্থলে, $(a^2+b^2)-(2ab)=a^2-2ab+b^2$
$=(a-b)^2$, একটি ধন রাশি।

$$\therefore \quad a^2+b^2 > 2ab.$$

দ্রষ্টব্য 1. $a=b$ হইলে, $a^2+b^2=2ab$ হয়। অতএব a^2+b^2 কখনই $2ab$ অপেক্ষা লঘুতর হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য 2. x এবং y দুইটি বাস্তব এবং ধন রাশি হইলে, $\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{y}$ বাস্তব হইবে; অতএব $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ ও বাস্তব হইবে, সুতরাং $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ধন হইবে।

এক্ষণে, $(x+y)-(2\sqrt{x}\sqrt{y})=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$, একটি ধন রাশি,

$$\therefore \quad x+y > 2\sqrt{xy}, \text{ বা } \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy};$$

অর্থাৎ দুইটি ধন রাশির সমান্তরীয় মধ্যক উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদা. 2. যদি x একটি বাস্তব এবং ধন রাশি হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^n+\frac{1}{x^n} > 2.$$

$(x^n-1)^2$ একটি ধন রাশি, অর্থাৎ $(x^n-1)^2 > 0$,

বা, $x^{2n}-2x^n+1 > 0$,

বা, $x^{2n}+1 > 2x^n$, [উভয় পক্ষে $2x^n$ যোগ করিয়া],

বা, $\dfrac{x^{2n}+1}{x^n} > 2$, [উভয় পক্ষ x^n দ্বারা ভাগ করিয়া],

বা, $x^n+\dfrac{1}{x^n} > 2.$

দ্রষ্টব্য। $x=1$ হইলে, $x^n+\frac{1}{x^n}=2$ হয়।

উদা. 3. যদি a, b, c তিনটি বাস্তব রাশি হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^2+b^2+c^2 > 2(bc-ca+ab).$$

এ স্থলে $(a^2+b^2+c^2)-2(bc-ca+ab)$

$$=a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$$

$$=(a-b+c)^2, \quad \text{একটি ধন রাশি ;}$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2 > 2(bc-ca+ab).$$

উদা. 4. যদি a, b, c তিনটি বাস্তব, ধন এবং অসমান রাশি হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(b+c)(c+a)(a+b) > 8abc.$$

$$b+c > 2\sqrt{bc}, \quad c+a > 2\sqrt{ca}, \quad a+b > 2\sqrt{ab},$$

[দ্রষ্টব্য 2, উদা. 1]

$$\therefore \quad (b+c)(c+a)(a+b) > 2\sqrt{bc}.\,2\sqrt{ca}.\,2\sqrt{ab} \text{ অর্থাৎ } > 8abc.$$

এখন, $a=b=c$ হইলে, অসমতাটি $(b+c)(c+a)(a+b)=8abc$ সমতাটিতে পরিবর্তিত হয়।

394. চরম (Maximum) এবং অবম (Minimum) মান

উদা. 1. $16+4x-x^2$ রাশিটির চরম মান নির্ণয় কর।

x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া প্রদত্ত রাশিমালার যে সকল মান পাওয়া যায় তাহাদের মধ্যে যেটি বৃহত্তম সেইটি নির্ণয় করিতে হইবে।

$$16+4x-x^2=20-(4-4x+x^2)$$

$$=20-(x-2)^2\,;$$

x বাস্তব হইলে, $(x-2)^2$ কখনও ঋণ হইতে পারে না ;

অতএব x এর মান যে কোন বাস্তব রাশি হউক না কেন, রাশিমালাটির মান কখনও 20 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, $x=2$

হইলে, রাশিমালাটির মান 20 হয়; অতএব দেখা গেল যে, রাশিমালাটির মান 20 হইতে পারে, কিন্তু 20 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

সুতরাং রাশিটির চরম মান 20.

উদা. 2. x^2+4x+8 রাশিটির অবম মান নির্ণয় কর।

x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া প্রদত্ত রাশিটির যে সকল মান পাওয়া যায় তাহাদের মধ্যে যেটি লঘুতম সেইটি নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রদত্ত রাশিটি $=(x+2)^2+4$.

$(x+2)^2$ কখনও ঋণ হইতে পারে না; অতএব রাশিটির মান কখনও 4 অপেক্ষা লঘুতর হইতে পারে না; কিন্তু $x=-2$ হইলে রাশিটির মান 4 হয়।

$\therefore$ রাশিটির অবম মান 4.

উদা. 3. যদি দুইটি ধন রাশির সমষ্টি স্থির থাকে, তবে উহারা পরস্পর সমান হইলে, উহাদের গুণফল বৃহত্তম হইবে; কিন্তু গুণফল স্থির থাকিলে, উহাদের সমষ্টি লঘুতম হইবে।

মনে কর x এবং y দুইটি ধনরাশি; S উহাদের সমষ্টি এবং P উহাদের গুণফল।

একণে, $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$,

অর্থাৎ $4P=S^2-(x-y)^2$ ... ... (1)

এবং $S^2=4P+(x-y)^2$ ... ... (2)

(1) হইতে, দেখা যাইতেছে যে, $S(=x+y)$ এর মান স্থির বলিয়া, যখন $x=y$ হয় তখন P বৃহত্তম হয়, কারণ তখন বিযুক্ত ধন সংখ্যাটির মান 0 হয়; এইরূপ, (2) হইতে দেখা যাইতেছে যে, P এর মান স্থির থাকিলে, যখন $x=y$ হয় তখন S লঘুতম হয়।

প্রথম সিদ্ধান্ত অনুসারে দেখা গেল যে,

$$x=y=\frac{S}{2}=\frac{x+y}{2} \text{ হইলে, } xy \text{ এর মান বৃহত্তম হয়।} \quad \text{......(A)}$$

দ্রষ্টব্য। দুইএর অধিক সংখ্যক ধন রাশি লইয়া, তাহাদের প্রত্যেক দুইটিতে সিদ্ধান্ত (A) প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে, রাশিগুলির সমষ্টি স্থির থাকিলে যখন রাশিগুলি পরস্পর সমান হইবে তখনই উহাদের গুণফল বৃহত্তম হইবে।

মনে কর $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$, n-সংখ্যক ধন রাশি। তাহা হইলে, যখন $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots\cdots = x_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n}{n}$ হয়, তখন উহাদের গুণফল $x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n$ বৃহত্তম হয়।

$$\therefore \quad x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n < \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

বা $$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} > (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

প্রশ্নমালা 148

রাশিগুলি বাস্তব, ধন এবং অসমান ধরিয়া প্রমাণ কর যে :

1. $x^2 - xy + y^2 > xy.$
2. $a^3 + b^3 > ab(a+b).$
3. $a^3 + \frac{1}{a^3} > 2.$ 4. $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}.$
5. $a^n + \frac{1}{a^n} > a^{n-r} + \frac{1}{a^{n-r}}$ (যদি $n > r$ হয়)।
6. $x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy.$
7. $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) > (b+c)(c+a)(a+b).$
8. $x^2 + y^2 + z^2 > 2(xy - yz + zx).$
9. $a > b > c$ হইলে, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ একটি ধন রাশি।
10. $a > b > c$ হইলে, $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(c-b)$ একটি ধন রাশি।
11. $a > b > c$ হইলে, $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$ একটি ঋণ রাশি।
12. $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) > 6abc.$
13. $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc.$
14. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 > 4abcd.$
15. $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n > n a_1 a_2 \ldots a_n.$

16. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 27a^2b^2c^2$.

17. নিম্নলিখিত রাশিগুলির চরম মান নির্ণয় কর :
(i) $20-2x^2-3x$. (ii) $-3x^2+4x+7$.

18. নিম্নলিখিত রাশিগুলির অবম মান নির্ণয় কর :
(i) $x^2+6x+10$. (ii) $3-4x+2x^2$.

অপনয়ন (Elimination)

395. অপনয়ন-প্রণালী

কতকগুলি সমীকরণ হইতে এক বা একাধিক বীজগণিতীয় রাশি **অপনয়ন** করিতে হইলে ঐ সকল সমীকরণ হইতে ঐ রাশি-বর্জিত একটি সমীকরণ গঠন করিতে হয়। লব্ধ সমীকরণটিকে **অপনীতক** (eliminant) বলে।

যেমন, $x+a=0$ এবং $3x+2b=0$, সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন করিতে হইলে, ইহাদের সাহায্যে এরূপ একটি সমীকরণ গঠন করিতে হইবে যাহাতে x থাকিবে না। এক্ষণে, প্রথম সমীকরণ হইতে, $x=-a$, এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $x=-\frac{2}{3}b$. x এর এই মান দুইটি সমিত করিয়া $a=\frac{2}{3}b$, অর্থাৎ $3a-2b=0$. এই সমীকরণটি প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে গঠন করা হইয়াছে এবং ইহাতে x নাই; অতএব ইহাই নির্ণেয় অপনীতক। ইহাকে উক্ত সমীকরণদ্বয়ের x-অপনীতক (x-eliminant) বলা যায়।

$x+a=0$ এবং $3x+2b=0$ সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটি হইতে x এর একটি মান পাওয়া যায় এবং দ্বিতীয়টি হইতে x এর একটি মান পাওয়া যায় ; অতএব এই দুইটি মান পরস্পর সমান হইলে, সমীকরণ দুইটি যুগপৎ সিদ্ধ হয়, অন্যথা হয় না। এক্ষণে, মান দুইটি সমিত করিলে, উক্ত সমীকরণদ্বয়ের x-অপনীতকটি পাওয়া যায়। অতএব x-অপনীতকটি সমীকরণদ্বয়ের যুগপৎ সিদ্ধ হইবার সর্ত।

এ স্থলে দেখা যাইতেছে যে, একটি রাশি অপনয়ন করিবার জন্য দুইটি সমীকরণ প্রয়োজন হয়। সাধারণত অপনেয় রাশিগুলির সংখ্যা অপেক্ষা প্রদত্ত সমীকরণসমূহের সংখ্যা 1 অধিক হওয়া প্রয়োজন। যেমন, দুইটি রাশি অপনয়ন

করিতে তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন ; কারণ তিনটি সমীকরণের দুইটি হইতে অপনেয় রাশি দুইটির মান নির্ণয় করিয়া তৃতীয়টিতে বসাইলে, অপনীত সমীকরণ পাওয়া যাইবে ; এইরূপ, তিনটি রাশি অপনয়ন করিতে চারটি সমীকরণ প্রয়োজন হয় ; চারটির জন্য পাঁচটি প্রয়োজন হয় ; ইত্যাদি।

প্রদত্ত সমীকরণসমূহ অপনেয় রাশিসমূহের সমমাত্র (homogeneous) সমীকরণ হইলে, সমীকরণসমূহের সংখ্যা অপনেয় রাশিসমূহের সংখ্যা অপেক্ষা 1 অধিক না হইয়া উহার সমান হইলেও চলে।

যেমন, x এবং y এর দুইটি মাত্র সমমাত্র সমীকরণ, যথা $3x+ay=0$ এবং $bx+7y=0$ হইতেই x এবং y কে অপনয়ন করা যায়, তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন হয় না। সমীকরণ দুইটিকে y দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$3\frac{x}{y}+a=0,\ b\frac{x}{y}+7=0.$$

এক্ষণে $\frac{x}{y}$ কে একটি মাত্র অপনেয় রাশি মনে করিয়া শেষোক্ত সমীকরণদ্বয় হইতে উহাকে অপনয়ন করা যায়। এইরূপে অপনীতকটি $ab=21$.

396. নিম্নের উদাহরণসমূহে অপনয়ন-সম্বন্ধীয় কতকগুলি বিশেষ প্রণালী প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. $px+q=0$ এবং $p'x+q'=0$ হইতে x অপনয়ন কর।

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটি হইতে, $x=-\frac{q}{p}$,

এবং দ্বিতীয়টি হইতে, $x=-\frac{q'}{p'}$;

x এর এই দুইটি মান সমিত করিয়া,

$$\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'},\ \text{বা}\ pq'-p'q=0.$$

উদা. 2. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে x এবং y অপনয়ন কর :—

$$a_1x+b_1y=0,$$
$$a_2x+b_2y=0.$$

ইহারা x এবং y এর সমমাত্র সমীকরণ বলিয়া, উহাদিগকে অপনয়ন করিবার পক্ষে এই দুইটি সমীকরণই যথেষ্ট।

উভয় সমীকরণকে y দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$a_1\frac{x}{y}+b_1=0,$$

এবং
$$a_2\frac{x}{y}+b_2=0.$$

এই দুই সমীকরণ হইতে, উদা. 1 এর প্রক্রিয়া অনুসারে, $\frac{x}{y}$ অপনয়ন করিয়া,

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

উদা. 3. নিম্নের সমীকরণ তিনটি হইতে x, y এবং z অপনয়ন কর :—

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0.$$

শেষের সমীকরণ দুইটি হইতে বজ্র-গুণন দ্বারা,

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}=k \text{ (মনে কর)};$$

[অনু. 263]

$$\therefore\quad x=k(b_2c_3-b_3c_2),\quad y=k(c_2a_3-c_3a_2),$$
$$z=k(a_2b_3-a_3b_2);$$

x, y এবং z এর পরিবর্তে এই মানগুলি প্রথম সমীকরণে লিখিয়া,

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

উদা. 4. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন কর :—

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0$$
$$a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

বজ্র-গুণন দ্বারা,

$$\frac{x^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{x}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \text{এবং} \quad x=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$\therefore \quad \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left(\frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2;$$

$$\therefore \quad (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

উদা. 5. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন কর :—

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x^3 + b_2x + c_2 = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) কে x দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

(2) কে a_1 এবং (3) কে a_2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং লব্ধ গুণফলদ্বয়ের একটি হইতে অপরটি বিয়োগ করিয়া,

$$a_2b_1x^2 + (a_2c_1 - a_1b_2)x - a_1c_2 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

(1) এবং (4) হইতে বজ্র-গুণন দ্বারা,

$$\frac{x^2}{-a_1b_1c_2 - c_1(a_2c_1 - a_1b_2)} = \frac{x}{a_2b_1c_1 + a_1^2c_2}$$

$$= \frac{1}{a_1(a_2c_1 - a_1b_2) - a_2b_1^2};$$

$$\therefore \quad (a_2b_1c_1 + a_1^2c_2)^2$$
$$= \{a_1b_1c_2 + c_1(a_2c_1 - a_1b_2)\}\{a_2b_1^2 - a_1(a_2c_1 - a_1b_2)\}.$$

উদা. 6. নিম্নের সমীকরণ তিনটি হইতে x, y এবং z অপনয়ন কর :—

$$\frac{x}{y+z} = a, \quad \frac{y}{z+x} = b; \quad \frac{z}{x+y} = c.$$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $x = a(y+z)$;

$$\therefore \quad x + y + z = a(y+z) + (y+z) = (y+z)(a+1);$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1} = \frac{y+z}{x+y+z}.$$

এইরূপে, $\dfrac{1}{b+1} = \dfrac{z+x}{x+y+z}$, $\quad \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{x+y}{x+y+z}$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2, \text{ নির্ণেয় অপনীতক।}$$

উদা. 7. $l^3x+m^3y=a$, $l^2+m^2=1$ এবং $-lx+my=0$, এই তিনটি সমীকরণ হইতে l এবং m অপনয়ন কর।

প্রথম এবং তৃতীয় সমীকরণ দুইটিকে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় :—

$$\left.\begin{array}{r} l^3x+m^3y-a=0 \\ -lx+my+0=0 \end{array}\right\}$$

বজ্র-গুণন দ্বারা,

$$\frac{x}{am}=\frac{y}{al}=\frac{1}{l^3m+lm^3};$$

$$\therefore \quad \frac{am}{x}=\frac{al}{y}=lm(l^2+m^2)$$

$$=lm,$$

(কারণ দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $l^2+m^2=1$,)

$$\therefore \quad \frac{a}{x}=l, \quad \frac{a}{y}=m;$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2}{y^2}=l^2+m^2=1;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}.$$

প্রশ্নমালা 149

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x অপনয়ন কর :

1. $\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1=0 \\ a_2x+b_2=0 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} a_1x^2+b_1x+c_1=0 \\ a_2x+b_2=0 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \\ b_1x+c_1=0 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} x^3+px+q=0 \\ x^2+rx+s=0 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} x+\frac{1}{x}=p+q \\ x-\frac{1}{x}=p-q \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r} px+\frac{q}{x}=m \\ qx+\frac{p}{x}=n \end{array}\right\}$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x এবং y অপনয়ন কর :

7. $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} x+y=l \\ x^2+y^2=m \\ x^3+y^3=n \end{array}\right\}$

9. $x-y=a, \quad 2xy=b, \quad x^2+y^2=c.$

10. $\left.\begin{array}{l} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0 \end{array}\right\}$

11. $x+y=a, xy=b, x^3+y^3=c.$

12. $lx+my=n, \quad l'x+m'y=n', \quad x^2+y^2=c^2.$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x, y এবং z অপনয়ন কর :

13. $\left.\begin{array}{l} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=a \\ yz+zx+xy=b \\ x^3+y^3+z^3=c \\ xyz=d \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} ax+hy+gz=0 \\ hx+by+fz=0 \\ gx+fy+cz=0 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{y-z}=x^2 \\ \dfrac{b}{z-x}=y^2 \\ \dfrac{c}{x-y}=z^2, \; xyz=d \end{array}\right\}$

17. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x, y, z এবং u অপনয়ন কর :

$$\left.\begin{array}{l} x=by+cz+du \\ y=ax+cz+du \\ z=ax+by+du \\ u=ax+by+cz \end{array}\right\}$$

18. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x, y এবং z অপনয়ন কর :

$$b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}=a, \quad c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}=b, \quad a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}=c.$$

19. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x, y এবং z অপনয়ন কর :

$$\frac{y-z}{y+z}=a, \quad \frac{z-x}{z+x}=b, \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=c.$$

বিবিধ প্রশ্নমালা VI

1. $x=11$ হইলে,

$$\sqrt[3]{[(x+2)\sqrt{x-2}-2\{\sqrt[3]{11x^2}-x+2\sqrt{x-2}\}]}$$

এর মান কত ?

2. $A\times 0,\quad 0\times A,\quad \frac{A}{0},\quad \frac{0}{A}$ এবং $\frac{0}{0}$, ইহাদের মান কত লেখ।

3. গুণ কর :

(i) $x^{12}-x^{10}y^2+x^2y^{10}-y^{12}$ কে x^2+xy+y^2 দ্বারা;

(ii) $\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{4}mn-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{5}m-\frac{2}{3}n+1$ কে $\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n-\frac{1}{4}$ দ্বারা।

4. (i) যদি $p=x+\frac{1}{x}$ এবং $q=x-\frac{1}{x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $p^4+q^4-2p^2q^2=16$.

(ii) যদি $x+y=a$ এবং $xy=b$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^4-7x^2y^2+y^4=(a^2-5b)(a^2+b)$.

5. x এর ঘাতসমূহের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া,

$$x(p+x)\{p^2+q^2-x(p-x)\}-(p^2+qx)(2x^2-qx+q^2)$$ কে

$x^2+(p-q)x-p^2$ দ্বারা ভাগ কর।

6. একটি সরল যষ্টির এক প্রান্ত (8, 0) বিন্দুতে এবং অন্য প্রান্ত (0, 6) বিন্দুতে রহিয়াছে ; (8, 0) বিন্দুস্থিত প্রান্তটিকে (4, 0) বিন্দুতে রাখিলে, (0, 6) বিন্দুস্থিত প্রান্তটি y-অক্ষের উপর কোথায় থাকিবে ? এই প্রান্তটিকে y-অক্ষের উপর না রাখিয়া $x=-2$ রেখাটির উপর রাখিলে প্রান্তটি কোন্ বিন্দুতে থাকিবে ? যষ্টিটির শেষের অবস্থানের সমীকরণ গঠন কর।

7. সরল কর :

$$\frac{a(1+b^2)(1+c^2)+b(1+c^2)(1+a^2)+c(1+a^2)(1+b^2)+4abc}{1+bc+ca+ab}$$

8. গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) $8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4a^2b^2+4c^2d^2$;

(ii) $(b+c)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b-c)^2a^4$.

9. যদি $\frac{a}{b-c}$, $\frac{b}{c-a}$ এবং $\frac{c}{a-b}$ একটি সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{a^3+c^3-2b^3}{a^2+c^2-2b^2}=\frac{a+b+c}{2}$.

10. সমাধান কর :

(i) $\frac{21}{4}\left(\frac{2x}{3}-\frac{5}{18}\right)+\frac{7x-3\frac{3}{4}}{12}=2\frac{19}{144}-\frac{14-15x}{3}$;

(ii) $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$.

11. এক সম্রাট 30 বৎসর বয়সে সিংহাসনে আরোহণ করিয়া, তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ সময় রাজত্ব করিয়া মারা গেলেন ; তাহার রাজত্বকাল নির্ণয় কর।

12. সরল কর :

$$\frac{(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}.$$

13. $u=x-\frac{1}{x}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $x^4+\frac{1}{x^4}=u^4+4u^2+2$;

(ii) $x^4-\frac{1}{x^4}=\pm u(u^2+2)\sqrt{u^2+4}$.

14. $x^8-3x^7-5x^5+2x^4+5x^3+4x^2+1$ এর সহিত তৃতীয় অপেক্ষা নিম্নতর মানের কোন রাশিমালা যোগ করিলে যোগফল x^3+2x-1 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

15. আমার বর্তমান বয়সের 2 গুণ হইতে 6 বৎসর পূর্বের বয়সের 3 গুণ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল বর্তমান বয়সের সমান হয় ; আমার বর্তমান বয়স কত ?

16. সরল কর :

$$2(z^3+x^3)-[(x+y)(xy-x^2-y^2)-\{2(x+y+z)\times(yz+zx+xy-x^2-y^2-z^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)\}].$$

17. ভাগ কর :

(i) $(x^2-1)^4-3(x^2-1)^2+1$ কে x^4-3x^2+1 দ্বারা ;

(ii) $1+x^{\frac{9}{8}}$ কে $1-x^{\frac{3}{8}}+x^{\frac{3}{4}}$ দ্বারা।

18. নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) a^9+b^9 এবং a^9-b^9 ;

(ii) $(a+b)^5-a^5-b^5$.

19. যদি $\dfrac{2a+3b}{x+2y}=\dfrac{2b+3c}{y+2z}=\dfrac{2c+3a}{z+2x}$ হয়,

তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{5a+9b+11c}{3x+5y+7z}=\dfrac{8a+7b+10c}{5x+4y+6z}$.

20. $(2n+3)$-সংখ্যক সৈন্যের $(n-1)$ দিনের আহার্যের পরিমাণ এবং $(2n+1)$-সংখ্যক সৈন্যের $(n+1)$ দিনের আহার্যের পরিমাণের অনুপাত 11 : 15 ; n এর মান নির্ণয় কর।

21. সরল কর :

(i) $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$;

(ii) $1{\cdot}79\times1{\cdot}79+2{\cdot}42\times1{\cdot}79+1{\cdot}21\times1{\cdot}21$.

22. (i) x এর মান -1 হইতে $+2$ পর্যন্ত ধরিয়া $y=x^2-x$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং এই লেখ-সাহায্যে $1=x^2-x$ এর বীজ (স্থূল) নির্ণয় কর।

(ii) $y=x^2-7x+12$ এর লেখ অঙ্কিত কর ; এই লেখ ব্যবহার করিয়া (a) $x^2-9x+8=0$ এবং (b) $x^2-7x+4=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান কর।

23. সমাধান কর :

(i) $4(x-a)^3+4(x-b)^3=(2x-a-b)^3$;

(ii) $\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}+\dfrac{x-ab}{a+b}=a+b+c$.

24. 1875 সালের জন্মদিনে এক ব্যক্তির বয়সের মাসসংখ্যা তাহার জন্ম-সালের সংখ্যার অর্ধেক। ঐ ব্যক্তি কোন্ সালে জন্মগ্রহণ করিয়াছিল ?

25. সরল কর :

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+b^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+c^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{a^2\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}.$$

26. প্রমাণ কর যে,

$$a^4+b^4+c^4+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc).$$

27. যদি a, b, c, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2.$$

28. যদি $(a^2-4b)^2=64d$ এবং $c^2=a^2d$ হয় তাহা হইলে x এর মান যাহাই হউক না কেন, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হইবে।

29. নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর :

(i) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$;
(ii) $(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)+(x+y)(x^2-y^2)$.

30. সরল কর :

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}.$$

31. সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x+y+z}+\frac{1}{2x+3y+7z}+\frac{1}{3x+5y+9z}+6=0 \\ \frac{3}{2x+3y+7z}+\frac{7}{3x+5y+9z}+\frac{2}{x+y+z}+19=0 \\ \frac{9}{3x+5y+9z}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{5}{2x+3y+7z}+28=0 \end{array}\right\}$$

32. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার একটি অঙ্ক অপরটি অপেক্ষা 5 বেশি, অঙ্কটিকে উল্টা ভাবে লিখিলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা পূর্ব সংখ্যার $\frac{3}{8}$; সংখ্যাটি কত ?

33. সমাধান কর :

(i) $\frac{1}{x+3}+\frac{4}{x+4}+\frac{6}{x+6}=\frac{11}{x+5}$.

(ii) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+6x+8}+\frac{1}{x^2+4x+3}$.

34. একব্যক্তি কতকগুলি ডিমের অর্ধেক, পয়সায় 2টা হিসাবে এবং বাকি অর্ধেক, পয়সায় 3টা হিসাবে কিনিয়া 2 পয়সায় 5টা হিসাবে সমস্তগুলি বেচিয়া ফেলিল; এই বেচা-কেনাতে তাহার 1 পয়সা লোকসান হইল; সে সর্বশুদ্ধ কতগুলি ডিম কিনিয়াছিল ?

35. সরল কর :

$$\frac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2).$$

36. A এবং B দুই ব্যক্তি যথাক্রমে C এবং D দুই স্থান হইতে একই সময়ে যাত্রা করিয়া সাইকেলে চড়িয়া পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে লাগিল। A ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে 2 ঘণ্টা চলিবার পর 1 ঘণ্টা বিশ্রাম করিল ; বিশ্রাম অন্তে সে 12 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল এবং 2 ঘণ্টা পরে তাহার B এর সহিত সাক্ষাৎ হইল। B বরাবর সমবেগে চলিলে এবং C হইতে D এর দূরত্ব 80 মাইল হইলে, B এর বেগ কত লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

37. সমাধান কর :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

38. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(3abc-2b^3-a^2d)^2+4(ac-b^2)^3}{(3bcd-2c^3-ad^2)^2+4(bd-c^2)^3}=\frac{a^2}{d^2}.$$

39. সরল কর :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{2b}{a^2+b^2}+\frac{4b^3}{a^4+b^4}+\frac{8b^7}{a^8-b^8}.$$

40. একটি থলিতে কতকগুলি সিকি ছিল ; ইহার অর্ধেক লইয়া গেলে যতগুলি অবশিষ্ট রহিল তাহাদের সংখ্যা, থলিটিতে প্রথমে যতগুলি সিকি ছিল তাহাদের তুল্য টাকার সংখ্যা অপেক্ষা 32 অধিক। থলিটিতে প্রথমে কতগুলি সিকি ছিল ?

41. সমাধান কর :

$$(a-1)(1+x+x^2)=(a+1)(1+x^2+x^4).$$

42. x এর মান -3 হইতে $+3$ পর্যন্ত ধরিয়া $y=x^2$ এর লেখটি অঙ্কিত কর এবং এই লেখ হইতে $\sqrt{5}$ এর মান প্রথম দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

43. 15 এবং 42 এর মধ্যে কতগুলি সমান্তরীয় মধ্যক বসাইলে, তৃতীয় মধ্যক এবং ষষ্ঠ মধ্যকের অনুপাত 8 : 11 হইবে ?

44. কোন সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণবর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা সম্ভব হইলে, সংখ্যাটির বর্গকেও দুইটি পূর্ণবর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা সম্ভব হইবে।
$(34)^2$কে দুইটি পূর্ণবর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

45. সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{c}(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0\\ x+y+z=2(a+b+c)\\ \dfrac{x}{b+c}+\dfrac{y}{c+a}+\dfrac{z}{a+b}=3\end{array}\right\}$$

46. A এবং B কোন স্থানে যাইবার উদ্দেশে যাত্রা করিয়া a মাইল পর্যন্ত এক সঙ্গে গেল ; এই স্থান হইতে A কোন কার্য উপলক্ষে ফিরিয়া আসিতে বাধ্য হইল এবং তাহার পূর্ব বেগের দ্বিগুণ বেগে বাড়ী ফিরিয়া আসিল ; বাড়ী ফিরিয়া আসিয়াই সে পুনরায় যাত্রা করিল এবং তাহার সর্ব প্রথম বেগের $\dfrac{m}{n}$ গুণ বেগে চলিয়া নির্দিষ্ট স্থানে আসিয়া Bকে ধরিয়া ফেলিল ; A ফিরিয়া আসিবার পর হইতে, B তাহার পূর্ব বেগের $\dfrac{n}{m}$ গুণ বেগে বাকী পথ চলিয়াছে ; যাত্রাস্থান হইতে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

47. নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণনীয়ক নির্ণয় কর:

(i) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$;

(ii) $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

48. প্রমাণ কর যে, $(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)$
$=(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b)$.

49. সমাধান কর :

(i) $\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^2=\frac{ax+2b}{ax+2c}$;

(ii) $(x-1)(x-5)(x-7)(x-9)$
$=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$.

50. যদি

$$a(b-c)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)+b(c-a)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)+c(a-b)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=0$$

হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x(y-z)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y(z-x)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+z(x-y)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0.$$

51. (i) যদি $x+\frac{1}{x}=y$ হয়, তাহা হইলে $x^5+\frac{1}{x^5}$ এর মান y দ্বারা প্রকাশ কর ;

(ii) যদি $x^2+\frac{1}{x^2}=a$ হয়, তাহা হইলে

$$\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20$$

এর মান a দ্বারা প্রকাশ কর।

52. নিম্নলিখিত রাশি দুইটিকে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

(i) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$;

(ii) $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2-2(x+y)^2z^2$.

53. $a-b=0$ হইলে,

$(ma-nb)(mb-nc)(mc-na)+(na-mb)$
$\times(nb-mc)(nc-ma)$ র মান কত হইবে ?

54. (*i*) x এর মান কত হইলে

$x^5 - 8x^3 + 11x^2 + 7x - 1789$ রাশিটি $x^2 + 7x - 1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

(*ii*) x এর এরূপ একটি মান নির্ণয় কর যদ্দ্বারা $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 9x - 4$ এবং $9x^4 + 80x^2 - 9$ রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটির মান 0 হইবে ।

55. সরল কর :

$$\left\{(1+x)^2 + \left(1 + \frac{x}{1 - x + \dfrac{x}{1+x+x^2}}\right)\right\} + (x^3 - 1).$$

56. -3 হইতে $+5$ পর্যন্ত x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া $x^2 - 3x + 1$ এর লেখ অঙ্কিত কর । x এর মান কত হইলে রাশিটির মান 0 হইবে, লেখ হইতে নির্ণয় কর ।

57. সমাধান কর :

(*i*) $$\frac{x+a^2+2bc}{b-c} + \frac{x+b^2+2ca}{c-a} + \frac{x+c^2+2ab}{a-b} = 0;$$

(*ii*) $$\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2} = 2(a+b+c).$$

58. যদি $\dfrac{x+5y}{3x+y} = \frac{4}{3}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{103}{301}.$$

59. যদি $x^2 - yz = a$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$ এবং $yz + zx + xy = 0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{abc}{(a+b+c)^3} = \frac{xyz}{(x+y+z)^3}.$$

60. যদি $x = \dfrac{2mp}{a^2+m^2}$ এবং $y = \dfrac{2mq}{a^2-m^2}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{p^2}{x^2} - \frac{q^2}{y^2} = a^2.$$

61. সমাধান কর :

$$x^4+(x+1)^4=97.$$

62. (i) x এর মানগুলি কোন্ সীমার মধ্যে থাকিলে x^2-x-2 রাশিটির মান ঋণ হইবে ?

(ii) 0 হইতে 4 পর্যন্ত x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া $y=x^2-4x+5$ এর লেখ অঙ্কিত কর; অঙ্কিত লেখ হইতে y এর অবম (minimum) মান নির্ণয় কর।

63. প্রমাণ কর যে,

(i) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+8abc$
$$=(a+b+c)(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2);$$

(ii) $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$$=(x+y+z)^3-24xyz.$$

64. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}-\left(\frac{p}{r}+\frac{q}{p}+\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{p-q}{r}\right)\left(\frac{q-r}{p}\right)\left(\frac{r-p}{q}\right).$$

65. যদি

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)(b^2-c^2)+\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)(c^2-a^2)$$
$$+\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)(a^2-b^2)=0$$

হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(y^2-z^2)+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)(z^2-x^2)$$
$$+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(x^2-y^2)=0.$$

66. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}\frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{y}&=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\\ \frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}&=2\end{aligned}\right\}.$$

67. একজন হিসাবরক্ষক x আ. y পা. এর স্থলে ভুল করিয়া x টা. y আ. লেখাতে 14 টা. 8 আ. 4 পা. এর গরমিল হইল। x এবং y এর মান নির্ণয় কর। [সঙ্কেত। x এবং y পূর্ণ সংখ্যা]

68. সমাধান কর .

(i) $\left(\frac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2 = \frac{x+a}{x+b}$; (ii) $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \frac{a+x}{a-x}$;

(iii) $\frac{(x+a)(x+b)}{x-c-d} = \frac{(x+c)(x+d)}{x-a-b}$.

69. পিতার বয়স তাহার জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়সের 4 গুণ এবং কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের 5 গুণ; জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের 3 গুণ হইবে, তখন পিতার বয়স কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 বৎসর অধিক হইবে। পিতা এবং পুত্রদ্বয়ের বর্তমান বয়স কত নির্ণয় কর।

70. সরল কর :

$$\left\{\frac{(9^{n+\frac{1}{4}}) \times \sqrt{3}\,.\,3^n}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

71. যদি $xy^{p-1}=a,\ xy^{q-1}=b,$ এবং $xy^{r-1}=c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q}=1$.

72. নিম্নলিখিত রাশি তিনটির বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$;

(ii) $(bc+ca+ab+a^2)(bc+ca+ab+b^2).(bc+ca+ab+c^2)$;

(iii) $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{5}{2}$.

73. যদি কোন আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য এরূপভাবে পরিবর্তন করা হয় যে উহার ক্ষেত্রফল সর্বদা স্থির থাকে তাহা হইলে আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হইলে উহার পরিসীমা অবম (minimum) হইবে।

[মনে কর, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং বিস্তার যথাক্রমে x এবং y. তাহা হইলে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $xy=k^2$, একটি ধ্রুবক, এবং উহার পরিসীমা $=2(x+y)$.

$$\text{এক্ষণে,}\quad (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$
$$=4k^2+(x-y)^2.$$

অতএব, যখন $x-y=0$ অর্থাৎ $x=y$ অর্থাৎ যখন আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হয়, তখন $x+y$, সুতরাং $2(x+y)$, অবম হয়।]

74. যদি $l^2+m^2+n^2=1$, $l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$ এবং $ll_1+mm_1+nn_1=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$l:m:n=l_1:m_1:n_1.$$

[$(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2)-(ll_1+mm_1+nn_1)^2$
$=(lm_1-l_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2+(nl_1-n_1l)^2$, একটি অভেদ;

প্রশ্নের সর্ত অনুসারে, এই অভেদটির বামপক্ষ $=1.1-1^2=0$.

$\therefore (lm_1-l_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2+(nl_1-n_1l)^2=0$;

$\therefore$ অনু. 390 অনুসারে,

$$lm_1-l_1m=0,\ mn_1-m_1n=0,\ nl_1-n_1l=0;$$
$$\therefore l:m:n=l_1:m_1:n_1.]$$

75. নিম্নলিখিত অভেদের সত্যতা প্রমাণ কর :

$$16(x-2)(x-4)(x-6)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\left\{\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x-5}+\frac{5}{x-7}\right\}.$$

[$x=2$ লিখিলে দক্ষিণ পক্ষের মান 0 হয়; অতএব $x-2$ দক্ষিণ পক্ষটির একটি গুণনীয়ক। এইরূপে, $x-4$ এবং $x-6$ ও দক্ষিণ পক্ষের গুণনীয়ক। দক্ষিণ পক্ষটি একটি তৃতীয় মানের রাশি বলিয়া, এই তিনটি ভিন্ন ইহার আর কোনও x-ঘটিত গুণনীয়ক নাই; অন্য কোন গুণনীয়ক থাকিলে তাহা সংখ্যাত্মক হইবে। অতএব মনে করা যাইতে পারে যে, দক্ষিণ পক্ষটি $=k(x-2)(x-4)(x-6)$; এস্থলে k সংখ্যাত্মক, ইহার মান নির্ণয় করিতে হইবে। উভয় পক্ষের x^3 এর সহগ অভিন্ন করিয়া $k=16$; অতএব ফলটি প্রমাণিত হইল।]

76. সমাধান কর :

(i) $\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^3=\dfrac{ax+2b-c}{ax+2c-b}$;

(ii) $\dfrac{x+a}{b+c}+\dfrac{x+b}{c+a}+\dfrac{x+c}{a+b}=\dfrac{x+2a}{b+c-a}+\dfrac{x+2b}{c+a-b}+\dfrac{x+2c}{a+b-c}$.

77. একব্যক্তি শতকরা y হার সুদে x টাকা খাটাইল ; অন্য একব্যক্তি উহার অপেক্ষা a কম টাকা উক্ত হার অপেক্ষা শতকরা b অধিক হারে খাটাইল ; উভয়ের বাৎসরিক সুদের পরিমাণ সমান হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1.$$

78. প্রমাণ কর যে,

$$a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)+d(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

79. প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণ তিনটির মধ্যে দুইটি মাত্র স্বাধীন সমীকরণ :

$$y^2+yz+z^2=1+x(x+y+z),$$
$$z^2+zx+x^2=1+y(x+y+z),$$
$$x^2+xy+y^2=1+z(x+y+z).$$

[সঙ্কেত। সমীকরণ তিনটির যে কোনটিকে অন্য দুইটি হইতে পাওয়া যায়।]

80. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{bc}+\frac{y}{ca}+\frac{z}{ab}=2(a+b+c)\\&x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+z\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0\\&\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}+\frac{z}{a+b}=bc+ca+ab\end{aligned}\right\}$$

81. একব্যক্তি A স্থান হইতে B স্থানে যাইতে সমস্ত পথের এক তৃতীয়াংশ ঘণ্টায় a মাইল বেগে এবং বাকী অংশ ঘণ্টায় $2b$ মাইল বেগে চলিয়া পুনরায় সমস্ত পথ ঘণ্টায় $3c$ মাইল বেগে B হইতে A স্থানে ফিরিয়া আসিল ; A হইতে B স্থানে যাইতে এবং B হইতে A স্থানে ফিরিয়া আসিতে যদি তাহার একই সময় লাগে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

82. $\dfrac{x+6}{x^2+3x-10}$ হইতে $\dfrac{x+5}{x^2+5x-6}$ বিয়োগ কর এবং বিয়োগ-ফলকে $1+\dfrac{2(x^2+4x-8)}{x^2+11x+30}$ দ্বারা ভাগ কর।

83. যদি $b^2+c^2-c(3a+b)$, $c^2+a^2-a(3b+c)$ এবং $a^2+b^2-b(3c+a)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{c}{(b+c)^3}+\frac{a}{(c+a)^3}+\frac{b}{(a+b)^3}=\frac{2(a+b+c)}{3(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

84. সমাধান কর :

(i) $$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=1\ ;$$

(ii) $$\sqrt{a^2+2ax-3x^2}-\sqrt{a^2+ax-6x^2}=\sqrt{2a^2+3ax-9x^2}$$

85. কোন বালক সাইকেল-যোগে এক স্থান হইতে 15 ঘণ্টায় অন্য এক স্থানে পৌঁছিবে এইরূপ মনস্থ করিয়া যাত্রা করিল; 100 মাইল যাইবার পর সে তাহার বেগ ঘণ্টায় 2 মাইল বাড়াইয়া দিল এবং নির্দিষ্ট সময়ের 50 মিনিট পূর্বে গন্তব্য স্থানে পৌঁছিল। দুই স্থানের মধ্যের দূরত্ব এবং বালকের যাত্রাকালীন বেগ নির্ণয় কর।

86. এক ব্যক্তি 10 টাকার $\dfrac{x}{y}$ অংশ এবং আবার 10 টাকার $\dfrac{y}{x}$ অংশ পাইল এবং পরে 20 টাকা দান করিল; প্রমাণ কর যে, তাহার মোটের উপর কোন ক্ষতি হইল না।

[সঙ্কেত। এস্থলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).10 \text{ টাকা} \not< 20 \text{ টাকা};\quad \text{অর্থাৎ } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\not< 2\ ;\ \text{ইত্যাদি}]$$

87. নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি হইতে t অপনয়ন কর :

$$\left.\begin{aligned} v&=u+ft\\ s&=ut+\tfrac{1}{2}ft^2\end{aligned}\right\}$$

88. নিম্নলিখিত অভেদটি প্রমাণ কর :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

89. (*i*) যদি $x=\dfrac{1+a^2}{2(1-a^2)}$ এবং $y=\dfrac{2a}{1-a^2}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $4x^2-y^2=1$;

(*ii*) যদি $a=y+z-2x$, $b=z+x-2y$, $c=x+y-2z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=9(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

90. নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির করণী নিরসন করিয়া রাখ :

(*i*) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$; (*ii*) $\sqrt[4]{x}=\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

91. সরল কর :

(*i*) $$\left\{\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}\times\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12}\times x^{22};$$

(*ii*) $$\frac{\left(p^2-\dfrac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\dfrac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}.$$

92. এক ব্যক্তি প্রথমে ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে এবং পরে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে সাইকেল চালাইয়া 11 ঘণ্টায় 100 মাইল পথ গেল ; ঐ ব্যক্তি ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে কত ঘণ্টা এবং ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে কত ঘণ্টা সাইকেল চালাইয়াছিল, লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

93. সরল কর :

$$\frac{\sqrt{(ax)}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{(a+x)}}-\frac{\sqrt{(ax)}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}}.$$

94. যদি $a+b+c=1$, $bc+ca+ab=\frac{1}{3}$ এবং $abc=\frac{1}{27}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=\frac{27}{4}.$$

95. x এবং y এর এমন একটি দ্বিতীয় মানের সমমাত্র (homogeneous) এবং প্রতিসম (symmetrical) রাশিমালা নির্ণয় কর যাহার মান, $x=y=1$ হইলে, 3 হইবে এবং $x=2$, $y=1$ হইলে, 11 হইবে।

96. ভাগ কর :

(i) $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$ কে $1+xy+yz+zx$ দ্বারা;

(ii) $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$ কে $1-a^2-b^2-c^2-2abc$ দ্বারা;

(iii) $x^{12}-x^{-12}+6(x^8-x^{-8})+9(x^4-x^{-4})$ কে $x^6-x^{-6}+3(x^2-x^{-2})$ দ্বারা।

97. $\left(\dfrac{x^2-x+1}{12}\right)^3-27\left\{\dfrac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{432}\right\}^2$ কে সরল কর এবং লব্ধ ফলের বর্গমূল নির্ণয় কর।

98. সরল কর :

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\cdot\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

99. সমাধান কর :

(i) $(1+p)(x-py)=2p^2\left(\dfrac{x}{1+p}+\dfrac{y}{1-p}\right)=\dfrac{2p^2}{1-p}$;

(ii) $\dfrac{(a-b)x+(a+b)y}{a^2-b^2}=\dfrac{ab}{a-b}=\dfrac{ab(x-y)-(a^2y-b^2x)}{2ab^2}$

100. কোন বৃত্তের 3 এবং 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি সমান্তর জ্যাএর (parallel chords) মধ্যস্থ দূরত্ব 2 ইঞ্চি হইলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ?

101. যদি x এবং y রাশি দুইটির পরম মান পরস্পর বিভিন্ন হয় এবং যদি

$$x+y=a+b+c,$$

এবং $x(x-a)(x-b)(x-c)=y(y-a)(y-b)(y-c)$

হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^3+y^3=a^3+b^3+c^3.$$

102. যদি $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$,

অথবা $(1+x)(1+y)(1+z)=-1$.

103. কোন কার্য A, 12 দিনে B, 25 দিনে এবং C, 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। A, B এবং C এক সঙ্গে কার্য করিলে কত দিনে কার্যটি শেষ হইবে, লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

104. যদি $y=\frac{1+x}{1-x}$ হয়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=\frac{4(xy+1)}{x-y}.$$

105. যদি $x+\frac{1}{y}=1$ এবং $y+\frac{1}{z}=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $z+\frac{1}{x}=1$.

106. প্রমাণ কর যে, $x-y-2z$ রাশিটি

$$2(x^3+y^3+z^3)+(y^2z+z^2x+x^2y)-5(z^2y+x^2z+y^2x)-2xyz$$

এর একটি গুণনীয়ক।

107. যদি $x:a=y:b=z:c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

108. যদি $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)w$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}.$$

109. পরীক্ষাগৃহে কতকগুলি সমান দৈর্ঘ্যের বেঞ্চের উপর পরীক্ষার্থিগণের স্থান নির্দেশ করা হইল। যদি 10 খানি বেঞ্চ বেশি থাকিত, তাহা হইলে প্রত্যেক বেঞ্চে একজন করিয়া কম বসান যাইত; আর যদি 15 খানি বেঞ্চ কম থাকিত, তাহা হইলে প্রত্যেক বেঞ্চে আরও দুইজন করিয়া বসাইতে হইত। পরীক্ষার্থিগণের সংখ্যা নির্ণয় কর।

110. প্রমাণ কর যে,

$$a(a-x)(a-2x)=(a-b)(a-b-x)(a+2b-2x)$$
$$+b(b-x)(3a-2b-2x).$$

111. প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

112. x এর এরূপ একটি দ্বিতীয় মানের পূর্ণ এবং মূলদ অপেক্ষক নির্ণয় কর যাহার মান, $x=0, 1$ এবং 2 হইলে যথাক্রমে $\frac{1}{c}, \frac{1}{c+1}$ এবং $\frac{1}{c+2}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x=c+2$ হইলে অপেক্ষকটির মান $\frac{1}{c+1}$ হয়।

113. যদি $a=x^2+2yz$, $b=y^2+2zx$; $c=z^2+2xy$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

114. সরল কর :

$$\left\{\frac{1}{\frac{4}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\}^2-\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)^2+(1+t^2)^2-2t^2-2.$$

115. $y=\frac{x+2}{x-2}$ এবং $y=x^2$ এর লেখ অঙ্কিত কর; লেখদ্বয়-সাহায্যে $x^2=\frac{x+2}{x-2}$ সমীকরণটি সমাধান কর।

116. x^2+3x এবং $1+x+2x^2$ এর লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, লেখদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে; এই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং x যে সকল মানবিশিষ্ট হইলে অঙ্কিত লেখ-দ্বয়স্থ অনুরূপ কোটিদ্বয়ের (corresponding ordinates) অন্তর $\frac{1}{2}$ হয় তাহাদিগকে নির্ণয় কর।

117. a ও b এর গুণোত্তরীয় মধ্যক এবং সমান্তরীয় মধ্যকের অনুপাত $m : n$; প্রমাণ কর যে,

$$a : b = n+\sqrt{n^2-m^2} : n-\sqrt{n^2-m^2}.$$

118. সমাধান কর :

$$xyz = (xy+xz-yz) = 4(yz+xy-xz)$$
$$= 6(xz+yz-xy).$$

119. $y = x^2$ এবং $x - y + 6 = 0$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং এই দুই লেখের সাহায্যে $x^2 - x - 6 = 0$ সমীকরণটির বীজ নির্ণয় কর।

120. যদি $x = 1 + \frac{a}{y}$, $y = 1 + \frac{b}{z}$, $z = 1 + \frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x = \frac{(1+a)(c+d)+bd}{(1+b)d+c};$$

এবং যদি $d = 1 + x$ এবং $a = b = c = 2$ হয়, তাহা হইলে $x^2 = \frac{11}{3}$ হইবে।

121. প্রমাণ কর যে, $bc + ca + ab = 0$ হইলে,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

122. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a-b}{x} + \frac{a+b}{x-a^2} - \frac{a+b}{x-b^2} = 0$$

সমীকরণটির বীজগুলি পরস্পর সমান।

123. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(bc+ca+ab)^3 + (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab) = 0.$$

124. যদি $(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)=0$ হয়, তাহা হইলে $a = b = c$.

125. যদি $x = \frac{b^5+c^5-a^5}{2bc}$, $y = \frac{c^5+a^5-b^5}{2ca}$, $z = \frac{a^5+b^5-c^5}{2ab}$ হয়, তাহা হইলে $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z = a^4+b^4+c^4$.

126. যদি x এর মানগুলি একটি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে $y = mx + c$ সমীকরণটি হইতে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ (corresponding) মানগুলিও একটি সমান্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

127. সরল কর :

$$\frac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left\{\frac{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)}\right\}^2.$$

128. যদি $x^y=y^x$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1};$$

এবং যদি $x=2y$ হয়, তাহা হইলে $y=2$ হইবে।

129. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 8 ; সংখ্যাটিকে উহার উল্টা সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে 1855 হয় ; সংখ্যাটি কত ?

130. যদি $ab+bc+ca=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(1-\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{b^2}{1+b^2}-\frac{c^2}{1+c^2}\right)^2=\frac{4a^2b^2c^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

131. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ q হয় এবং q-তম পদ p হয়, তাহা হইলে ঐ শ্রেণীর m-তম পদ $p+q-m$ হইবে।

132. 5, 12, 19, 26,$\cdots$এই সমান্তর শ্রেণীটির কোন পদ 129 হইতে পারে কি না স্থির কর।

133. $x^2+y^2=25$ এবং $x^2+y^2-18x+65=0$ এই দুই সমীকরণের লেখ দুইটি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা পরস্পরকে স্পর্শ করে; এই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

134. যদি $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $ac=bd$.

135. যদি দুইটি রাশি x এবং y এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l হয় এবং যদি $h+l=x+y$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$.

136. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=S_n$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\frac{a}{r-1}\left\{\frac{r(r^n-1)}{r-1}-n\right\}$$

137. কোন পরীক্ষায় শতকরা 45 জন উত্তীর্ণ হইল ; যদি পরীক্ষার্থিগণের সংখ্যা 30 জন অধিক হইত এবং এই 30 জনের 19 জন পরীক্ষায় অনুত্তীর্ণ হইত, তাহা হইলে পরীক্ষোত্তীর্ণের সংখ্যা শতকরা 44·8 হইত। পরীক্ষার্থিগণের সংখ্যা নির্ণয় কর।

138. প্রমাণ কর যে, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ এই সর্ত সিদ্ধ হইলে $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ এই রাশিমালাটি দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

139. a, b, c এবং d এর মান কত ধরিলে x^3-4x^2+6x-4 কে $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ এর আকারে প্রকাশ করা যাইবে ?

140. যদি $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{c+a}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2}{x-xyz}=\frac{b^2}{y-xyz}=\frac{c^2}{z-xyz}.$$

141. যদি $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{(x+y)+(a+b)}.$$

142. যদি a, b, c তিনটি বাস্তব, ধন এবং পরস্পর অসমান রাশি হয় তাহা হইলে, $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ এর মান abc অপেক্ষা লঘুতর।

143. যদি $b+c$, $c+a$, $a+b$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে $(b+c)^2(2a+b+c)$, $(c+a)^2(a+2b+c)$ এবং $(a+b)^2(a+b+2c)$ ও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

144. যদি $xy=ab(a+b)$ এবং $x^2-xy+y^2=a^3+b^3$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0.$$

145. যদি $a^2+b^2+c^2=1$ এবং $l^2+m^2+n^2=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$al+bm+cn < 1.$$

[সঙ্কেত। $(a-l)^2+(b-m)^2+(c-n)^2$ একটি ধন রাশি।]

146. প্রমাণ কর যে,

$a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd)$ রাশিটি $a+b+c+d$ দ্বারা বিভাজ্য।

147. যদি $x=a^2+ab+b^2$ এবং $y=a^2-ab+b^2$ হয়, তাহা হইলে $4(a^4+b^4)-6xy-x^2-y^2$.

148. নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $(x+y)^2+(x^2+y^2)+(x-y)^2+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত ;

(ii) $\frac{x-1}{x}+1+\frac{x+1}{x}+\cdots\cdots$ x পদ পর্যন্ত।

149. কলিকাতা হইতে যশোহর যাইতে একখানি ট্রেনের 1 ঘণ্টা চলিবার পর একটি দুর্ঘটনা ঘটিয়া পথিমধ্যে 1 ঘণ্টা দেরী করিতে হইল; এই 1 ঘণ্টা পরে ট্রেনখানি তাহার পূর্ব বেগের $\frac{3}{5}$ বেগে চলিতে লাগিল এবং নির্দিষ্ট সময়ের 3 ঘণ্টা পরে যশোহরে পৌছিল; যদি যশোহরের দিকে আরও 50 মাইল চলিবার পর দুর্ঘটনাটি ঘটিত তবে ট্রেন খানি যে সময়ে যশোহরে পৌছিয়াছিল তাহার 1 ঘ. 20 মি. পূর্বে পৌছিতে পারিত। কলিকাতা হইতে যশোহরের দূরত্ব কত?

150. -4 হইতে $+4$ পর্যন্ত x এর বিভিন্ন মান ধরিয়া $4y=x^2$ এবং $2y=x+4$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ অঙ্কিত কর; লেখ হইতে $2y=x+4$ এর অবছিন্ন অংশের (intercept) দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

151. কোন সমান্তর শ্রেণীর পদসমূহকে 5 টি করিয়া সংঘবদ্ধ করিলে প্রত্যেক সংঘের সমষ্টিগুলিও একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে এবং শেষোক্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর পূর্বোক্তটির সাধারণ অন্তরের 25 গুণ হইবে।

152. সমাধান কর :

$$\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c).$$

153. সমাধান কর : $\left(\frac{x+a+b}{x+b+c}\right)^3=\frac{x+2a+b-c}{x+2c+b-a}$.

154. যদি a, b, c তিনটি ধন বাস্তব রাশি হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2 > ab+bc+ca$.

155. যদি $X = ax + cy + bz$, $Y = cx + by + az$ এবং $Z = bx + ay + cz$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

156. যদি $x + a$ রাশিটি $x^2 + px + q$ এবং $x^3 + p'x + q'$ উভয় রাশিরই গুণনীয়ক হয়, তাহা হইলে উহা $px^2 - (q - p')x - q'$ এরও একটি গুণনীয়ক হইবে।

157. যদি $\dfrac{a+2b}{x+3y} = \dfrac{b+2c}{y+3z} = \dfrac{c+2a}{z+3x}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{7a+4b+7c}{10x+5y+9z} = \frac{5a+8b+5c}{6x+11y+7z}.$$

158. শূন্যে উৎক্ষিপ্ত একটি বলের সঞ্চারপথ (locus) যদি $y = x - \dfrac{x^2}{120}$ সমীকরণটি দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে, x এর মান 0, 10, 20, 30,...... ধরিয়া এবং y এর অনুরূপ মান নির্ণয় করিয়া সঞ্চারপথটি অঙ্কিত কর। বলটি কত উচ্চে উঠিয়াছিল এবং কোথায় ইহা ভূমি স্পর্শ করিল অঙ্কিত লেখ হইতে নির্ণয় কর।

159. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম x-সংখ্যক পদের সমষ্টি x^2 এবং শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর 2 হইলে, শ্রেণীটির প্রথম পদ কত হইবে?

160. যদি $x + y + z = 1$, $ax + by + cz = d$, এবং $a^2x + b^2y + c^2z = d^2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^3x + b^3y + c^3z = d^3 - (d-a)(d-b)(d-c).$$

161. যদি $\dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{y} = a$, $\dfrac{z}{x} - \dfrac{x}{z} = b$ এবং $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + a^2b^2c^2.$$

162. প্রমাণ কর যে,

$$(z - x - y)(y + z - x) + (x - y - z)(z + x - y) + (y - z - x)(x + y - z) + 4xy$$ একটি পূর্ণ বর্গ।

163. সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এইরূপ 5 টি সংখ্যার সমষ্টি 30 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 220. সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

164. দুই ব্যক্তি মোট 7 মন জিনিস লইয়া ট্রেনে যাইতেছে; অতিরিক্ত জিনিসের জন্য তাহাদের একজনকে টিকিটের মূল্য ভিন্ন অতিরিক্ত 3 টাকা এবং অন্য জনকে 5 টাকা দিতে হইল; যদি সমস্ত জিনিস একজনের হইত তাহা হইলে তাহাকে 11 টাকা দিতে হইত। প্রত্যেকে কত পরিমাণ জিনিস বিনা মাশুলে সঙ্গে লইতে পারে?

165. সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এইরূপ তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 30; প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির প্রত্যেকটিকে 2 দ্বারা গুণ করিলে এবং মধ্যকটির সহিত 6 যোগ করিলে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

166. যদি $x^2 = a^2\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{x}{x-a}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+a}\right)^2 = n^2 + n.$$

167. যদি

$a = \dfrac{2}{2-b}$, $b = \dfrac{2}{2-c}$, $c = \dfrac{2}{2-d}$ এবং $d = \dfrac{2}{2-x}$ হয়, তাহা হইলে $a = x$.

168. যদি $a(b-c)x^2 + b(c-a)xy + c(a-b)y^2$ একটি পূর্ণবর্গ হয় তাহা হইলে, $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

169. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= c^3, \\ xyz &= d^3. \end{aligned}$$

এই সমীকরণগুলি হইতে x, y এবং z অপনয়ন করিলে

$$a^3 + 2c^3 - 6d^3 - 3ab^2 = 0 \text{ হয়।}$$

170. $(2n+1)$-সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণীর অযুগ্ম পদসমূহের সমষ্টি এবং যুগ্মপদসমূহের সমষ্টির অনুপাত $n+1 : n$ হইবে।

171. জ্যামিতিক চিত্রসাহায্যে প্রমাণ কর যে, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ এই অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীটির সমষ্টি 2.

172. নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন কর:

$$\left.\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) &= m. \\ x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) &= n. \end{aligned}\right\}$$

173. যদি x, y, z পরস্পর অসমান হয়, এবং
$y^2+z^2+myz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$ হয়, তাহা হইলে রাশিমালা তিনটির প্রত্যেকটি $=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

174. যদি $r<1$ এবং $br<1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$ar+(a+ab)r^2+(a+ab+ab^2)r^3+\cdots\text{অনন্ত পর্যন্ত}$$
$$=\frac{ar}{(1-r)(1-br)}.$$

175. সমাধান কর :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}.$$

176. সমাধান কর :

$$-\sqrt{4x^2+20x+17+\sqrt{16x^2+11x+10}}=2(x+2).$$

177. যদি $5(x^2+y^2+z^2+u^2+v^2)=(x+y+z+u+v)^2$ হয়, তাহা হইলে $x=y=z=u=v$.

178. প্রমাণ কর যে, $a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4\times(a^2+b^2-c^2)^3$ রাশিটি $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ দ্বারা বিভাজ্য।

179. 1, 2, 3, ... p প্রথম পদবিশিষ্ট এবং $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{p+1}$ সাধারণ অনুপাতবিশিষ্ট অনন্ত গুণোত্তর শ্রেণীসমূহের সমষ্টিগুলি যথাক্রমে $S_1, S_2, S_3 \cdots S_p$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_p=\frac{1}{2}p\,(p+3).$$

180. যদি

$$\left.\begin{array}{l} l_1^2+m_1^2+n_1^2=1, \\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=1, \\ l_3^2+m_3^2+n_3^2=1, \end{array}\right\} \text{ এবং } \left.\begin{array}{l} l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0 \end{array}\right\}$$

হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\left.\begin{array}{l} l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \end{array}\right\} \text{ এবং } \left.\begin{array}{l} l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0 \\ m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0 \\ n_1l_2+n_2l_2+n_3l_3=0 \end{array}\right\}$$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. $5 ; 1 ; 6 ; \frac{2}{3}$. 2. $8 ; 7 ; 12 ; 0$. 3. $1\frac{1}{3} ; 2\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; 2$
4. 7. 5. $4 ; \frac{1}{4} ; \frac{8}{15}$. 6. $p-q ; 12$.
7. 15. 8. $10x+y ; 30$. 9. $\frac{60}{x}$.
10. $20-y$.

প্রশ্নমালা 2

1. 4 ; 27 ; 432 ; 52. 2. 32 ; 576 ; 14 ; 21 ; 22.
3. 32 ; 108 ; 26 ; 0 ; 0. 4. 72 ; 32 ; 384 ; 864 ; 108.
5. 64 ; 162 ; 10 ; -2 ; 36. 6. 2 ; 3 ; 5 ; 1 ; 4.
7. 6 ; 12 ; 16 ; 5. 8. 6 ; 7 ; 1 ; 5.
9. 9 ; 12. 10. 43 ; 243 ; 15.
11. 3 ; 1 ; 3 ; 2. 12. 5 ; 10 ; 11.
13. 8 ; 25 ; 9 ; 3. 14. 2 ; $1\frac{1}{2}$; 2.
16. 9. 17. 4, 6, 4, 6 ; প্রথম ও তৃতীয়টি একমানের এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থটি এক মানের।

প্রশ্নমালা 3

1. 17. 2. 25. 3. 6. 4. $4\frac{1}{2}$.
5. 6. 6. $1\frac{1}{3}$. 7. 25. 8. 9.
9. 26. 10. $34\frac{1}{6}$. 11. 30. 12. 85.
13. $3\frac{1}{2}$. 14. $\frac{7}{18}$. 15. $2\frac{1}{6}$. 16. 0.
17. 247. 18. $6\frac{1}{2}$. 19. 102. 23. 4.
24. 60. 25. পঞ্চম মানের। 26. সপ্তম মানের।

প্রশ্নমালা 4

1. $+20$. 2. -4 দ্বারা. 3. -27 দ্বারা. 4. -75 পাউণ্ড।
5. প্রথম ব্যক্তির নিকট দ্বিতীয় ব্যক্তি অপেক্ষা 60 টাকা বেশি আছে।

6. 95 ; 58. 7. 230 টাকা কমিয়া গিয়াছে।

8. সমুদ্রের সমতলের নিম্নে 300 ফুট।

9. 6° বাড়িল ; যদি $b > a$ হয়, তাহা হইলে $(b-a)°$ তাপ বাড়িল এবং যদি $b < a$ হয়, তাহা হইলে $(a-b)°$ তাপ কমিল ; 2° বাড়িল।

10. 71°. 11. 77° 41′ 2″. 12. −100 ফুট।

13. 669 ফুট।

প্রশ্নমালা 5

1. -3 ; -1 ; 6 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{4}{5}$. 2. 1 ; $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}$.

3. 8 ; 16 ; -8 ; 8 ; -2. 4. 11 ; 7 ; 7 ; 15

5. 9 ; -11 ; 0. 6. 1 ; 3 ; 9 ; 24 , 22.

7. $\frac{7}{25}$; $-\frac{4}{21}$; 1 ; -6. 8. 4 ; 4.

9. প্রথম হইতে দ্বিতীয় 12° বেশি।

10. $-5°$; 0°. 11. 20°.

12. 2 মিনিট স্লো। 13. ঘণ্টায় 54 মাইল।

প্রশ্নমালা 6

1. $7x$. 2. $2x-3y$. 3. $5a$.

4. $5ab$. 5. $24a^2$. 6. $14a$.

7. $-8x$. 8. a^2+3x^2. 9. $8xy$.

10. $50p$. 11. $-3ax$. 12. $29x^3$.

13. $2abc$. 14. $21xyz$. 15. $2x$.

16. $13y$. 17. $-3x^2$. 18. $9ax^2y$.

19. $16abxy$. 20. $8x$. 21. $3a$.

22. $\frac{7}{4}x^2$. 23. $12b$. 24. $-30a^2$.

25. $4x^2-4x$. 26. $12x^2-5y^2$. 27. x^2+y^2+3x.

28. $-2a^2b+2ab^2-ab$. 29. $7ax+4x+2by$.

30. -44. 31. -21. 32. -23.

33. 20. 34. 49. 35. 0.

36. $8x^2$. 37. $2a^2+b^2$. 38. $5p^2$.

39. $2by$. 40. $x^2+5xy-4y^2$. 41. $-5b$.

42. $2abc-4bc-8a$. 43. $\frac{18}{35}a$.

44. $\frac{7}{36}xy$. 45. $\frac{7}{48}b$. 46. $\frac{1}{12}x^2+\frac{11}{24}y^2$.
47. $\frac{1}{24}a^2-\frac{7}{12}b^2$. 48. 4. 49. 4.
50. $3x$. 51. $3a$.

প্রশ্নমালা 7

1. 39. 2. 49. 3. 6.
4. 28. 5. 132. 6. $2a$.
7. $2a$. 8. $a+b+c$. 9. $2x+2y+2z$.
10. $7x+5y$. 11. $-3xy+3zx$. 12. $4a^2+2ax+5x^2$.
13. $3x^2-xy+4y^2$. 14. $5a^3-5b^3-2c^3$.
15. a^4. 16. $ax+by+cz$; $6ax-4by+6cz$.
17. $3x+ax+6y-36$. 18. $7t^2+8t+5$; 785.
19. 7 ; -63. 20. 174.

প্রশ্নমালা 8

1. $3ab$. 2. $-2x^2y$. 3. $5x^3y^2$. 4. a^4b.
5. $-3a^2b$. 6. $xz+yz$. 7. a^2x-a^2y.
8. $-x^2y-2xy^2$. 9. a^2b+ab^2. 10. $-6a^3b^3c^3$.
11. x^3. 12. x^4y^2. 13. a^7.
14. $10a^2bx^5$. 15. x^{2+a}. 16. x^{a+b}.
17. $-20x^4y^5z^2$. 18. $x^3y^3z^3$. 19. $a^2b^7c^4d^4$.
20. $-21x^6y^8z^6$. 21. $-a^3x^6$, x^9y^6 এবং a^6b^{18}.
22. প্রথম রাশি $=a^{20}$; দ্বিতীয় রাশি $=a^9$.
23. 282429536481, -9765625, 262144.
24. $b(a+1)$, $x(1+2y)$, $x(x+y)$.

প্রশ্নমালা 9

1. 5 ; $3y$; $4y$. 2. $4ab^2$; $-2a$; $-8qr$.
3. $-x$; a^3 ; $2m$. 4. $3ax^2z$; $-2abc^2$.
5. $\frac{2x^a}{a}$; x^{a-3} ; $3x^{a-6}$; $3y^7$.
6. $a+1$; x^2+y^2 ; $xy+mn$. 7. $pq-xy$; $a-d$; $1-ax$.

8. $y - xz^2$; $pr^2 + qr^2$.
9. $a - x + y$; $-1 + x - y$; $-2x + b + 3c$.
10. $x^2 - 3x + 4$; $-a^3 + 2a + 3$.
11. a^2b ; b ; xy ; x^3y. 12. $2x^2$; $15x^{10}$; $\frac{3}{2}x^3y^6$.
13. $-\frac{b}{c^2}$; a^2xy^3.
14. $-4a^3b^2$; $-5x^3y^3z^4$; $5p^6q^6r^6$.
15. $-2xy^2z^2$. 16. ab. 17. $4axby$.

প্রশ্নমালা 10

1. $x - 6$. 2. $\frac{15}{p}$. 3. $12x$ পেনি। 4. $640y$ ছটাক।
5. $\frac{100}{x}$ মাইল ; $\frac{x}{10}$ মাইল। 6. $\frac{40y}{x}$. 7. $x-1, x+1$.
8. $x+2, x+4$. 9. $x-2, x-4$.
10. $x - 30$; $30 - x$; $x + 30$.
11. $x - 18$ বৎসর ; $x + 8$ বৎসর. 12. $\frac{24}{x}$ গজ।
13. $4x$ ইঞ্চি। 14. $\frac{3x}{a}$ বার।
15. $65x$ আনা। 16. mx ; x^m.
17. $\frac{x}{3}$ ঘণ্টা ; xy মাইল। 18. $\frac{xy}{9}$ বর্গগজ।
19. $\frac{x}{12}$ টাকা। 20. $20 - x$.

প্রশ্নমালা 11

1. $x, x+1, x+2, x+3$. 2. $a-2, a, a+2$.
3. $(y - x)$ বৎসর। 4. $\frac{25}{C}$.
5. $5x$ মাইল। 6. $(x + y - z)$ বৎসর।
7. $(y + 11)$ বৎসর। 8. $35 - 2x + y$.
9. $2b - a$. 10. $(\frac{1}{2}x - 50)$ টাকা।

11. a দিন।　　12. $\frac{x}{y}$ দিন।

13. $\frac{x}{a}$ ঘণ্টা।　　14. $(240x+12y-x)$ পেনি।

15. $\frac{y}{x}$ টাকা।

প্রশ্নমালা 12

1. 10 বর্গফুট। 2. 685. 4. কর্ণের দৈর্ঘ্য l হইলে, $l=\sqrt{a^2+b^2}$.
5. 15.　　6. (i) মেঝের ক্ষেত্রফল $A=lb$ বর্গফুট ; (ii) পরিসীমা $p=2(l+b)$ ফুট ; (iii) চারটি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $A'=2(l+b)h$ বর্গফুট।

বিবিধ প্রশ্নমালা I

I

1. 96.　　2. (i) 3, 5 ; (ii) 5, 6.

3. (i) $6x^5$; (ii) $\frac{3x}{4y}$.　　4. 27. 5. $\frac{88}{7}$.

6. $2x+3y$; $6x^3y^3$.　　8. $10x+y$.

II

1. 36 B. C. 2. 15 , 54. 3. $(192a+12b+c)$ পাই, 645 পাই।

4. 78.　　5. (i) $\frac{5x}{6}$; (ii) $\frac{x}{6}$; (iii) $\frac{x^2}{6}$, (iv) $\frac{3}{2}$.

6. y^4 এবং y যথাক্রমে সর্বোচ্চঘাত এবং সর্বনিম্নঘাত ; $3x^3$ এবং y^4 দুইটি ধন পদ এবং x^2 এর সহগ $-5y$.
7. $x-(2y-3x)$, $a^2+(2ax-b^2)$, $a-(5b+3c)$.
8. $(x+1)$ টাকা।

III

1. $a+b+(x+y)$.　　2. 4 , 16.
3. x^3, $-2x^3$; $-x^2$, $+5x^2$; $-2ax$, $+4ax$; $+a^2$, $+3a^2$.
4. $16x$ আউন্স ; $640y$ ছটাক ; $192\,z$ পাই।
5. 216 ; 18 ; 2.　　6. $(x-yx)$ মাইল।

IV

1. $2x^2+3x$. 2. 8 ; 7.
3. $a-(b+c), a-b-c$. 4. $ax-2x^2$.
5. $2x-1, 2x, 2x+1$; $2x$ সংখ্যাটি যুগ্ম, অন্য দুইটি অযুগ্ম।
6. $x-25$ বৎসর। 7. $(x+z)$ টি। 8. $180^\circ-(x+y)^\circ$.

V

1. $2x-2y$. 2. 1. 3. 2°. 4. -24. 5. $60-2x$.
6. (i) $\frac{x}{2}$; (ii) $5x+y-16x$. 7. 1. 8. $100x+z$.

VI

1. $2a-6b+6c+6d$. 2. $3a+4b$. 3. $8a^2+3ab-8b^2$.
4. (i) $12(x-y)$ পেনি ; (ii) $\frac{1}{20}(x-y)$ পাউণ্ড।
5. $(n+1)$-তম রেখাটি। 6. $x(y-z)$; $y(z-x)$; $z(x-y)$.
7. লঘুতর ; $p-q$. 8. $(3600p+60q)$ সে.

VII

1. 0, 6, 6. 2. 7. 4. 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9. 5. 0.
6. 5 ; 7. 7. 50 ; 138, 220, 142. 8. 0, 4, 14.

VIII

1. 2. 2. $(5x-10z)-(3y-9a)$; $(5x+10z)-(3y+9a)$.
3. $\frac{xz}{y}$ টন। 4. $100x+10y, 100x+y, 100y+10x, 100y+x$.
5. $3x^2+11x+16$. 6. $9a^2-5x^2$.
7. $48b > 25a$ হইলে, $\frac{48b-25a}{48}$ পাউণ্ড লাভ ; $48b < 25a$ হইলে $\frac{25a-48b}{48}$ পাউণ্ড ক্ষতি। 8. $28\frac{2}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

IX

2. $1-x+x^2$. 3. $3x-8y$.
4. $ax^3-bx^3+bx^2+cx^2-2cx-ax+x^3-2x^2-x$;
$(a-b+1)x^3+(b+c-2)x^2-(a+2c+1)x$.

5. $\left(\frac{3}{2}x+1\right)$ পেনি। 6. $4\frac{27}{120}$.

7. $\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)$ ঘণ্টা। 8. $\frac{3x+2y}{x+y}$ টাকা।

X

1. 11. 2. $2-6x^3+4x^2-3x^4$. 3. $24x^3y^3z^3$.

4. x^2-7x+6. 5. $\frac{x+12y}{3}$ গজ। 6. 4.

7. $\frac{A}{l}$ ইঞ্চি ; $s=2\left(l+\frac{A}{l}\right)$. 8. $\left(\frac{z}{y}-\frac{z}{x}\right)$ সে.

প্রশ্নমালা 13

1. x^2+4x+4. 2. $16x^2-8x+1$.
3. $25x^2+90xy+81y^2$. 4. $4x^2-4xy+y^2$.
5. $p^2x^2+2pqxy+q^2y^2$. 6. $4a^2+20ab+25b^2$.
7. $a^2x^2-6abx+9b^2$. 8. $4a^2b^2+4abc^2+c^4$.
9. $x^4-2x^2y^2+y^4$. 10. $4a^2-4ax^2+x^4$.
11. $4x^2+4x^3+x^4$, $x^4+2x^3y+x^2y^2$.
12. $p^4-4p^3q+4p^2q^2$, $p^4-6p^3+9p^2$.
13. $81x^4-126x^2y^2+49y^4$. 14. $-4x^2+12xy-9y^2$.
15. (*i*) 121. (*ii*) 11025. (*iii*) 1050625. (*iv*) 7921. (*v*) 996004. 16. 1. 17. 36. 18. 121.
19. 4. 20. 100. 21. $4y^2$.
22. $(3a-5b+x-2y)^2$. 23. $2p^2x^2+2q^2y^2$.
24. $a^2x^2+b^2y^2$. 28. x^2-2. 29. 5. 30. 3.

প্রশ্নমালা 14

1. 559. 2. 1860. 3. 25480.
4. 75849. 5. x^2-y^2. 6. x^2-1.
7. $25x^2-49$. 8. $36x^2-a^4$. 9. $4b^2-a^2$.
10. x^4-y^4. 11. $1-a^{2m}b^{2m}$. 12. $a^2+2ab+b^2-c^2$.
13. $(x+2y)(x-2y)$. 14. $(4a+1)(4a-1)$.

15. $(3x+7)(3x-7)$.
16. $(ax+by)(ax-by)$.
17. $(1+xyz)(1-xyz)$.
18. $(x^m+y^m)(x^m-y^m)$.
19. $(a-b+c)(a-b-c)$.
20. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
21. $16-x^2$.
22. $4x^2+4xy+y^2-9z^2$.

প্রশ্নমালা 15

1. x^2+6x+8.
2. $9x^2+21xy+10y^2$
3. $a^2+5a-14$.
4. a^2-a-20.
5. $x^2-4ax-12a^2$.
6. $4m^2+8mn+3n^2$.
7. $a^2+a(b+c)x+bcx^2$.
8. $15x^2+4x-4$.
9. $20-9x+x^2$.
10. $x^{2m}+6x^m-160$.
11. $(x+2)(x+1)$.
12. $(x-2)(x-1)$.
13. $(5-x)(3-x)$.
14. $(a+2)(a-1)$.
15. $(x-3)(x+2)$.

প্রশ্নমালা 16

1. $1+3x+3x^2+x^3$.
2. $27-27a+9a^2-a^3$.
3. $8x^3+12x^2+6x+1$.
4. $x^6-3x^4+3x^2-1$.
5. $a^3x^3-3a^2x^2by+3axb^2y^2-b^3y^3$.
6. $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$.
7. $8n^6-36mn^4+54m^2n^2-27m^3$.
8. $27a^3x^3+54a^2x^2by+36axb^2y^2+8b^3y^3$.
9. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$.
10. $2x^3+6xy^2$.
11. $6p^2q+2q^3$.
12. $8x^3$.
13. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
14. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
15. $8x^3$.
16. 35.
17. 316.
19. 52.

প্রশ্নমালা 17

1. $1+x^3$.
2. x^6-1.
3. $8a^3+1$.
4. x^3-27y^3.
5. $a^6-b^3c^3$.
6. $a^3x^3+125b^3$.

7\. $a^{3m}-b^{3n}$. 8. x^6-a^6. 9. a^6-b^6.
10\. -19. 12. $(x+3)(x^2-3x+9)$.
13\. $(2a-5)(4a^2+10a+25)$.
14\. $(m+4n)(m^2-4mn+16n^2)$.
15\. $(7ab^2-1)(49a^2b^4+7ab^2+1)$.
16\. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy+2yz-zx)$.
17\. $2y(3x^2+y^2)$. 20. 36.
21\. $(2x+y)(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$.
22\. $6ab^2$.

প্রশ্নমালা 18

1\. $x=2$. 2. $x=4$. 3. $x=-3$.
4\. $x=6$. 5. $x=-2\frac{1}{4}$. 6. $x=16$.
7\. $x=1\frac{1}{3}$. 8. $x=1\frac{1}{2}$. 9. $x=4$.
10\. $x=-3$. 11. $x=2$. 12. $x=3$.
13\. $x=12$. 14. $x=1$. 15. $x=\cdot 5$.
16\. 6. 17. 36. 18. 5.
19\. 4. 20. 24.

প্রশ্নমালা 19

1\. 7. 2. 2. 3. 2.
4\. 7. 5. 20. 6. 18.
7\. $-\cdot 4$. 8. 1. 9. 2.
10\. $x=\frac{2}{11}$. 11. $x=2$. 12. $x=3$.
13\. $x=1$. 14. 5. 15. 84.
16\. 13. 17. 17. 18. 7.

প্রশ্নমালা 20

1\. $x=7$. 2. $x=18$. 3. $x=3$.
4\. $x=15$. 5. $x=2$. 6. $x=1$.
7\. $x=7$. 8. $x=5$. 9. $x=6$.
10\. $x=9$. 11. $x=7$. 12. $x=12$.
13\. $x=\cdot 4$. 14. $x=-6$. 15. $x=5$.
16\. 2. 17. 8. 18. 5.

প্রশ্নমালা 21

1. $x=2$. 2. $x=5$. 3. $x=2$.
4. $x=9$. 5. $x=11$. 6. $x=3$.
7. $x=-3$. 8. $x=2\frac{1}{3}$. 9. $x=6$.
10. $x=4$. 11. $x=5$. 14. $x=41$.
15. 3. 16. 5. 17. 7.
18. হাঁ, -1.

প্রশ্নমালা 22

1. (i) চতুর্থ; (ii) তৃতীয়; (iii) দ্বিতীয়; (iv) দ্বিতীয়; (v) চতুর্থ; (vi) তৃতীয়। 5. (5, 7). 8. (6, −2·4) স্থূলত।
9. (i) 5 একক; (ii) 11·7 একক (স্থূলত); (iii) 11·2 একক (স্থূলত)।
11. 3. 12. (i) সামান্তরিক; (ii) আয়তক্ষেত্র।
13. (i) 48 বর্গ একক; (ii) 24·5 বর্গ একক। 14. 9; −12.
15. (i) 25·5 বর্গ একক, (ii) 6·5 বর্গ একক, (iii) 35·5 বর্গ একক।
16. 219 বর্গ একক। 17. $\sqrt{3}$ বর্গ একক। 18. −4; −12.
19. 18 বর্গ একক। 20. 144 বর্গ একক। 21. (0, 0).
22. 8·64 ফুট (স্থূলত)। 23. প্রায় 6·6 মাইল।
24. 103·9 ফুট (স্থূলত)।

বিবিধ প্রশ্নমালা II

I

1. $8xy-4x^2$. 2. 0. 3. $3p+2q$.
4. (i) $x=3\frac{3}{7}$; (ii) $x=5$. 5. $64\frac{(a-b)}{c}$ পয়সা।
6. 60, 54, 66.

II

1. x^2-34y^2; $2y^2$. 2. (i) $x=10$; (ii) $x=1$.
3. 117; 27. 4. $3x^2-3x-20$.
5. যদি সংখ্যাটি x হয়, তাহা হইলে অন্তর $=3x^2$. 6. 12.

III

1. 34, 4, 16.
2. $13x-2y$.
3. A, 9 টাকা ; B, 12 টাকা ; C, 14 টাকা।
4. (i) $x=6$; (ii) $x=4\frac{8}{11}$.
5. 41, 43, 45.
6. 2401.

IV

1. $\frac{1}{8}$.
2. 11 ; 0 ; $pr-qr-t$; $p-qr+qt$.
3. $a=\frac{y^3}{2}$; $y=\sqrt[3]{2a}$.
4. (i) $x=2{\cdot}8$; (ii) $x=3$.
5. $9y^2-x^2$.
6. 40, 5.

V

1. (i) $-5a$; (ii) $\frac{7}{6}y-\frac{1}{8}x$.
2. $2x^2+x$.
3. (i) $x=7$; (ii) $x=-7\frac{1}{2}$.
4. মধ্য বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $x=2$, $y=-1{\cdot}5$; $(6,-4{\cdot}5)$, $(-2, 1{\cdot}5)$.
5. $3y^3-2x^3$; $4y^3-x^3$.
6. $\frac{ay^3}{x^2}=\frac{8}{9}$

VI

1. -1.
2. 169, 65.
3. (i) $x=31$; (ii) $x=\frac{3}{2}$.
4. $(x={\cdot}6, y={\cdot}2)$, স্থূলত।
5. 98.
6. A $(-2,-3)$, D $(6,-9)$.

VII

1. $x^{3n}-1$.
2. $2x$.
3. 30 বর্গ একক।
4. (i) $x=3$; (ii) $x=\frac{3}{5}$.
5. 100^2-25^2.

প্রশ্নমালা 23

1. $\frac{5}{4}x$.
2. $\frac{1}{2}a-\frac{7}{3}b$.
3. $\frac{3}{8}p+\frac{5}{8}q+\frac{5}{8}r$.
4. $-\frac{5}{6}xy-\frac{3}{2}y^2$.
5. $-\frac{47}{70}ab+\frac{5}{3}ab^2$.
6. $x+3$.
7. 0.
8. $x^3+y^3+x^3$.
9. $-\frac{19}{56}x^4-\frac{79}{280}x^3+x^2+\frac{23}{70}x$.
10. $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{12}c+\frac{1}{4}d$.
11. $\frac{1}{2}a+\frac{13}{60}b+\frac{1}{6}c+\frac{9}{20}d$; 4
12. $\frac{2}{3}x+\frac{11}{12}y$.

প্রশ্নমালা 24

1. $3a+9x.$ 2. $9x+13y.$ 3. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b.$
4. $\frac{703}{480}x+\frac{167}{90}y.$ 5. $\frac{13}{9}p+\frac{5}{9}q.$ 6. $(3p-3q)x.$
7. $(2p+2q+2r)x^2.$ 8. $0.$
9. $(a-d)x+(b-e)y+(d+e-a-b)z.$
10. $(a+b+c)x^3+(b+c+d)x^2+(c+d+a)x+(d+a+b).$
11. $8(a+b)x-(a-b)y.$ 12. $11(x^2+y^2)+2ab(x^2-y^2)-10.$
13. $3a+25(x-y)a^2+4a^3.$ 14. $\frac{1}{9}x^2y^2+\frac{62}{99}xy+\frac{8}{9}x.$
15. $(10a^3-8b^3)x^3+(a^2-2b^2)x^2+(a+b)x+9.$
16. $\frac{8}{15}x-\frac{4}{15}.$ 17. $\frac{10}{21}x-\frac{13}{7}.$ 18. $\frac{5}{12}x+\frac{17}{24}.$
19. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}y.$ 20. $\frac{17}{36}a-\frac{1}{6}.$
21. $\frac{1}{12}a-\frac{1}{3}b.$ 22. $\frac{9}{40}x-\frac{21}{40}.$

প্রশ্নমালা 25

1. $2b,\ -2b^2,\ 2x^3+2y^3,\ 2x-2y.$
2. $4a-6b;\ 8a-12b.$ 3. $2b-2c;\ -x-7y+3z.$
4. $-4xy-2yz+6zx;\ -2ax+3.$ 5. $a^4-1.$
6. $3by-4cz.$ 7. $1-2x+4x^2-3x^3-3x^4+7x^5.$
8. $x^3+y^3+z^3-3xyz.$ 9. $\frac{1}{2}a+\frac{4}{3}b-\frac{3}{4}c.$
10. $-2x^2-\frac{2}{3}xy-y^2+z^2.$ 11. $3x-2y.$
12. $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{6}xy-\frac{5}{6}y^2.$ 13. $b.$ 14. $-x.$
15. $q^2-6pq+3q^3.$ 16. $x^2+x^2y+8x^2y^2-2.$
17. $4a-9b+3c.$ 18. $-3x^2+4x+6;\ 2x^2-3x-4;\ -x^2+x+2.$
19. $-2x^3+2x^2-x-7.$ 20. (*i*) $3a^2$; (*ii*) $a^2+6ab-2b^2$; (*iii*) $9ab-3b^2.$ 21. $0.$ 22. $10-x.$ 23. $-x.$

প্রশ্নমালা 26

1. $2x(a-b).$ 2. $-4(a+b)x+(b+c)y+6(c-2a)z.$
3. $\frac{5}{12}a+\frac{47}{24}b.$ 4. $2(x^2+y^2)+8(x+y)+4.$
5. $6a^2b^2(a-b)-16x^2y^2(a^2+b^2)+9ab(a^3-b^3).$
6. $(2q-2r)xy+(2r-2p)\ yz+(2p-2q)zx.$
7. $a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2.$ 8. $\frac{5}{12}x+3.$ 9. $(p-r)x+a(q-p).$

প্রশ্নমালা 27

1. 15 বৎসর। 2. 7. 3. দৈর্ঘ্য 40 গজ ; বিস্তার 10 গজ।
4. 6. 5. 18, 17. 6. 20, 18.
7. 80, 20. 8. 10. 9. 32, 27, 19.
10. 60, 90. 11. 65.
12. A, 53 টাকা ; B, 38 টাকা ; C, 14 টাকা।
13. 28, 30. 14. 20 টাকা।
15. গাড়ীর মূল্য 235 টাকা ; ঘোড়ার মূল্য 705 টাকা।

প্রশ্নমালা 28

1. x. 2. $-x$. 3. x.
4. x. 5. x. 6. $-x$.
7. $-x$. 8. $a-b-c$. 9. $a-b+c$.
10. $a+b-c$. 11. $a-b+c-d$. 12. $2b^2$.
13. x^2+xy+y^2. 14. $-3a+2b-5c$.
15. $2x-5y$. 16. $3x-10y+10$.
17. a^4-a^2+2a-2. 18. $4x-4$.
19. 6. 20. 17. 21. $13x+y$; 15.
23. 0. 24. (i) $\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$. (ii) $5x-3$.

প্রশ্নমালা 29

1. $3(x+4y)$. 2. $5a(x-5b)$.
3. $b(a-b)$. 4. $ax(a+x)$.
5. $2ab(a-2+b)$. 6. $4x^2(1-2y+3y^2)$.
7. $3a(a^2-2ab+b^2)$. 8. $x(x-a-b)$.
9. $7ab(a^2+2b^2-3ab)$. 10. $xy(x-5+3y)$.
11. $x^2+(a+b)x$. 12. $y^2+(a-b)y$.
13. $x^2-(2a+5b)x^3$.
14. $(a-b-c)x-(a+b-c)y$.
15. $(a^2-c^2)x^2+(2a-c)x-(a^2-b^2)y^2$.
16. $x^2-y(2x-y)$; $x^2+y(y-2x)$.

17. $ax+bx+cx-(p+q+r)x^2$.

18. $3(x-1)$. 19. $3(x^2-5xy+y^2)$.

20. (i) $a-b+(c-d+e)$, (ii) $a-b-(d-e-c)$.

21. (i) $x^3+y(-6x+5xy-2y^2)$. (ii) $x^3-y(6x-5xy+2y^2)$.

22. (i) $(3-m)x^3+(n-6)x^2$; $-(m-3)x^3-(6-n)x^2$.

(ii) $(2x^4-qx^4)+(px^3+rx^3-3x^3)$;
$-(qx^4-2x^4)-(3x^3-px^3-rx^3)$.

(iii) $(ax^3-x^3)+(5x^2-cx^2)+(qx-6x)$;
$-(x^3-ax^3)-(cx^2-5x^2)-(6x-qx)$.

প্রশ্নমালা 30

1. $-x^6$. 2. x^7. 3. $24x^9$.
4. $105x^{6n}$. 5. a^{x^2+3x+2} 6. a^8b^{12}.
7. p^8q^9. 8. $(a+b)^8$. 9. $(x+y)^{18}$.
10. $-(a+b)^6$. 11. $(x-y)^{mn}$. 12. a^9.
13. $x^{3a}y^{3b}$. 14. $-a^3b^3$. 15. $a^8b^4c^{12}$.
16. $729x^{12}y^{18}z^{24}$. 17. 72. 18. 480.
19. -17. 20. -55. 21. 18.

প্রশ্নমালা 31

1. $2a^3x+2a^2y$. 2. $x^3-2x^2y+xy^2$.
3. $4x^4-16x^3+28x^2$. 4. $a^7b^6c^5+a^5b^8c^4$.
5. $3x^{n+2}-6x^3+3x^2$. 6. $x^{2n}y+x^ny^2-x^ny$.
7. $a^3b^2c^2d^2+a^2b^3c^2d^2+a^2b^2c^3d^2+a^2b^2c^2d^3$.
8. $-x^2+6x-8$. 9. $10x^2+13x-3$.
10. $ax-5x+8a-40$. 11. $63x^4y^2-84x^2y+21$.
12. $a^{2m}-b^{2n}$. 13. $a^2+b^2+2ab+bc+ca$.
14. $a^2-b^2-ac+bc$. 15. $x^2y^2-y^2z^2+x^2yz-xyz^2$.
16. $x^3-y^3-x^2y+xy^2+xz^2-yz^2$.
17. x^3-6x^2+10x. 18. 0.
19. $ab+ad+bc+cd$.
20. $x^2(2a^2-b^2-c^2)+y^2(2b^2-c^2-a^2)+z^2(2c^2-a^2-b^2)$.

প্রশ্নমালা 32

1. a^6+x^6. 2. $8a^3-27b^3$. 3. $\frac{3}{4}x^3-\frac{2}{9}y^3$.
4. $\frac{1}{8}a^3-\frac{13}{16}a^2+\frac{9}{16}a-\frac{3}{32}$. 5. $x^4-y^4-z^4+2y^2z^2$.
6. $a^4+a^2b^2+b^4$. 7. x^8+x^4+1.
8. $2x^2-10y^2+3z^2-xy-13yz+7zx$.
9. $\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{5}a^2x^2+\frac{2}{5}ax^3+\frac{3}{5}x^4$.
10. $1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{17}{72}x^4+\frac{1}{12}x^5$.
11. $a^4-a^2x^2+2ax^3+10ax-10x^2-x^4-25$.
12. $1+x^2-x^4-x^6$.
13. $x^4y-x^3yz-x^3z^2-x^2y^3+x^2z^3+xy^3z+xy^2z^2-y^2z^3$.
14. $a^6-a^5x-a^4x^2+a^2x^4+ax^5-x^6$. 15. a^8-x^8.
16. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$. 17. $a^8+a^4b^4+b^8$;
18. a^6-x^6. 19. $x^{12}-y^{12}$.
20. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$.
21. $4a^2b+2b^3$. 22. $a^{4m}-b^{4m}$.
23. $a^{4m}+b^{4m}-2a^{2m}b^{2m}$.

প্রশ্নমালা 33

1. $2x^3+3x^2+5x+2$. 2. $12x^3-31x^2+40x-25$.
3. $2x^4-10x^3+17x^2-13x+3$.
4. $12a^3+14a^2b+9b^3$. 5. $x=9$. 6. $x=3$. 7. $x=5$.
8. $x=10$. 9. $x=7$. 10. 2.
11. 4. 12. 4. 13. x^3+3x^2+2x.
14. A, 22 টাকা ; B, 11 টাকা। 15. $6x^3+25x^2+16x+7$.

প্রশ্নমালা 34

1. $\frac{15}{32}pqr^3$. 2. $78x^2y^2z^2$.
3. $3a^5b^8c^7-4a^2b^2c^2x^2$. 4. $\frac{12}{5}a^2b^3c^2$.
5. $-\frac{1}{2}yz^2$. 6. $(x+y)^2$; $(a-b)^2$; $(ax+by)^4$.
7. $5a^2-3ax+x^2$. 8. $2x^2-\frac{3}{2}y^2+\frac{8}{5}z^2$.
9. $2a^3-3ay^2z-4yz^3$.

10. $(a^2+b)^4$; $(x^2+y^2)^4$; $(ax+by+cx)^n$.

11. $-x+\frac{3}{8}y+\frac{1}{2}z$. 12. $-4x^2y+2xy^2+y^3$.

প্রশ্নমালা 35

1. x^2+x+1. 2. $2x^2+5x-3$. 3. a^4-a^2+a.
4. $x^2+y^2+a^2$. 5. x^2-3x-1. 6. $y-1$.
7. $2x^2-3x-12$. 8. x^2-8x+1.
9. $3x^3-4x^2+6x-12$. 10. $x^2+2xy+2y^2$.
11. $-2a+3$. 12. $-32x^5-16x^4-8x^3+2x+1$.
13. $x^3+2x^2+7x+20$. 14. x^3+x^2+5x+2.
15. $3x+2y-z$. 16. x^2-5x+1. 17. $1-a-b+ab$.
18. $1-2a$. 19. $2x^2+x-1$.
20. $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1$.
21. $x^2+4y^2+9z^2-2xy+6yz+3zx$.
22. $x^2+y^2+1-xy+x+y$. 23. $2x^2-3x-8$.
24. x^3-3x^2-2x+1. 25. $2x^2-x+3$.
26. $3-x^2+2x^3$. 27. $1+x$. 28. $x-3$. 29. 3.

প্রশ্নমালা 36

1. $5ax+1$. 2. $x-\frac{3}{4}y$. 3. $\frac{3}{4}a+1$.
4. $x+\frac{4}{3}$. 5. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2$. 6. $\frac{1}{24}a^2-\frac{1}{36}a+\frac{1}{54}$.
7. $x^3+\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{9}xy^2+\frac{1}{27}y^3$.
8. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{16}z^2-\frac{1}{6}xy-\frac{1}{12}yz-\frac{1}{8}zx$.
9. $a^4-a^3b+\frac{2}{3}a^2b^2-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{9}b^4$.
10. $\frac{3}{2}x^3-5x^2+\frac{1}{4}x+9$. 11. ax^2+bx+c.
12. $x+a$. 13. $ab+ac+bc$. 14. $x^2+(a+b)x+b^2$.
15. $x+y$. 16. x^2+ax+c. 17. $x^2-x+(a^2-a)$.
18. $3x^3+2x^2-4x-10$. 19. $x+3y+2z$.

প্রশ্নমালা 37

1. ভাগফল $= 2x^2-3$, ভাগশেষ $= -3$. 2. ভাগফল $=3x^2+4x$; ভাগশেষ $=6x-5$. 3. ভাগফল $= x^2-x-1$; ভাগশেষ $=3x+10$.

4. $2x^2+x+7-\dfrac{14x+3}{x^2+3x+1}$.

5. $x^3-7x^2+50x-351+\dfrac{2460}{x+7}$.

6. আংশিক ভাগফল $=1+5x+15x^2+45x^3$, এবং ভাগশেষ $=135x^4$.

7. আংশিক ভাগফল $=1+x+x^2+x^3$, এবং ভাগশেষ $=x^4$.

8. আংশিক ভাগফল $=1+x^2-x^3+x^4$, এবং ভাগশেষ $=-x^5$.

9. আংশিক ভাগফল $=-1-3a-6a^2-6a^3$, এবং ভাগশেষ $=6a^4$.

10. x^3-4x^2+5x-2. 11. x^2-5x+3.

12. ভাগফল $=x^2-x+(c+3)$, ভাগশেষ $=9-3c$; 3.

প্রশ্নমালা 38

1. 15. 2. $a+b$. 3. 4.

4. a^2+ab. 5. $(a+b)$; $-(a+b)$. 6. একটি 5 পয়সা দরে।

বিবিধ প্রশ্নমালা III

I

1. $8x-5$. 2. $x-7y$.

3. $(ax-by-cz)+(bx-cy+az)$; $(a+b)x-(b+c)y-(c-a)z$.

4. $2x-y$. 5. ছাত্রসংখ্যা $4x-19$; 54.

II

1. $5a-6x-18$. 2. $-\frac{9}{2}$.

3. $15x^2+11x-14$ বুশেল। 4. $4x^4-25x^2+36$.

5. $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{12}xy+\frac{1}{6}yz-\frac{1}{8}zx$.

III

1. $6\frac{1}{2}$. 2. $\frac{7}{6}x+\frac{5}{6}y$. 3. -315. 4. 6 ; 40. 5. 2.

IV

1. 1. 2. $\cdot06-\cdot3x+\cdot2x^2-x^3$; $-3\cdot315$.

3. $(1+x)$ ঋণ। 4. $x^4-x^3-2x^2+4x$.

5. (0, 0) ; (2, 3) ; (4, 6) ; ইত্যাদি।

V

1. $\frac{11}{8}y-\frac{1}{8}z$. 2. $21\cdot7$ একক (স্থূলত)। 3. 5.

4. (i) $x=5\frac{1}{10}$; (ii) $x=-129\frac{3}{13}$. 5. 3 মাইল উত্তরে।

VI

1. ভাগফল 2.
2. $3x^2 - xz - 5xy + 5yz - 3xz^2 + z^2y - xy^2z + y^2z^2$; -11.
3. $2x^2 - 2(a+b)x + ab$.
4. 9 ঘণ্টা।

VII

1. $x - y$.
2. $x^2 - y^2$.
3. $a^3 - 4a^{\frac{8}{3}} + 7a^{\frac{7}{3}} - 7a^2 + 4a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}$.
4. $x^{-4} + y^{-4} + x^{-2}y^{-2}$.
5. $x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} + x^{-\frac{4}{5}}y^{-\frac{1}{5}} + xy^{-1} + x^{-1}y^{-1} + x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{6}{5}} + x^{-\frac{1}{5}}y^{-\frac{4}{5}}$
   $+ y^{-2} + 2$.
6. $1 - 4x^{\frac{2}{3}} + 8x - 8x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{5}{3}} - x^2$.
7. $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$.
8. $x^{\frac{1}{3}} - 2$.
9. $a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}} + 2$.
10. $m^{\frac{7}{11}} + n^{\frac{2}{11}}$.
11. $x^{-2} + y^{-3} - 2$

প্রশ্নমালা 39

1. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.
2. $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy + 6xz - 4yz$.
3. $p^2 + 4q^2 + r^2 + 4pq - 2pr - 4qr$.
4. $a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$.
5. $x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9$.
6. $a^2 + b^2 - 2ab + 4a - 4b + 4$.
7. $4pq - 2pr + 4qr$.
8. $x^2 + y^2 + z^2$.
9. $a^2 + 4b^2 + 9$.
10. $x^2 + 4y^2 + z^2$.
11. $6x^2y - 6x^2z + 2yz$.
12. $4x^2y^2 + 4y^2z^2$.
13. $12ab - 30ac - 20bc$.
14. $x^4 + x^2 + 1$.
15. $2x^3y^3 - 2x^3z^3 - 2y^3z^3$.

প্রশ্নমালা 40

1. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$.
2. $4x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 4xy + 4xz + 4xu - 2yz - 2yu + 2zu$.

3. $9x^2+4y^2+z^2-12xy+6xz-4yz-6x+4y-2z+1.$

4. $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{25}b^2-\frac{1}{4}xy+\frac{1}{6}ax-\frac{1}{10}bx$
$-\frac{1}{3}ay+\frac{1}{5}by-\frac{2}{15}ab.$

প্রশ্নমালা 41

1. $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2.$

2. $(a+1)^2-(1)^2.$

3. $(x+5)^2-(1)^2.$

4. $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$

5. $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2.$

6. $\frac{1}{4}(3x-1)^2-\frac{9}{4}(x-1)^2.$

7. $\frac{1}{4}(x^3+y^3)^2-\frac{1}{4}(x^3-y^3)^2.$

8. $(x+\frac{1}{8})^2-(\frac{3}{8})^2.$

9. $(a+1)^2-(a-1)^2.$

10. $\left(\frac{a^2+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b}{2}\right)^2.$

11. $x^2-(2y)^2.$

12. $(a-\frac{1}{2})^2-(\frac{7}{2})^2.$

13. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b+2}{2}\right)^2.$

14. $(x-\frac{24}{7})^2-(\frac{25}{7})^2.$

15. $(x+6)^2-(2)^2.$

প্রশ্নমালা 42

1. $2x^2+3x+1.$

2. $6x^2+7x-20.$

3. $2x^2-5x-7.$

4. $6p^2-19p+15.$

5. $-p^2+8p-12.$

6. $-2x^2+15x-27.$

7. $2x^4+x^2-1.$

8. $2a^4-a^2-1.$

9. $4x^2+5x-6.$

10. $14x^2-\frac{13}{2}x-\frac{5}{2}.$

11. $\frac{1}{6}a^2-6.$

12. $2a^4-5a^2-25.$

13. $6a^4+a^2-2.$

14. $2a^6+a^3-1.$

15. $12x^6-19x^3+5.$

প্রশ্নমালা 43

1. $x^3+9x^2+26x+24.$

2. $x^3-4x^2-7x+10.$

3. $a^3-10a^2+27a-18.$

4. $m^3-8m^2+m+42.$

5. $x^3-5x^2-17x+21.$

6. $x^3-9x^2+2x+48.$

7. $a^3-11a^2+38a-40.$

8. $a^3-6a^2+11a-6.$

9. $a^6+6a^4+11a^2+6.$

10. $p^3+4p^2-11p-30.$

প্রশ্নমালা 44

1. $p^3+q^3+r^3-3pqr$. 2. $8a^3-27b^3+27c^3+54abc$.
3. $a^3+x^3+6ax-8$. 4. $x^2+4y^2+9z^2-2xy+3xz+6yz$.
5. $2m-3n+4p$.

প্রশ্নমালা 47

1 $m(a-b)$. 2. $xy(x+y)$. 3. $pq(r-qs)$. 4. $axy(a+x-y)$.
5. $2m^2n^2(m+3n-2)$. 6. $(x+y)(a^2+b^2+c^2)$.
7. $(2a+3c)(p^2+3a+2b)$. 8. $(a^2-bc)(x^2+y^2-z^2)$.
9. $(x-y)(a^3+b^3+2xy)$. 10. $(p-q)(a^2+ab+b^2)$.
11. $x(a+b+c)$. 12. 0. 13. $2(a^2+b^2+c^2)x^2$.

প্রশ্নমালা 48

1. $(a+1)^2$. 2. $(x-50)^2$. 3. $(m-2)^2$. 4. $(4p-3q)^2$.
5. $(5a+7b)^2$. 6. $(4m-5)^2$. 7. $(7x-150)^2$.

প্রশ্নমালা 49

1. $(2a+3b)(2a-3b)$. 2. $(p+1)(p-1)$.
3. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$. 4. $(ab+xy)(ab-xy)$.
5. $(5+x)(5-x)$. 6. $9(3+z)(3-z)$.
7. $(25x+y)(25x-y)$. 8. $4a(3a+4x)(3a-4x)$.
9. $6x(3x+5y)(3x-5y)$. 10. $2p^2q(3p^2+q^2)(3p^2-q^2)$.
11. $(2a+3)$. 12. $(5a-3)(a-1)$. 13. $(7x-2)(x-12)$.
14. $4bc$. 15. $8y(x+3z)$.

প্রশ্নমালা 50

1. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. 2. $(a^2+3a+1)(a^2-3a+1)$.
3. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
4. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
5. $(7x^2+4xy^2-2y^4)(7x^2-4xy^2-2y^4)$.
6. $(8a^2+4a+1)(8a^2-4a+1)$.
7. $(3a^2+3a+1)(3a^2-3a+1)$.

8. $(x^2+7x+4)(x^2-7x+4)$.
9. $(2m^2+5mn+n^2)(2m^2-5mn+n^2)$.
10. $(3p^2+8p+2)(3p^2-8p+2)$.
11. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
12. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
13. $(4a^2+5ab-3b^2)(4a^2-5ab-3b^2)$.
14. $(16x^2+40xy+50y^2)(16x^2-40xy+50y^2)$.
15. $(3m^2+9m+5)(3m^2-9m+5)$.
16. $(4x^2+6x-3)(4x^2-6x-3)$.
17. $(2a^2+6ax-3x^2)(2a^2-6ax-3x^2)$.
18. $(6x^2+10ax-a^2)(6x^2-10ax-a^2)$.
19. $(a+b+c)(a-b-c)$.
20. $(a+b+2c)(b+2c-a)$.
21. $(3a+4b+c)(3a-4b+c)$.
22. $(2x+y+3z)(2x+y-3z)$.
23. $(p-3q+9r)(p-3q-9r)$.
24. $(x-2y+1)(x-2y-1)$.
25. $(1+m-3n)(1-m+3n)$.
26. $(2y+3z)(2y-3z-2x)$.
27. $(b-c)(2a+b+c)$.
28. $(a+b+x-y)(a+b-x+y)$.
29. $(2m-3n+3a-2b)(2m-3n-3a+2b)$.
30. $(2x+5y+3a+2)(2x+5y-3a-2)$.
31. $(x+y+z-a)(x+y-z+a)$.
32. $(10a+3x+6b-5y)(10a+3x-6b+5y)$.

প্রশ্নমালা 51

1. $(x+1)(x+2)$.
2. $(x+2)(x+3)$.
3. $(a+3)(a+4)$.
4. $(a+4)(a+5)$.
5. $(x+2)(x-1)$.
6. $(x-2)(x-3)$.
7. $(x-3)(x-4)$.
8. $(a+5)(a-4)$.
9. $(a-3)(a-5)$.
10. $(a+7)(a-3)$.
11. $(x-7)(x+4)$.
12. $(a-10)(a+1)$.
13. $(p-2)(p-8)$.
14. $(m-5)(m+2)$.
15. $(m+8)(m+3)$.
16. $(m-6)(m-2)$.
17. $(x+6)(x-4)$.
18. $(x-10)(x-7)$.
19. $(y-3)(y+2)$.
20. $(y-9)(y+7)$.

21. $(a-7)(a-8)$.
22. $(a+3)(a+11)$.
23. $(a+9)(a+1)$.
24. $(a+4)(a-6)$.
25. $(p+3)(p+10)$.
26. $(p+7)(p-2)$.
27. $(n-20)(n+10)$.
28. $(n+1)(n+11)$.
29. $(x-12)(x+9)$.
30. $(x+2)(x-30)$.
31. $(x+2)(2x+1)$.
32. $(2x+3)(2x+1)$.
33. $(2x+3)(3x+2)$.
34. $(3x-2)(2x-1)$.
35. $(3x+2)(4x-1)$.
36. $(3x-4)(x+1)$.
37. $(2x-3)(6x+1)$.
38. $(4x-3)(7x-5)$.
39. $(2x+9)(3x+7)$.
40. $(2x+7)(4x-9)$.
41. $(x+10)(10x+1)$.
42. $(a+5)(5a+1)$.
43. $(3a+5)(5a+3)$.
44. $(2a-7)(7a-2)$.
45. $(6a+7)(5a-2)$.
46. $(3m+8)(4m-7)$.
47. $(3m+7)(5m+2)$.
48. $(3m-10)(5m-12)$.
49. $(4p-9)(2p+3)$.
50. $(3p+5)(7p-1)$.
51. $(a+b)(2a+b)$.
52. $(2a+3b)(3a+2b)$.
53. $(4x+5y)(3x+2y)$.
54. $(5x+12y)(6x+y)$.
55. $(3x+7y)(2x-y)$.
56. $(3m-4n)(4m-3n)$.
57. $(m-10n)(2m-7n)$.
58. $(2a-3x)(4a+7x)$.
59. $(6a+5x)(2a-3x)$.
60. $(2a+9x)(3a-5x)$.
61. $(4a-21b)(a+b)$.
62. $(2m+7a)(3m-5a)$.
63. $(4a-3n)(5a-7n)$.
64. $(2p+q)(3p-10q)$.
65. $(7p-q)(p+7q)$.
66. $(b+5c)(3b-7c)$.
67. $(2m-x)(3m-4x)$.
68. $(3x+2a)(5x+6a)$.
69. $(a^2+3)(a^2+4)$.
70. $(4x^2-5)(3x^2+2)$.
71. $(a^3+2)(2a^3-5)$.
72. $(a^4+3x)(a^4-2x)$.
73. $(a^3-2x^2)(2a^3+3x^2)$.
74. $(x^5+7)(2x^5-3)$.
75. $(a^3+2x^3)(2a^3-5x^3)$.
76. $(2a-b+10)(2a-b+4)$.
77. $(3a-2x-7)(3a-2x+6)$.
78. $2(x-5)(2x+5)$.
79. $(2x+4y-7)(3x+6y+5)$.
80. $(12x-16a-1)(9x-12a+7)$.
81. $5(6a-b)(2a-b)$.
82. $-(23x+10y)(19x+4y)$.
83. $(12x-31y)(13x-29y)$.

প্রশ্নমালা 52

1. $(x+7)(x+5)$. 2. $(x+3)(x-9)$. 3. $(x-3)(x-7)$.
4. $(a+2)(a-9)$. 5. $(a+7)(a-6)$. 6. $(a+2)(a-5)$.
7. $(a+1)(a-10)$. 8. $(a+5)(a-8)$. 9. $(a+6)(a-11)$.
10. $(m+5)(m-7)$. 11. $(m-1)(m-20)$.
12. $(m-4)(m-8)$. 13. $(p-3)(p-9)$.
14. $(p+3)(p-7)$. 15. $(p+8)(p-5)$.
16. $(x^2-2)(x^2-3)$. 17. $(a^2+2)(a^2-7)$.
18. $(a-1)(a^2+a+1)(a^3+4)$. 19. $(x+2y)(x-5y)$.
20. $(x+7y)(x-3y)$. 21. $(x+4y)(x-5y)$.
22. $(a+4b)(a+2b)$. 23. $(a-b)(a-8b)$.
24. $(a+5b)(a-6b)$. 25. $(m+5n)(m-3n)$.
26. $(m+2n)(m-10n)$. 27. $(m-4n)(m-6n)$.
28. $(3x+2)(2x-1)$. 29. $(3x+4)(4x-1)$.
30. $(2x+3)(4x-7)$. 31. $(5x-3)(3x-5)$.
32. $(4x-3)(2x-7)$. 33. $(2x-5)(3x-10)$.
34. $(3a+7x)(2a-5x)$. 35. $(6a-5x)(a-3x)$.
36. $(2a-9x)(a-5x)$. 37. $(5m-8n)(m-4n)$.
38. $(4m+5n)(m-6n)$. 39. $(2x^2+3a^2)(4x^2-5a^2)$.
40. $(2a^3+3b^3)(6a^3-b^3)$.

প্রশ্নমালা 53

1. $(p-4q)(p^2+4pq+16q^2)$. 2. $(2a-1)(13a^2+5a+1)$.
3. $(5x^2-1)(25x^4+5x^2+1)$.
4. $(3a^3+x^4)(9a^6-3a^3x^4+x^8)$.
5. $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
6. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$(a^4-a^2b^2+b^4)$.
7. $xy(y-x)(y^2+yx+x^2)$. 8. $(7x+2)(49x^2-14x+4)$.
9. $(a-b)(a+3b)(a^4-2a^3b-2a^2b^2+6ab^3+9b^4)$.
10. $(a-b)(a-2b)(a^4+3a^3b+13a^2b^2+6ab^3+4b^4)$.

প্রশ্নমালা 55

34. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc.$

38. (i) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$; (ii) $\frac{x}{4}(x^2+3y^2)$; (iii) xy ;

(iv) $\frac{x^2-y^2}{4}.$

প্রশ্নমালা 56

1. $a.$ 2. $ax.$ 3. $mn.$
4. $4a^2x^3.$ 5. $36x^2y^2z^3.$ 6. $12a^2b^3c^3d^2.$
7. $8a^2m^2.$ 8. $9x^2y^3.$ 9. $14n^2x^2.$
10. $x.$ 11. $x-y.$ 12. $2(x+y).$
13. $p^2+q^2.$ 14. $mn(m+n).$ 15. $a^2+1.$
16. $a(x^2+2).$ 17. $2(a^2-a+1).$ 18. $ab(a-b).$
19. $x^2-xy+y^2.$ 20. $x+3y.$
21. $4x^2y^2(x+4y).$ 22. $3a^2b^2(a-3b).$
23. $m^2n^2(a^2+ab+b^2).$ 24. $x+y+z.$
25. $(x-9)(x-3).$ 26. $(x+3)(x+4).$
27. $a+b+c.$ 28. $x(a+x).$
29. $y(x-2y).$ 30. $x+4.$
31. $2(x-3).$ 32. $4a^2b^2(a+5b).$

প্রশ্নমালা 57

1. $x-5.$ 2. $x+5.$ 3. $3x-2.$
4. $3x-1.$ 5. $3x-2.$ 6. $1+x^3-x^4.$
7. $x-2.$ 8. $2x-3.$ 9. $x-2.$
10. $x-2a.$ 11. $x^2-2x-1.$ 12. $x^2+3x+2.$
13. $2x-3.$ 14. $x+5.$ 15. $x^2+x+1.$
16. $3x^2+2ax+a^2.$ 17. $x^2-3x+2.$ 18. $x^2+5x+2.$
19. $2x^2+7x+3.$ 20. $x^2-2x+3.$ 21. $x^2+x+2.$
22. $2x-3.$ 23. $3x+1.$ 24. $x+2a.$
25. $a^2-b^2.$

প্রশ্নমালা 58

1. abc. 2. x^3y^3. 3. $12m^2n^2$. 4. $42x^3y^3$.
5. $60a^2b^2c^2$. 6. $60m^2n^2p^2q^2x^2y$.
7. $180a^6b^3c^6x^3y^3z^3$. 8. $90a^3b^3c^3d^3x^3y^3$.
9. $24a^2b^2m^2n^2x^2y^2$. 10. $60a^6b^8m^9n^{10}p^{16}q^{12}$.
11. $12(a^2-x^2)$. 12. $24(a-2x)(a^2-4x^2)$.
13. $(m^2-n^2)(m^2-mn+n^2)$. 14. $(a^2-b^2)(b^2-c^2)$.
15. $(a^3+x^3)(a^3-x^3)$. 16. $60a^2b^2c^2(b^2-c^2)^2$.
17. $21xy(x-y)^2(x^3-y^3)$. 18. $20m^2n^2(m-n)(m^3+n^3)$.
19. $6a^2x^2(x^4-1)(x^2+x+1)$. 20. $x^2y^2(a^6-1)$.
21. $(x+1)(x+2)(x+3)$. 22. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
23. $(x+2)(x+3)(x+5)$. 24. $(a^2-1)(a-6)$.
25. $(m^2-1)(m-3)(m-5)$. 26. $(x+2)(x+6)(x-2)^2$.
27. $a^2x(a+2x)(a^2-x^2)$. 28. $a^2x^2(a-2x)(a^2-x^2)$.
29. $(x^2-1)(x^2-4)$. 30. $(2x+1)(x^2-1)$.
31. $(a^4-b^4)(a^2+ab+b^2)$. 32. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
33. $(x+y)(y+z)(z+x)$. 34. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$.
35. $(x+2)(x-3)(x+4)$. 36. $(8a^3-27b^3)(3a^2-ab-2b^2)$.
37. $x(3x+1)^2(29x-7)(9x^2-3x+1)$.
38. $(x^4-16a^4)(x^4+4a^2x^2+16a^4)$.

প্রশ্নমালা 59

1. $x^5+4x^4+6x^3+x^2-6x-6$.
2. $6x^4-23x^3+35x^2-29x+12$.
3. $12x^5-3x^4-8x^3+2x^2-4x+1$.
4. $3x^4-22ax^3+56a^2x^2-58a^3x+21a^4$.
5. $x^4+x^3-2x^2-x+1$. 6. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.
7. $12a^5+43a^4-3a^3+9a^2-19a-6$.
8. $6a^4-33a^3x-23a^2x^2+31ax^3-6x^4$.
9. x^4-5x^2+4.
10. $ax^6+a^2x^5-7a^3x^4+a^4x^3-8a^5x^2+20a^6x$.
11. $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$.

12. $4a^6-6a^5+10a^4-a^3-12a^2+15a-18.$

13. $3x^6-25x^5+6x^4+177x^3+119x^2+6x-6.$

14. $x^2-12x+35.$ 15. $x^3+2x^2-5x-6.$

16. ল. সা. গু. $=6x^5-11x^4-28x^3+112x^2-174x+63;$

গ. সা. গু. $=3x-7.$

প্রশ্নমালা 60

1. $x^4+18x^3+119x^2+342x+360.$

2. $x^5-17x^3+12x^2+52x-48.$

3. $x^4-58x^2-192x-135.$ 4. $x^3-7x+6.$

5. $2a^6-11a^5x-38a^4x^2+241a^3x^3+46a^2x^4-1040ax^5+800x^6.$

6. $x^6+5x^5-33x^4-149x^3+212x^2+684x-720.$

7. $3x^6+16x^5-51x^4-166x^3+404x^2-40x-96.$

8. $x^6+6x^4+9x^2-16.$ 9. $x(3x+1)^3(29x-7)(9x^2-3x+1).$

10. $(8x^3+27)(4x^2+6x+9)(6x^2-5x-6).$

11. $6x^4-31x^3+29x^2+54x-72.$ 12. $2x^2-7x-15.$

13. $x^6-17x^5+32x^4+723x^3-3959x^2+5360x-700.$

প্রশ্নমালা 61

1. $a.$ 2. $\frac{c}{ab}.$ 3. $\frac{a}{x}.$

4. $\frac{4a^2}{3xz}.$ 5. $\frac{3a^2x^2y^2}{2b^2}.$ 6. $\frac{9a^3}{5m^2n}.$

7. $\frac{4c^3d^5}{15pq}.$ 8. $\frac{b^3c^3d^3}{6a^2}$ 9. $\frac{2kl}{3mn}.$

10. $\frac{9x^2zl^2}{42ymn}.$ 11. $a-x.$ 12. $a-x.$

13. $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$ 14. $\frac{3a(a-b)}{4c(a+b)}.$ 15. $\frac{x(x-y)}{3y(x^2-xy+y^2)}.$

16. $\frac{xy}{4(x-y)}.$ 17. $\frac{2a}{x^2+2y^2}.$ 18. $\frac{-2abc}{3b-2c}.$

19. $\frac{4m-3n}{3n}.$ 20. $\frac{x+1}{x-2}.$ 21. $\frac{a+3}{a-5}.$

22. $\dfrac{x+2}{x+4}$. 23. $\dfrac{x-2}{x-1}$. 24. $\dfrac{y(x-6y)}{x(x+4y)}$.

25. $\dfrac{2a+3b}{a+3b}$. 26. $\dfrac{m+3}{m+1}$. 27. $\dfrac{2n(m+7)}{3m(m+6)}$.

28. $\dfrac{x^2+3x+9}{x-4}$. 29. $\dfrac{a^2+2ax+4x^2}{a+2x}$. 30. $\dfrac{x+1}{x+2}$.

31. $\dfrac{a+1}{a+5}$. 32. $\dfrac{a-1}{a^2-a+1}$. 33. a^2+ab+b^2.

প্রশ্নমালা 62

1. $\dfrac{a^2}{ab}, \dfrac{b^2}{ab}$. 2. $\dfrac{2ad}{3bd}, \dfrac{4ac}{3bd}$. 3. $\dfrac{9aby}{12bxy}, \dfrac{10ax^2}{12bxy}$.

4. $\dfrac{x^2z}{xyz}, \dfrac{y^2x}{xyz}, \dfrac{z^2y}{xyz}$. 5. $\dfrac{5a^2b^3}{5b^2c^2d}, \dfrac{4a^2c^3}{5b^2c^2d}$.

6. $\dfrac{20a^4b^3c^2}{30abcxy^2z}, \dfrac{12x^2y^3z^3}{30abcxy^2z}$. 7. $\dfrac{(x+a)^2}{x^2-a^2}, \dfrac{2x}{x^2-a^2}$.

8. $\dfrac{4xy(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}, \dfrac{(x-y)(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}$.

9. $\dfrac{2a(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)(a^3-b^3)}, \dfrac{12b(a+b)}{3(a+b)(a^3-b^3)}$.

10. $\dfrac{b(3a^2-b^2)}{ab}, \dfrac{a(4a^2-3b^2)}{ab}$.

11. $\dfrac{x(a-b)}{a^2-b^2}, \dfrac{y(a+b)}{a^2-b^2}, \dfrac{xy}{a^2-b^2}$.

12. $\dfrac{bc(b+c)(b^2+bc+c^2)}{(b+c)(b^3-c^3)}, \dfrac{ca(b^2+bc+c^2)}{(b+c)(b^3-c^3)}, \dfrac{ab(b+c)}{(b+c)(b^3-c^3)}$.

প্রশ্নমালা 63

1. $\dfrac{3a+2ab}{6}$. 2. $\dfrac{x^2-y^2}{xy}$.

3. $\dfrac{a^2+b^2}{b(a-b)}$. 4. $\dfrac{b^2+ac-1}{bc}$.

5. $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$. 6. $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{xyz}$.

7. $\dfrac{(3y-x)(y+2x)}{6xy}$.

8. $\dfrac{2x-1}{3x}$. 9. $\dfrac{4x^2-4x-1}{4x}$. 10. 0.

11. $\dfrac{b^2-ac}{(a-b)\ (b-c)}$. 12. $\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

13. $\dfrac{a^2b^2+(a-b)^2}{ab(a-b)}$. 14. $-\dfrac{2}{x^2-1}$.

15. $-\dfrac{x}{(x-4)(x-5)}$. 16. 0.

17. $\dfrac{3}{(x+1)(x+2)}$. 18. $\dfrac{-3x}{(x+1)(x+2)}$.

19. $\dfrac{4}{x+1}$. 20. $\dfrac{3}{(x+1)(x+3)(x+4)}$.

21. $\dfrac{2x}{x^3-8}$. 22. $\dfrac{5}{(x-2)(x-3)(x+4)}$.

23. $\dfrac{-5(3x+13)}{(x^2-4)\ (x^3-27)}$. 24. $\dfrac{b^2}{(a+b)\ (a+2b)(a+3b)}$.

25. 0.

প্রশ্নমালা 64

1. $\dfrac{2c}{b}$. 2. $\dfrac{8bx}{3ay}$. 3. $\dfrac{3bc}{10xy}$. 4. $\dfrac{4bx}{3ay}$.

5. $\dfrac{p^2}{abx}$. 6. $\dfrac{2pq^2}{9a^2b^5}$. 7. $\dfrac{b^2x}{ay^2}$. 8. $\dfrac{m^2n}{cd^3}$.

9. $\dfrac{3b}{2cx}$. 10. $\dfrac{pz}{ry}$. 11. $\dfrac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}$. 12. $\dfrac{3a(a+x)}{2x}$.

13. $\dfrac{4c}{a(b+c)}$. 14. 1. 15. $\dfrac{p-3q}{4p}$. 16. $\dfrac{4m}{m+2n}$.

17. $\dfrac{a}{b-c}$. 18. $\dfrac{a}{c}$. 19. $\dfrac{2x^2}{a}$. 20. $\dfrac{a+b}{a-4b}$.

21. $\frac{a^3}{x^3}-\frac{b^3}{y^3}$.
22. $\frac{2}{3x^2}$.
23. $-\frac{1}{y}$.
24. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{y^4}{b^4}$.
25. $\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^2$.
26. $\frac{a-3x}{a-x}$.
27. $\frac{a+1}{a+7}$.
28. $\frac{a-1}{a-7}$.
29. 1.
30. $\frac{1}{x^3y^3}$.
31. $\frac{1}{x+y}$.
32. 1.
33. a^2+b^2.
34. a^2-ab+b^2.
35. $\frac{a}{b}$.
36. $x+1$.
37. $\frac{x+y}{y^2(x^2+xy+y^2)}$.
38. 4.
39. $\frac{4(a+1)}{a^2-a+1}$.
40. $\frac{x^2-y^2}{xy}$.

প্রশ্নমালা 65

1. $x=0$.
2. $x=-\frac{11}{7}$.
3. $x=\frac{13}{19}$.
4. $x=2\frac{275}{288}$.
5. $x=20$.
6. $x=7$.
7. $x=0$.
8. $x=11$.
9. $x=4\frac{1}{2}$.
10. $x=3$.
11. $x=6$.
12. $x=10$.
13. $x=\frac{1}{2}$.
14. $x=-\frac{6}{4}$.
15. $x=\frac{a^2+b^2+c^2-3bc}{2a-b-c}$.
16. $x=0$.
17. $x=\frac{a+b+c}{3}$.
18. $x=a+b+c$.
19. $x=a+b$.
20. $x=1$.
21. $x=-\frac{1}{7}$.
22. $x=8$.
23. $x=100$.
24. $x=0$.
25. $x=0$.

প্রশ্নমালা 66

1. $x=4$.
2. $x=6\frac{3}{5}$.
3. $x=0$.
4. $x=\frac{b^2-ac}{b-c}$.
5. $x=a+b+c$.
6. $x=-\frac{5}{3}$.
7. $x=3$.
8. $x=\frac{1}{63}$.
9. $x=2\frac{1}{3}$.

10. $x=5\frac{17}{19}$.	11. $x=-2\frac{79}{111}$.	12. $x=-\frac{12}{301}$.
13. $x=7$.	14. $x=20$.	15. $x=5$.
16. $x=6$.	17. $x=-\frac{3}{4}$.	18. $x=-2$.
19. $x=6$.	20. $x=\frac{185}{284}$.	21. $x=-\frac{27}{23}$.
22. $x=6$.	23. $x=11$.	24. $x=10$.
25. $x=1\frac{11}{24}$.	26. $x=a+b$.	27. $x=19$.
28. $x=6$.	29. $x=1$.	30. $x=-3$.
31. $x=\frac{5}{3}$.	32. $x=7$.	33. $x=a+b$.
34. $x=4$.	35. $x=2$.	36. $x=-\frac{5}{8}$.
37. $x=3\frac{2}{3}$.	38. $x=4\frac{1}{4}$.	39. $x=4$.
40. $x=7$.		

প্রশ্নমালা 67

1. $x=7\frac{1}{2}$.	2. $x=9\frac{1}{2}$.	3. $x=4$.
4. $x=-\frac{7}{2}$.	5. $x=-\frac{5}{8}$.	6. $x=-\frac{1}{2}$.
7. $x=\frac{3}{2}$.	8. $x=8$.	9. $x=7$.
10. $x=\frac{9}{74}$.	11. $x=-\dfrac{2(a-b)}{2a-b}$.	12. $x=\frac{1}{2}(a+b)$.
13. $x=\frac{1}{2}(a^2+d^2)$.	14. $x=5\frac{1}{2}$.	15. $x=\frac{1}{2}(a+b)$
16. $x=9$.	17. $x=3$.	18. $x=5$.
19. $x=4\frac{2}{7}$.	20. $x=8\frac{2}{3}$.	

প্রশ্নমালা 68

1. 345.	2. 864.	3. 12, 35, 5, 75.
4. $\frac{3}{8}$.	5. 6 দিন।	6. 25 দিন।
7. 4 দিন।	8. 5 ঘণ্টা।	9. 30 ঘণ্টা।
10. 6 ঘণ্টা।	11. ঘণ্টায় 4 মাইল।	12. ঘণ্টায় 10 মাইল।

13. ঘণ্টায় $8\frac{1}{3}$ মাইল। 14. দিন 12 টা।

15. দিন 12 টায় এবং A হইতে 125 মাইল দূরে।

16. P হইতে $2\frac{2}{3}$ মাইল দূরে। 17. 15 মিনিট পরে।

18. যাত্রা করিবার 1 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে। 19. 10 মিনিট পরে।

20. 1 টা 3 পয়সা দরে। 21 80 পাউণ্ড. 22. $2\frac{1}{3}$ পয়সায় 1টি হিসাবে; 132 টা.

23. প্রতি কাঠা 440 টাকা। 24. 35 সের।

25. 420 আউন্স তাম্র ; 255 আউন্স টিন।

26. 6 আউন্স এবং 4 আউন্স। 27. 1 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিটের সময়ে।

28. 3 টা $49\frac{1}{11}$ মিনিটের সময়। 29. 3 টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটের সময়।

30. 150. 31. 144. 32. 11.

33. 72. 34. 16 ফুট। 35. 260 ফুট।

36. $\frac{1}{3}(a+4b)$.

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

I

1. $x-y-2y^{\frac{1}{2}}-1$. 2. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.

4. $3x^4+3y^4+10x^2y^2$.

5. $(2x-3y+1)(4x^2+9y^2+6xy-2x+3y+1)$.

6. x^2+xy+y^2. 7. x^6-a^6. 8. 1.

9. $x=\frac{2}{15}$. 10. 15 দিন।

II

1. $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+1$. 2. $x^2-xy-xz+yz$.

3. $(9x-2y^2)(81x^2+18xy^2+4y^4)$.

5. $x-2$. 6. $(x-1)(x-2)(x+3)$. 7. 0.

8. $x=2\frac{1}{2}$. 9. $x=5$. 10. যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা পরে।

III

1. $16x^4+36x^2y^2+81y^4$. 2. $3(b+c)(a-c)$.

3. $(2x+5y)(3x-4y)$. 4. 999700.

5. 40. 6. $(x+2)(x+3)(x-4)$.

7. $\dfrac{a+3}{a-2}$. 8. $x=\dfrac{bc^2+ca^2+ab^2-a-b-c}{bc+ca+ab-1}$.

9. ঘণ্টায় 12 মাইল। 10. 4 টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট এর সময়ে।

IV

1. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

2. $3(a+2b+c)(a+b+2c)$. 3. 104. 4. $(a+b+c)^3$.

5. x^2+x+1. 6. $\frac{xyz}{x+y-z}$. 7. $x=7$.

8. $x=1$. 9. শতকরা $7\frac{1}{2}$ হারে লাভে।

10. 14.

V

1. 7. 2. 1. 4. $(a+b)(a+c)$.

5. $(9x^2+42xy+98y^2)(9x^2-42xy+98y^2)$.

6. 1. 7. 0. 8. $x=\frac{4}{5}$. 9. $x=\frac{ab}{a-2b}$.

10. 9টা $16\frac{4}{11}$ মিনিটের সময়।

VI

1. $x^3+\frac{3}{5}x-\frac{2}{7}$. 2. (i) $a(a-1)(a+1)^2(a^2-a+2)$;

(ii) $xy(xy-5)(xy-4)$. 3. $\frac{2a}{1-a^2}$. 4. $-\frac{ab}{c}$.

5. $x=1$. 6. $(2x+3y+z)(2x-3y-z)(2x+3y-z)$.

7. $\frac{a(1-b^2)}{b(1-a^2)}$. 8. $x=4$. 9. 528. 10. 225.

VII

1. a^2-ab+b^2. 2. $\frac{3x-y}{2}$. 3. a.

4. (a) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6+2)$.

(b) $(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

6. $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$. 7. $x=6$. 8. $x=\frac{a^2-b^2}{b}$.

9. 6 গ্যালন। 10. ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল।

VIII

1. $4x^6-4x^5+x^4-4x^3+6x^2+9$.

2. $x(x^2-1)$. 3. $x=-\frac{1}{2}$. 4. $\frac{1}{x-8}$. 7. $x=5\frac{1}{2}$.

8. $m^{\frac{7}{2}}+m^3n^{-\frac{1}{2}}-m^{-\frac{3}{2}}-m^{-1}n^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}n^{-3}+m^{-\frac{1}{2}}n+n^{\frac{3}{2}}+n^{-\frac{7}{2}}$.

9. 76 পাউণ্ড স্বর্ণ; 30 পাউণ্ড রৌপ্য। 10. 140.

প্রশ্নমালা 69

1. $(x+y)^2+(x+2y)^2$. 2. $(3a+4b)^2+(2a-b)^2$.
3. $(x+2y)^2+(y+z)^2$. 4. $(x^2+3x+3)^2-(x^2+2x-1)^2$.
5. $(4x+5)^2-(x-5)^2$. 6. $(x^2+10x+20)^2-4^2$.
7. $(3x-2y)^2-(x+7b)^2$. 9. 29.
13. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 14. 0.

প্রশ্নমালা 70

1. $x^3+y^3-3xy+1$. 2. $x^3-y^3-6xy-8$.
3. $a^3-b^3+3ab+1$. 4. $8x^3-27y^3+64z^3+72xyz$.
5. 0. 6. 0. 7. 1.
11. $(m-n+1)(m^2+n^2+mn-m+n+1)$.
12. $(x+y-6)(x^2+y^2-xy+6x+6y+36)$.
13. 0. 15. 0.

প্রশ্নমালা 71

2. 0. 7. $(x-y)(y-z)(z-x)$. 8. 0.

প্রশ্নমালা 72

2. 0. 3. abc.
4. $x^2y+2x^2z+2y^2z+xy^2+4xz^2+4yz^2+4xyz$.
5. $3x^2y-4x^2z-36y^2z-9xy^2-16xz^2+48yz^2+24xyz$.
6. $2a^3+2b^3+2c^3+7a^2b+7a^2c+7b^2c+7b^2a+7c^2a+7c^2b$ $+16abc$.
7. $3x^2y+2x^2z+9xy^2+18y^2z+4xz^2+12yz^2+18xyz$.

প্রশ্নমালা 73

1. $2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4-c^4z^4$.
2. $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+3a^2x^2by+3a^2x^2cz+3b^2y^2cz$ $+3ab^2xy^2+3ac^2xz^2+3bc^2yz^2+6abcxyz$.
3. $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3x^2z+3y^2z+3xy^2+3xz^2-3yz^2$ $-6xyz$.
4. $8x^3+y^3-z^3+12x^2y-12x^2z-3y^2z+6xy^2+6xz^2+3yz^2$ $-12xyz$.
5. $3(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)$.

প্রশ্নমালা 74

1. $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$.
2. $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$.
3. $a^6x^6+6a^5x^5b+15a^4x^4b^2+20a^3x^3b^3+15a^2x^2b^4$
$+6axb^5+b^6$.
4. 128.
6. $16x(4x^2+1)$.
7. $2ax(a^4x^4+10a^2x^2b^2+5b^4)$.
8. 1293.
9. 0.

প্রশ্নমালা 75

1. $(2a^2x^2+5y^2)(5a^2x^2-3y^2)$.
2. $(x^2+y^2-2)(3x^2+3y^2-1)$.
3. $(x+1)(x+4)(x^2+5x+2)$.
4. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.
5. $(x+1)^2(x^2+x+1)$.
6. $(x+1)^2(x^2-6x+1)$.
7. $(x^2+1)^2(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$.
8. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.
9. $(x-y-z)(3x+y+z)$.
10. $(2x-2y+3z)(3x+4y-2z)$.
11. $(2x-3y+1)(2x-3y-3)$.
12. $(x-2y-3)(x+y+1)$.
13. $(3x+z-1)(x+2y+3)$.
14. $(x-y+2z-2)(2x+y-z+1)$.

প্রশ্নমালা 76

1. $(x+1)(x^2+1)$.
2. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
3. $(x+1)(x+2)(x-3)$.
4. $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$.
5. $(x-1)^2(x+2)$.
6. $(a+1)(a-2)(3a^2-2a+4)$.
7. না, হাঁ, না।
8. না, না, হাঁ।
9. হাঁ, না, না।
10. না, না, না।
11. না।
12. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.

প্রশ্নমালা 77

1. $(x-1)(x^2+5x+5)$.
2. $(x+y)(x-y)^3$.

3. $(a-3)(a^2+2a+5)$. 4. $(3x-11)(x^2-2x-1)$.
5. $(x+2)^2(x-4)$. 6. $(2x+5)(x^2-x+3)$.
7. $(x^2+5x+5)^2$. 8. $(2x^2-3x+6)(2x^2-3x-8)$.
9. $(3x+2)(3x^2+2x+1)$. 10. $(x+3)(x+4)(x^2+7x+4)$.
11. $(x+1)(x+8)(x^2+9x+30)$.
12. $(x^2+3x-5)(x^2+3x+7)$.
13. $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)(a^2+1)(b^2+1)$.
14. $\{y(x-1)+z(x+1)\}\{y(x+1)-z(x-1)\}$.
15. $(x^2+3x-5)(x^2-3x+5)$.
16. $(x^2+2x+3)(2x^2+3x+4)$.
17. $b(a^2+5ab-3b^2)(a^2-5ab-3b^2)$.
18. $(x^2+6x-1)(x^2+6x-17)$.
19. $(x^2+4x-3)(x^2+4x-1)$.
20. $(x^2+3x-1)(x^2+3x-3)$.

প্রশ্নমালা 78

1. $(a+b-c)(ab-bc-ca)$. 2. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.
3. $(b+c-a)(bc-ca-ab)$. 4. $-(x+y)(y-z)(z-x)$.
5. $-(x+y)(y-z)(z-x)$. 6. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
7. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
8. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
9. $-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$.
10. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
11. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
12. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+3)$.
13. $(b-c)(c-a)(c-b)$.
14. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
15. $-x^2(b-c)(c-a)(a-b)$. 16. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
17. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
18. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2)$.
19. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
20. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
21. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

22. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.
23. $(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$.
24. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
25. $x(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
26. $-(b-c)(c-a)(a-b)\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)\}$.
27. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.
28. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+1)$.
29. $-(y-z)(z-x)(x-y)$.
30. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a+2b)(2a-b)$.

প্রশ্নমালা 79

1. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$.
2. $(2x+y)(x-y)^2$.
3. $(3x-2y-1)(9x^2+4y^2+6xy+3x-2y+1)$.
4. $(1-x-y)(1+x+y-xy+x^2+y^2)$.
5. $-2(b-c)\{(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2\}$.
6. 648. 7. $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.
8. $3(x-2y)(2y-3z)(3z-x)$.
9. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.
10. $3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$.
11. 0. 12. 2.
13. $3(a+b)(b-c)(a+2b-c)$. 17. 65.

প্রশ্নমালা 80

1. $(2x+y+z)(y+z-2x)(z+2x-y)(2x+y-z)$.
2. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.
3. 261·6471.
5. $(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$;
$(x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$.
7. 1575.
8. $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+(a+b)(b+c)(c+a)-abc\}$.

প্রশ্নমালা 82

25. 21.

প্রশ্নমালা 83

1. 7, −13, 115. 2. (*i*) $2n+3$.
3. (*i*) 1 ; (*ii*) 97 ; (*iii*) 52.
7. −60. 8. 2. 10. $b+c+1=0$.
12. $(p+q)^2(p+q+1)=a$. 13. 6.

প্রশ্নমালা 84

1. না। 2. না। 3. না।
4. হাঁ, $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
14. $m=2kn$, k যে কোন ধন পূর্ণ সংখ্যা।
18. ap^3+bp^2+cp+d.

প্রশ্নমালা 85

1. $3x^3-5x^2+7$. 2. a^2+a+1. 3. x^2-3x+5.
4. $2x^2+15x-8$. 5. $2x^2+7x+3$. 6. $2x^2+3x+2$.
7. 1. 8. x^2+x+1. 9. x^2-2x+1.
10. $3x^2+2x+1$. 11. x^2-5x+6. 12. x^2-x+2.
13. $x-2$. 14. x^2-3x+7. 15. x^2+x-3.

প্রশ্নমালা 86

1. $9x^5-63x^4-820x^3+5884x^2+8000x-57600$.
2. $x^7+x^6-x^5+2x^4-x^3-x^2+x-2$.
3. $x(3x+1)^3(9x^2-3x+1)(29x-7)$. 4. x^3+x^2+x-4.
5. $(5x+1)(x+1)(x-1)$ এবং $(5x+1)(x+1)(x^2-2x-2)$; অথবা $(5x+1)(x+1)$ এবং $(5x+1)(x+1)(x-1)(x^2-2x-2)$.

প্রশ্নমালা 87

1. $\dfrac{1}{1-4x^2}$. 2. 0. 3. $\dfrac{a+b}{(b+c-a)(c+a-b)}$. 4. −1.
5. $\dfrac{4x^7}{x^8-a^8}$. 6. $\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2$. 7. $(b+c)(c+a)(a+b)$.
8. $\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2-c(a+b)+c^2}$. 9. $\dfrac{2a(x^2+5ax+7a^2)}{(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)}$.

10. $\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}$. 11. $\dfrac{1}{x-1}$. 12. $\dfrac{6x}{(x-2)(x+3)(x-5)}$.

13. $\dfrac{x}{x^2-1}$. 14. $\dfrac{8x+5}{(x+2)(2x+1)(6x+1)}$.

15. $\dfrac{11x+15a}{(x+a)(3x+5a)(5x+7a)}$. 16. $\dfrac{a+b+c}{2}$.

17. $\dfrac{3x^4-12x^3+40x^2-539x+58}{(x-4)(x+5)(x-6)(x-7)}$.

18. $\dfrac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 19. $\dfrac{4x^3}{1+x^4+x^8}$.

20. $\dfrac{3}{(x^2+x+7)(x^2+4x+4)}$. 21. $\dfrac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$.

22. $\dfrac{2a}{a+b}$. 23. 1. 24. $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$.

25. $\dfrac{4(abc+a^2b+b^2c+c^2a)(abc+ab^2+bc^2+ca^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)}$.

26. $\dfrac{7x-2y}{5x^2-3xy+2y^2}$.

প্রশ্নমালা 88

1. 0. 2. 0. 3. 0. 4. 0. 5. x.
6. 0. 8. -1. 9. x^2. 10. 0. 11. 0.
12. $x+y+z$. 13. 1. 14. 1. 15. p.
16. 0. 17. 0. 18. d. 19. $5(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

20. $\dfrac{a+b+c}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$. 21. 4. 22. -2.

23. $\dfrac{a+b+c+x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$. 24. $\dfrac{a+b+c}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

25. 1. 26. 0. 27. 0. 28. 1.

প্রশ্নমালা 89

1. $\dfrac{1}{x}$. 2. 1. 3. $\dfrac{xy(x-y)}{x+y}$.

4. $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. 5. $\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}$. 6. $\dfrac{1}{2}$

7. $\frac{b}{a}$. 8. x. 9. y.

10. $-x^2y^2z^2$. 11. $\frac{2x+1}{3x+2}$. 12. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$.

13. $\frac{3}{2(x+1)}$. 14. $\frac{a^2}{a^2+a-1}$. 15. $\frac{x}{x-y}$.

16. $\frac{x(1+x+x^3)}{1+x^2}$. 17. $\frac{y^2-zx}{z-x}$. 18. $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

19. 2. 20. $-\frac{2t^2+4t+1}{t^2+3t+2}$. 21. x.

22. (*i*) $\frac{a(a+2b)}{b(4a-b)}$; (*ii*) $\frac{b(b+1)}{b^2-a}$. 23. $\frac{2(a-2b)}{b}$.

24. $\frac{b(a-1)}{2a+b+ab}$. 25. $\frac{2a}{1-a^2}$; $\frac{2b}{1-b^2}$.

26. $\frac{-8t^2}{(3t^2+1)(t+1)}$. 27. x. 28. $\frac{1}{c}$.

29. $\frac{2a}{1-a^2}$. 30. (*i*) $x=3\frac{1}{13}$; (*ii*) $x=1$; (*iii*) $x=9$; (*iv*) $x=1$; (*v*) $x=1$; (*vi*) $x=1\frac{1}{4}$.

প্রশ্নমালা 91

1. $x=8, y=2$.
2. $x=7, y=-3$.
3. $x=4, y=3$.
4. $x=18, y=6$.
5. $x=5, y=3$.
6. $x=19, y=3$.
7. $x=1, y=1$.
8. $x=\frac{7}{11}, y=-\frac{2}{11}$.
9. $x=6, y=2$.
10. $x=10\frac{5}{49}, y=19\frac{2}{7}$.
11. $x=\frac{92}{123}, y=\frac{89}{246}$.
12. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{3}$.
13. $x=7, y=\frac{1}{3}$.
14. $x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{2}$.
15. $x=5\frac{1}{41}, y=4\frac{2}{13}$.

প্রশ্নমালা 92

1. $x=8, y=7$.
2. $x=5, y=2$.
3. $x=3\frac{22}{25}, y=\frac{22}{35}$.
4. $x=3, y=3$.
5. $x=2, y=4$.
6. $x=8, y=2$.

7. $x=\frac{46}{203}, y=1\frac{739}{2030}$. 8. $x=2, y=3$.
9. $x=2, y=3$. 10. $x=3, y=2$. 11. $x=2, y=3$.
12. -6 ; 13. 13. $a=\frac{3}{2}, b=2$.

প্রশ্নমালা 93

1. $x=\cdot02, y=2\cdot9$. 2. $x=2, y=5$. 3. $x=3, y=2$.
4. $x=3, y=2$. 5. $x=3, y=8$. 6. $x=-1, y=1$.
7. $x=1\frac{1180}{8493}, y=1\frac{4173}{5662}$. 8. $x=5, y=3$.
9. $x=2, y=1$. 10. $x=-\frac{8}{3}, y=-\frac{13}{3}$.
11. $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{5}$. 12. $x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{4}$.

প্রশ্নমালা 94

1. $x=\dfrac{c(c-b)}{a(a-b)}, \quad y=\dfrac{c(a-c)}{b(a-b)}$. 2. $x=1, y=1$.
3. $x=a, y=b$. 4. $x=a^2, y=b^2$.
5. $x=y=a^2-b^2$. 6. $x=\dfrac{12abm}{a+b}, \quad y=\dfrac{(a-b)(7b-5a)m}{a+b}$.
7. $x=\dfrac{abc(bc-ca-ab)}{b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}, \quad y=\dfrac{abc(bc-ca+ab)}{b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}$.
8. $x=\dfrac{a^2-b^2}{am-bn}, \quad y=\dfrac{a^2-b^2}{an-bm}$. 9. $x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$,
$y=\dfrac{b^2-a^2+2ab}{2ab}$.
10. $x=-\dfrac{2b}{b+1}, \quad y=-\dfrac{2a}{a+1}$. 11. $x=a+b, y=b-a$.
12. $x=b+a, y=b-a$. 13. $x=a(a-b), y=b(a-b)$.

প্রশ্নমালা 95

1. $x=1, y=1$. 2. $x=2, y=2$. 3. $x=1, y=2$.
4. $x=\dfrac{lm-n^2}{m^2-nl}, \quad y=\dfrac{mn-l^2}{m^2-nl}$. 5. $x=\frac{2}{3}, y=\frac{5}{8}$.
6. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{8}$. 7. $x=3, y=1$. 8. $x=10, y=15$.
9. $x=3, y=4$. 10. $x=\frac{11}{42}, y=-\frac{11}{21}$.

প্রশ্নমালা 96

1. $x=2,\ y=3,\ z=5.$ 2. $x=6,\ y=0,\ z=-3.$
3. $x=-3,\ y=3,\ z=1.$ 4. $x=10,\ y=20,\ z=5.$
5. $x=1,\ y=2,\ z=3.$ 6. $x=y=z=12.$
7. $x=\frac{1}{12},\ y=-\frac{1}{60},\ z=\frac{1}{60}.$ 8. $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{5}.$
9. $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{5}.$
10. $x=\dfrac{a(b-a)(c-a)}{k(b-k)(c-k)},\quad y=\dfrac{b(c-b)(a-b)}{k(a-k)(c-k)},\quad z=\dfrac{c(a-c)(b-c)}{k(a-k)(b-k)}.$

প্রশ্নমালা 97

1. $x=1,\ y=4,\ z=3.$ 2. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
3. $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{12},\ z=\frac{1}{8}.$ 4. $x=7,\ y=8,\ z=9.$
5. $x=\frac{1}{2},\ y=1,\ z=3.$
6. $x=abc,\ y=-(ab+bc+ca),\ z=a+b+c.$
7. $x=\frac{10}{3},\ y=\frac{10}{7},\ z=\frac{10}{11}.$ 8. $x=1,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{3}.$
9. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{4}.$

প্রশ্নমালা 98

1. $x=3,\ y=-8,\ z=-26.$ 2. $x=6,\ y=4,\ z=2.$
3. $x=\frac{1}{3}(b-c),\ y=\frac{1}{3}(c-a),\ z=\frac{1}{3}(a-b).$
4. $x=6,\ y=8,\ z=10.$
5. $x=\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)},\quad y=\dfrac{acd}{(b-c)(b-a)},\quad z=\dfrac{abd}{(c-a)(c-b)}.$
6. $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b.$ 7. $x=3,\ y=4,\ z=5.$
8. $x=\frac{285}{98},\ y=-\frac{213}{98},\ z=\frac{124}{98}.$
9. $x=\dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\quad y=\dfrac{(c-d)(a-d)}{(c-b)(a-b)},\quad z=\dfrac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$
10. $x=a,\ y=b,\ z=c.$ 11. $x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b).$
12. $x=a,\ y=b,\ z=c.$
13. $x=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)},\quad y=\dfrac{1}{(b-c)(b-a)},\quad z=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}.$
14. $x=a(m-n),\ y=b(n-l),\ z=c(l-m).$

15. $x=\frac{1}{bc(c-b)}$, $y=\frac{1}{ca(a-c)}$, $z=\frac{1}{ab(b-a)}$.

16. $x=\frac{abc}{(a-b)(a-c)(a+b+c)}$, $y=\frac{abc}{(b-a)(b-c)(a+b+c)}$,
$z=\frac{abc}{(c-a)(c-b)(a+b+c)}$.

17. $x=a^2, y=b^2, z=c^2$.

18. $x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$.

19. $x=a-b, y=b-c, z=c-a$.

20. $x=b^2-c^2, y=c^2-a^2, z=a^2-b^2$.

21. $x=ab, y=bc, z=ca$.

22. $x=\frac{1}{3}(b-c), y=\frac{1}{3}(c-a), z=\frac{1}{3}(a-b)$.

23. $x=\frac{1}{2}(b+c), y=\frac{1}{2}(c+a), z=\frac{1}{2}(a+b)$. 24. $x=a, y=b, z=c$.

25. $x=a, y=b, z=c$.

26. $x=-(ab+bc+ca), y=a+b+c, z=1$.

27. $x=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{1}{(b-c)(b-a)}$, $z=\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

28. $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$.

প্রশ্নমালা 99

1. $x=y=z=\frac{1}{a+b+c}$.

2. $x=y=z=1$. 3. $x=2a, y=2b, z=2c$.

4. $x=\frac{2(ab-ac+c^2)}{b(a^2+c^2)}$, $y=\frac{2(ab+bc-b^2)}{b(a^2+c^2)}$, $z=\frac{2(bc-ac+a^2)}{b(a^2+c^2)}$.

5. $x=y=z=3$.

6. $x=\frac{2}{b+c-a}$, $y=\frac{2}{c+a-b}$, $z=\frac{2}{a+b-c}$.

7. $x=-\frac{2bc}{b+c}$, $y=-\frac{2ca}{c+a}$, $z=-\frac{2ab}{a+b}$.

8. $x=\frac{120}{43}$, $y=\frac{120}{37}$, $z=\frac{120}{53}$.

9. $x=y=z=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

10. $x=1, y=1, z=0.$ 11. $x=a, y=b, z=c.$
12. $x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{3}.$ 13. $x=2bc, y=2ca, z=2ab.$
14. $x=\frac{1}{4}(a+b+2c), y=\frac{1}{4}(a+2b+c), z=\frac{1}{4}(2a+b+c).$
15. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}.$ 16. $x=\frac{1}{3}a, y=\frac{1}{3}b, z=\frac{1}{3}c.$
17. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}.$ 18. $x=\frac{1}{a}, \; y=\frac{1}{b}=z=\frac{1}{c}.$

প্রশ্নমালা 100

1. 72, 45. 2. $\frac{9}{19}$. 3. $\frac{17}{21}$. 4. $\frac{5}{8}$.
5. $\frac{13}{25}$. 6. 18 দিনে। 7. A র 50 দিন এবং B এর 75 দিন।
8. $\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$ দিনে।
9. সেকেণ্ডে $11\frac{1}{2}$ গজ এবং সেকেণ্ডে $5\frac{1}{2}$ গজ। 10. $32\frac{1}{2}$ মিনিট।
11. প্রথমটির বিক্রয় মূল্য 22 টাকা এবং দ্বিতীয়টির বিক্রয় মূল্য 24 টাকা।
12. A র 4 মিনিট এবং B এর 5 মিনিট।
13. ঘণ্টায় 2 মাইল। 14. বায়ুর গতি ঘণ্টায় 10 মাইল; স্থির বাতাসে এরোপ্লেনের গতি ঘণ্টায় 65 মাইল।
15. স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল; স্থির জলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় 8 মাইল।
16. 27. 17. 82 অথবা 28. 18. 305. 19. 21 বর্গ ফুট।
20. 144 বর্গগজ। 21. দৈর্ঘ্য 17 ইঞ্চি; বিস্তার 9 ইঞ্চি।
22. 200 টাকা। 23. A, 46 টাকা; B, 30 টাকা; C, 16 টাকা।
24. সম্মুখের চাকার পরিধি 4 গজ; পশ্চাতের চাকার পরিধি 5 গজ।
25. শতকরা 4 টাকা হারে 650 টাকা এবং শতকরা 5 টাকা হারে 550 টাকা।
26. প্রত্যেক সের চিনির মূল্য 5 আ. 6 পা. এবং প্রত্যেক সের চালের মূল্য 3 আ. 3 পাই।
27. ছাত্রগণের নিকট 144 খানি টিকিট এবং সাধারণের নিকট 156 খানি টিকিট। 28. 43.
29. স্বামীর বয়স 50 বৎসর, স্ত্রীর বয়স 40 বৎসর, পুত্রের বয়স 15 বৎসর।
30. হরেনের বয়স 12 বৎসর, গোবিন্দের বয়স 10 বৎসর।
31. চা বাগানের প্রতি অংশের মূল্য 15 টাকা কমিয়াছে, পাট কলের প্রতি অংশের মূল্য 15 টাকা বাড়িয়াছে। 32. 6 বৎসর।
33. A 11 টাকা, B 38 টাকা, C 33 টাকা, D 32 টাকা, E 36 টাকা।

প্রশ্নমালা 101

7. 1. 8. 13. 10. $x=-1, y=2$.

11. -11 হইতে 1 পর্যন্ত. 13. 5 ; $-3{\cdot}5$. 15. (*i*) 24, -72 ;
(*ii*) $-\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}$; (*iii*) $\frac{4}{3}, -3$; (*iv*) $\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$.

16. 65 বর্গ একক। 17. $\frac{1}{12}$ বর্গ একক। 18. (*i*) $3x+5y=15$;
(*ii*) $x+2y=5$; (*iii*) $17x+11y+14=0$.

19. $x+y=2$. 20. $x=0, 1, 2, 3, 4$ হইলে, প্রথম অপেক্ষকটির মান যথাক্রমে 4, 2, 0, -2, -4 এবং দ্বিতীয় অপেক্ষকটির মান যথাক্রমে 13, 5, -3, -11, -19 হইবে ; $x=1{\cdot}5$.

প্রশ্নমালা 102

2. (*i*) 69 ; (*ii*) $7\frac{1}{3}$; (*iii*) $-\frac{3}{4}$.

3. $3{\cdot}76$; $4{\cdot}5$. 4. $\frac{63}{13}$. 5. $(-1, -1)$.

6. $15{\cdot}5$; $2{\cdot}57$. 8. $x=2, y=1$. 9. (*i*) $x=\frac{13}{7}$;
(*ii*) $x=3$; (*iii*) $x=-\frac{5}{6}$; (*iv*) $x=-4\frac{1}{5}$.

10. $(4, -1), (7, 2), (-13{\cdot}3, 16{\cdot}3)$. 11. 8 ; 1.

13. 448 টাকা। 14. $11\frac{1}{4}$ টাকা। 15. (*i*) 80 ;
(*ii*) 48. 16. $14{\cdot}5$ লিটার (স্থূলত) ; $4{\cdot}1$ গ্যালন (স্থূলত)।

17. 34 টা. 9 আ. $7\frac{1}{5}$ পা.

18. 4 টা. 13 আ. (স্থূলত) ; 17 টা. 2 আ. (স্থূলত) ; 108 টা. 3 আ. 6 পা. (স্থূলত) ; 73 দিন।

19. 10 টা. 6 আ. 8 পা. ; 6 টা. 8 আ.।

20. রাত্রি 1 টা 17 মি. (স্থূলত) ; রামের যাত্রাস্থান হইতে প্রায় 17 মাইল দূরে এবং হরির যাত্রাস্থান হইতে প্রায় 13 মাইল দূরে।

21. $8\frac{2}{3}$ সে. 23. 74 (প্রায়) ; 93 (প্রায়).

24. 2 টা $10\frac{10}{11}$ মি. এর সময়ে। 26. $11\frac{1}{2}$ বৎসর।

27. (*i*) এপ্রিল হইতে জুনের মধ্যে ; (*ii*) সেপ্টেম্বর এবং অক্টোবরের মধ্যে।

28. (*i*) 75 টাকা; (*ii*) $233\frac{1}{3}$ টাকা।

29. অপরাহ্ণ 12 টা 40 মি. হইতে অপরাহ্ণ 3 টা 30 মি. পর্যন্ত।

31. 1 টাকা 14 আনা ; 2 টাকা 12 আনা।

প্রশ্নমালা 103

1. $x=4, y=3$. 2. $x=-2, y=4$. 3. $x=2\cdot5, y=3\cdot5$.
4. $x=5\cdot6, y=2\cdot8$. 5. $x=-6\cdot3, y=-5\cdot7$, স্থূলতা।
6. $x=2, y=3$. 7. $x=8, y=5$. 8. $x=5, y=0$.
9. $x=3, y=1$. 10. $x=2$. 11. $x=-1\cdot6, y=1\cdot8$.
12. $x=2, y=2$. 13. $x=3, y=4$.

প্রশ্নমালা 104

1. (*i*) 3 : 4 ; (*ii*) 7 : 8 ; (*iii*) 22 : 35 ;
(*iv*) 9 : 14. 2. (*i*) $a : c$; (*ii*) 192 : 1375 ;
(*iii*) $a : b$; (*iv*) $b : a$; (*v*) 1 : 1.

3. $-\frac{ab}{a+b}$. 4. $(x+3):(x+5)$.

5. $(a^2-a-2):(a^2+a-2)$.

7. $x^3+y^3 : x^2+y^2$ অনুপাতটি বৃহত্তর।

9. 4 : 5. 10. 36 : 54. 11. 9.
12. 2. 13. 18.

প্রশ্নমালা 105

1. (*i*) 27 ; (*ii*) 84 ; (*iii*) $\frac{x^3}{y(x^2+y^2)}$.
2. (*i*) 6 ; (*ii*) 12 ; (*iii*) 18 ; (*iv*) 30.
3. (*i*) 60 ; (*ii*) 60 ; (*iii*) $\frac{1}{4}$.

প্রশ্নমালা 107

10. 1.

প্রশ্নমালা 108

1. 3. 2. 36, 63. 3. 3.
4. দ্বিতীয় দল। 5. 32 : 63. 6. 9 বৎসর এবং 4 বৎসর।
7. 3 জন। 8. প্রথম স্কুল। 9. 84.
10. 6, 9, 15. 11. 18, 24. 12. 136. 13. 395.

প্রশ্নমালা 109

25. 9 বৎসর।

বিবিধ প্রশ্নমালা V

I

1. $x=-1$. 2. (*i*) $(2x+3)(5x+7)$; (*ii*) $(2x+yz)(3x-yz)$.
4. $-27x^9y^6$, a^{3p}, 618. 5. 2টা. 4মি.; 20টা।

II

1. $x=a+b+c$. 2. 1500 টাকা।
3. $\dfrac{100(y-x)}{nx}$. 4. $\dfrac{4a}{a^2-x^2}$

III

1. $a=2, b=5$. 3. 12, 18, 30. 5. 253.

IV

1. $x=\dfrac{c(a+b)}{a}$, $y=\dfrac{c(a+b)}{b}$. 2. $6(x-1)$.
3. 25টি টাকা, 24টি আধুলি, 20টি সিকি। 5. 4, 10, 12, 14.

V

2. $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$.
3. x. 5. ঘণ্টায় 4 মাইল; 12 মাইল।

VI

1. $2n+1$, n একটি পূর্ণসংখ্যা। 2. A, 1500 টাকা; B, 3000 টাকা।
4. $x=\dfrac{(a+b+c)(b+c+2a)}{2}$ $y=\dfrac{(a+b+c)(c+a+2b)}{2}$
$z=\dfrac{(a+b+c)(a+b+2c)}{2}$

প্রশ্নমালা 110

1. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 4. 5. 32. 6. 16.
7. $\frac{1}{243}$. 8. 8. 9. $\frac{1}{8}$. 10. 72. 11. $\frac{1}{37600}$.
12. $\frac{1}{3}$. 13. $\frac{1}{2}$. 14. 9. 15. 1. 16. a^2.

17. $\frac{1}{x^2}$. 18. $\frac{1}{x^3}$. 19. x^{24}. 20. $\frac{1}{x^2}$.

21. $\sqrt[30]{x}$. 22. a. 23. a. 24. $\sqrt[4]{x^{17}}$.

25. x^{2abc}. 26. $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$. 27. $\frac{a}{x}$. 28. $\sqrt[60]{x^{133}}$.

29. 1. 30. 1. 31. $\sqrt[9]{x^2}$. $\sqrt[18]{y}$. 32. $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$. 33. 1.

34. $\frac{1}{a^3b^5c^7}$. 35. $\sqrt[12]{\left(\frac{a}{x}\right)^{23}}$. 36. 1. 37. 1.

38. $\sqrt{a^2-b^2}$. 39. 1. 40. xyz. 41. 1.

42. $\frac{1}{80}$. 43. $\sqrt[3]{xy}$. 44. 1. 45. 1. 46. 1.

47. 1. 48. $\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ 49. 1. 50. 1.

51. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$

প্রশ্নমালা 111

1. $a+b$. 2. $x^{\frac{9}{8}}-3x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{3}{8}}-1$.

3. $x^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{2}{3}}+1$.

4. $a^{-6}+b^{-6}$. 5. $ax^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}x-a^{\frac{1}{2}}x^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}$.

6. $x^{-1}+y^{-1}$. 7. $x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}$. 8. $x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$.

9. $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$. 10. $2a^n+5a^{-2n}$.

11. $3x^{\frac{1}{3}}-2$. 12. $4x^{\frac{1}{3}}-5$. 13. $x^{-1}+5$.

14. $x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}$.

15. $(x^{-1}-a^{-3})^2(x^{-1}-3a^{-3})(3x^{-1}-7a^{-3})$.

16. $\left(x^{\frac{1}{4}}+2\right)\left(2x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(3x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(4x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+1\right)$.

17. $\left(x^{-\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{8}}\right)\left(x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}\right)$.

18. $\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)^2$. 19. $\left(a^{\frac{1}{3}}+7\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+8\right)$.

20. $\left(x^{-\frac{3}{8}}-8\right)\left(x^{-\frac{3}{8}}-9\right)$.

21. $\left(a^{-\frac{5}{6}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{5}{6}}-4x^{\frac{2}{3}}\right)$.

22. $-\left(a^{-\frac{1}{5}}-b\right)\left(b-c^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)$.

23. $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2$.

24. $(a^{-1}+b+x^{-2}+y^{-3})(a^{-1}+b-x^{-2}-y^{-3})$
$(x^{-2}-y^{-3}+a^{-1}-b)(x^{-2}-y^{-3}-a^{-1}+b)$.

25. $\left(2x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{5}}\right)\left(2x^{\frac{1}{5}}-y^{-\frac{1}{5}}\right)\left(3x^{\frac{2}{5}}+y^{-\frac{2}{5}}\right)$.

26. $a^{-2}+2a^{-1}x^{-1}+x^{-2}$. 27. $a^{-1}+2+a$.

28. $a^2+2a+3+2a^{-1}+a^{-2}$.

29. $a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}$. 30. a^n-x^{-n}.

31. $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$. 32. 1.

33. $\dfrac{x^{-1}y^{\frac{1}{3}}}{x^{-2}+y^{\frac{2}{3}}}$. 34. $x^{-2n}+2$.

35. $\dfrac{4x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}$. 40. $x+y$; 6.

প্রশ্নমালা 112

1. $x=2$. 2. $x=5$. 3. $x=3$. 4. $x=3$.
5. $x=1$. 6. $x=4$. 7. $x=2$. 8. $x=1$.
9. $x=2$. 10. $x=3$. 11. $x=a+1$. 12. $x=\frac{3}{2}$.
13. $x=2, y=3$. 14. $x=2, y=-3$. 15. $x=3, y=3$.
16. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. 17. $x=2, y=3$. 18. $x=y=2$.
19. $x=-4, y=-2$. 20. $x=3, y=1$. 21. $x=y=1$.
22. $x=y=1$. 23. $x=1, y=2, z=3$.

24. $x=y=z=0$. 25. $x=3, y=2, z=1$.

26. $x=y=z=\frac{a}{3}$. 27. $x=1, y=3, z=0$.

প্রশ্নমালা 113

1. $3a^3b$.
2. $4x^2y^3z^4$.
3. $8x^2yz^5$.
4. $\frac{3xy^2}{4a^2b^3}$.
5. $\frac{6a^4m^{\frac{7}{2}}}{5b^{\frac{5}{2}}n^3}$.
6. $\frac{\sqrt{7}b^{\frac{5}{2}}y^2}{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}x}$.
7. $\frac{3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}}$.
8. $\frac{2a^{\frac{3}{2}}b^3}{3xy^2}$.
9. $\frac{2ab^2}{3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$.
10. $2abc$.
11. $3xy^2z^{\frac{2}{3}}p^{\frac{2}{3}}q$.
12. $2p^{\frac{3}{4}}q^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.
13. $3a^2b^3c^4d^5$.
14. $x^2y^3z^4$.
15. $a^2b^3c^{-1}x^{-4}$.

প্রশ্নগালা 114

1. $2(a-10b)$.
2. $3x-25y$.
3. $3a^2b^2-5a^3b^3$.
4. $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{3}b^3$.
5. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.
6. $\frac{1}{3}a^2b^4+\frac{1}{4}a^3b^3$.
7. $x+y+z$.
8. $x+y-z$.
9. $2x-y-z$.
10. $3a^2+2b^2-5c^2$.
11. $x^{-2}+3y^{-2}$.
12. $x+\frac{1}{x}-1$.
13. $x^{\frac{1}{3}}-2y^{\frac{1}{3}}$.
14. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1$.
15. $\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+1$.
16. $x-2-\frac{1}{x}$.
17. $a-7-\frac{1}{2a}$.
18. $x^2+2-\frac{1}{x^2}$.
19. $x-2+\frac{1}{x}$.
20. x^2+5x+5.
21. $4x^2-16x+11$.
22. $a^2b(a-b)+1$.
23. $x^{-5}+x^{-4}+1$.
24. $ax-by+cz$.
25. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{1}{2}$.
26. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$.
27. $(x+1)(x+7)(2x-3)$.

প্রশ্নমালা 115

1. $a+b-c$. 2. $a-b+c$. 3. $x-y-z$.
4. x^2+x+1. 5. x^2-x+1. 6. $ax-by+cz$.
7. $3a+4b-c$. 8. $a-b+2c$. 9. $2x^2-3x+1$.
10. $3x^2-5x-2$. 11. $3x^2-x-2$. 12. x^3+x+4.
13. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+1$. 14. $x+1+\frac{1}{x}$. 15. $2x-1+\frac{2}{x}$.
16. $\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+1$. 17. $x^{\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{2}}$. 18. $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}+1$.
19. a^m+a^{-n}. 20. $2x^{-2}+3y^{-3}+1$.
21. $ax^{-2}+by^{-3}+cz^{-4}$. 22. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
23. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$. 24. $\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.
25. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+1$. 26. $a-b+c-d$.
27. $2x-3y+4z+u$. 28. $a^2-b^2+c^2-d^2$.
29. $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$. 30. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

প্রশ্নমালা 116

1. $1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$. 2. $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$.
3. $1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{3x^3}{16}$. 4. $1-\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}$.
6. 1. 7. 3.
8. $\frac{1}{3}$. 10. 6.
12. $ax+by+cz$. 14. 7.

প্রশ্নমালা 117

1. (*ii*), (*v*) এবং (*vi*) এর রাশিসমূহ প্রকৃত করণী।
2. অতিপূরক $-\sqrt{2}$, একটি অমেয় রাশি।

4. দূরত্ব $= \sqrt{14}$ ফুট, একটি অমেয় রাশি।

6. $\sqrt{24}$. 7. $\sqrt{90}$. 8. $\sqrt[3]{13824}$.

9. $\sqrt[5]{x^{10}y}$. 10. $\sqrt[3]{8a^3xy}$.

11. $\sqrt[4]{625a^{12}b^3}$. 12. $3\sqrt{3}$.

13. $5\sqrt{14}$. 14. $3\sqrt[3]{10}$.

15. $2\sqrt[3]{10}$. 16. $2\sqrt[4]{7}$.

17. $3\sqrt[5]{2}$. 18. $x^2\sqrt[3]{y}$.

19. $-xy^2\sqrt[5]{x^2}$. 20. x^2y.

প্রশ্নমালা 118

1. $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{16}$. 2. $\sqrt[15]{3125}$, $\sqrt[15]{27}$.

3. $\sqrt[12]{125}$, $\sqrt[12]{4}$. 4. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{7}$.

5. $\sqrt{3}$ বৃহত্তর। 6. $\sqrt[3]{4}$ বৃহত্তর।

7. $\sqrt{3}$ বৃহত্তর। 8. $\sqrt[3]{3}$ বৃহত্তর।

প্রশ্নমালা 119

1. $-2\sqrt{5}$. 2. 0. 3. $11\sqrt{2}$.

4. $14\sqrt{3}$. 5. 0. 6. $12\sqrt{2}$.

7. $4\sqrt{3}$. 8. $10\sqrt{2}$. 9. $3\sqrt[3]{3}$.

10. $14\sqrt[3]{2}$. 11. $x\sqrt{x}(6+5x+8x^2)$.

12. $\sqrt{3x}(2x-3y+4x)$. 13. $\sqrt[3]{4x}(a^2-4b^2+5c^2)$.

প্রশ্নমালা 120

1. $\sqrt{6}$. 2. $5\sqrt{6}$. 3. $3\sqrt{42}$.

4. $\sqrt[3]{6}$. 5. $\sqrt[4]{21}$. 6. $\sqrt[6]{108}$.

7. 40. 8. $15\sqrt{15}$. 9. $\sqrt[12]{87808}$.

10. $\sqrt[6]{648}$. 11. $\sqrt[3]{625}$. 12. $9\sqrt[3]{20}$.
13. $4\sqrt[4]{105}$. 14. $\sqrt[12]{3456}$. 15. $\sqrt[6]{18}$.
16. $\sqrt[12]{108}$. 17. $\sqrt[10]{36}$. 18. $\sqrt[6]{108}$.
19. $\sqrt{30}$. 20. $2\sqrt[12]{2}$. 21. 3.
22. $6\sqrt[6]{72}$. 23. $x^3\sqrt{abc}$. 24. $6ab\sqrt[3]{x^2}$.
25. $2abc$. 26. $2-\sqrt{2}$. 27. $3+\sqrt{6}$.
28. 2. 29. -7.
30. $3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$. 31. 3.
32. $x-y$. 33. $2x+5\sqrt{x}+3$. 34. $2a+3x+5\sqrt{ax}$.
35. $2(1+\sqrt{3})$. 36. $2\sqrt{42}-8$. 37. $x-y-z+2\sqrt{yz}$.
38. $6\sqrt{xy}-8\sqrt{xz}+12\sqrt{yz}-9y$.
39. $1-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{6}$. 40. $2+\sqrt{15}+\sqrt[6]{432}+\sqrt[6]{500}$.
41. $5-2\sqrt{6}$. 42. $30-12\sqrt{6}$.
43. $392+96\sqrt{10}$. 44. $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.
45. $2x-1+2\sqrt{x^2-x}$. 46. $2a-2\sqrt{a^2-1}$.
47. $a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$.
48. $13x^2+30-12\sqrt{x^4+5x^2+6}$.
49. $a\sqrt{a}+a\sqrt{a-x}+\sqrt{a^2+ax}+\sqrt{a^2-x^2}$.
50. $6+\sqrt{10}$. 51. $2a^2b^2x^2-(a^2+b^2)$.

প্রশ্নমালা 121

1. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. 2. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$. 3. $\frac{2}{3}\sqrt{21}$.
4. $\frac{3}{14}\sqrt{35}$. 5. $\frac{1}{3}\sqrt[6]{432}$. 6. $\frac{1}{2}\sqrt[12]{131072}$.
7. $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 8. $\frac{1}{5}(\sqrt{15}+\sqrt{10}.)$ 9. $\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{42}$.
10. $2\sqrt{10}+\frac{5}{2}\sqrt{6}$. 11. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
12. $\frac{4}{21}\sqrt{21}$. 13. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{6}+\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{15}-\frac{2}{3}\sqrt{21}$.
15. $-\frac{1}{7}(11+6\sqrt{2})$.
16. $\frac{1}{13}(19+8\sqrt{3})$.
17. $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.
18. $\dfrac{x^2+z+2x\sqrt{z}+x\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{x^2-z}$.
19. $\frac{1}{2}(13+3\sqrt{15})$.
20. $15+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{6}$.
21. $a+\sqrt{a^2-1}$.
22. $\dfrac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$.
23. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.
24. $\dfrac{2\sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2}$.
25. $\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$.
26. $5-2\sqrt{6}$.
27. $\frac{1}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-3)$.
28. $\dfrac{1}{1-x^2}$.
29 $\dfrac{2\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}$.
30. (*i*) 9·560 ; (*ii*) 2·053.

প্রশ্নমালা 122

1. $\sqrt{2}-1$.
2. $3-\sqrt{2}$.
3. $\sqrt{3}-1$.
4. $\sqrt{5}-2$.
5. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
6. $\sqrt{8}-\sqrt{5}$.
7. $6-\sqrt{3}$.
8. $3-\sqrt{5}$.
9. $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
10. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.
11. $\sqrt{6}-1$.
12. $4-\sqrt{3}$.
13. $\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$.
14. $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$.
15. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$.
16. $\sqrt{a}+\sqrt{a-b}$.
17. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.
18. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}\right)$.
19. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$.
20. $\sqrt{x}-\sqrt{3y}+2$.
21. $2+\sqrt{3}$.
22. 8.
23. $\sqrt{2}$.
25. $\sqrt{x+y}+\sqrt{x}$.

26. $\frac{16}{7}$.

27. $\pm\dfrac{a^2-b^2}{2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$.

28. 3.

প্রশ্নমালা 123

1. $\sqrt{\dfrac{2a+b}{2}}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}$.

2. $1+2^{\frac{3}{4}}+2\cdot 2^{\frac{1}{2}}-3\cdot 2^{\frac{1}{4}}$.

3. 2702.

5. $n(n-1)$.

6. $4-a$.

7. $x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)$.

10. $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11. $\dfrac{4}{2x-7}$.

15. $\dfrac{x}{2}$.

প্রশ্নমালা 124

1. $x=1$.
2. $x=8$.
3. $x=\frac{2}{5}$.
4. $x=25$.
5. $x=3\frac{19}{27}$.
6. $x=-3$.
7. $x=-\frac{25}{2}$.
8. $x=-1$.
9. $x=10$.
10. $x=\frac{1}{2}$.
11. $x=-1$.
12. $x=4$.
13. $x=\dfrac{1}{a}\left\{\left(\dfrac{d^2+c-b}{2d}\right)^2-c\right\}$.
14. $x=7$.
15. $x=\dfrac{17a}{8}$.
16. $x=25$.
17. $x=\dfrac{81}{a}$.
18. $x=\frac{9}{8}$.
19. $x=\frac{5}{8}$.
20. $x=\dfrac{a(a-1)}{a+1}$.
21. $x=1$.
22. $x=9$.
23. $x=5$.
24. $x=-\frac{11}{6}$.
25. $x=\dfrac{ab}{a+b}$.
26. $x=\dfrac{2a^2-2ab+{}^2}{2(b-a)}$.

27. $x = 30.$ 28. $x = \frac{5}{8}.$

29. $x = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$ 30. $x = (ab+bc+ca)^2.$

31. $x = \frac{1}{1+a}.$ 32. $x = -(a+b).$

33. $x = \frac{ac^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}} - c^{\frac{4}{5}}}.$ 34. $x = -a.$

প্রশ্নমালা 125

1. $x = \pm 3.$ 2. $x = \pm 5.$ 3. $x = \pm 2\sqrt{2}.$
4. $x = \pm 4.$ 5. $x = \pm \sqrt{\frac{41}{13}}.$ 6. $x = \pm \sqrt{7}.$
7. $x = \pm \sqrt{7}.$ 8. $\pm \sqrt{(\frac{77}{31})}.$ 9. $x = \pm \sqrt{(\frac{7}{2})}.$
10. $x = \pm \sqrt{2}.$ 11. $x = \pm 2.$ 12. $x = \pm 3.$
13. $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, 0.$ 14. $x = \pm \sqrt{(\frac{13}{5})}.$ 15. $x = \pm 7.$
16. $x = \pm 5.$

প্রশ্নমালা 126

1. $x = 3$ বা $2.$ 2. $x = 4$ বা $3.$ 3. $x = -2$ বা $1.$
4. $x = -5$ বা $-2.$ 5. $x = 6$ বা $-7.$ 6. $x = \frac{1}{3}$ বা $\frac{1}{4}.$
7. $x = -\frac{1}{2}$ বা $-\frac{2}{5}.$ 8. $x = \cdot 5$ বা $\cdot 3.$ 9. $x = a$ বা $b.$
10. $x = a^2$ বা $b^2.$ 11. $x = 3a+3$ বা $3a+2.$
12. $x = 2a-b$ বা $-a+b.$ 13. $x = 3$ বা $\frac{2}{3}.$
14. $x = 3$ বা $-4.$ 15. $x = 4$ বা $-2\frac{1}{4}.$ 16. $x = \pm 8.$

প্রশ্নমালা 127

1. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$ 2. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

3. $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$ 4. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

5. $x = 2, 3.$ 6. $x = \frac{1}{3}, -1.$ 7. $x = 2, \frac{2}{3}.$
8. $x = \frac{2}{5}, -7.$ 9. $x = -1 \pm \sqrt{2}.$ 10. $x = 2, \frac{1}{3}.$

11. $x=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{22})$. 12. $x=1, -\frac{5}{3}$. 13. $x=\frac{1}{7}(3\pm\sqrt{2})$.
14. $x=\frac{45}{47}, -\frac{1}{3}$. 15. $x=\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}$. 16. $x=-\frac{5}{3}, \frac{35}{4}$.
17. $x=\frac{1}{13}(7\pm2\sqrt{61})$. 18. $x=31, 110$.
19. $x=-17\frac{4}{7}, 44\frac{3}{5}$. 20. $x=0, 1$.
21. $x=\frac{7}{3}, 2$. 22. $x=\frac{23}{17}, \frac{4}{3}$. 23. $x=\frac{13}{18}, \frac{19}{23}$.
24. $\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{65})$. 25. $x=1, \frac{b}{a}$. 26. $x=\frac{1}{6}(9\pm\sqrt{21})$.
27. $x=\frac{5}{a}, -\frac{1}{a}$. 28. $x=1, \frac{2}{5}$.
29. $x=\frac{1}{6}(-m\pm\sqrt{m^2+12n})$. 30. $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$.
31. $x=\frac{5}{2}, -2$. 32. $x=2, 1$. 33. $x=-1, -\frac{1}{6}$.
34. $x=\frac{1}{3}(-5\pm\sqrt{58})$. 35. $x=\frac{1}{7}(-1\pm\sqrt{862})$.

প্রশ্নমালা 128

1. $x=7, 5$. 2. $x=8, 4$. 3. $x=3, -\frac{11}{7}$.
4. $x=5, -4\frac{1}{3}$. 5. $x=7, 4\frac{4}{13}$. 6. $x=-2\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$.
7. $x=1, 2\frac{371}{3923}$. 8. $x=b, \frac{a^2}{b}$.
9. $x=0, \frac{2ab-ac-bc}{a+b-2c}$.
10. $x=a+b, \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2ab}$. 11. $x=\frac{29}{14}, \frac{13}{14}$.
12. $x=\frac{211}{35}, \frac{174}{35}$. 13. $x=\frac{65}{33}, \frac{166}{33}$.
14. $x=c, -c$. 15. $x=0, \pm\sqrt{ab}$.
16. $x=0, a+b$. 17. $x=-a, -b$.
18. $x=2a, \frac{2}{5}a$. 19. $x=1$.
20. $x=2$.

প্রশ্নমালা 129

15. $x^2-8x+15=0$. 16. $2x^2+39x-68=0$.
17. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$. 18. $x^2-2x-1=0$.

19. $x^2+12x+117=0.$

20. $qx^2+px+1=0.$

21. $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$

22. $qx^2-(p^2-2q)x+q=0.$

23. $\dfrac{3abc-b^3}{a^3}.$

প্রশ্নমালা 130

1. $x=27, 64.$
2. $x=1, 4\sqrt{2}.$
3. $x=\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3}.$
4. $x=125, -216.$
5. $x=\pm 4, \pm 1.$
6. $x=1, 3.$
7. $x=\pm 1, \pm 2.$
8. $x=1, 2, \pm 3.$
9. $x=2, 3, \pm 5.$
10. $x=0, 3, \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{73}).$
11. $x=1, -5, -2\pm 2\sqrt{2}$
12. $x=\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}(3\pm i\sqrt{7}).$
13. $x=0.$
14. $x=\pm 1.$
15. $x=\dfrac{a}{2}\left\{-5\pm\sqrt{5\pm 4\sqrt{2}}\right\}.$

প্রশ্নমালা 131

1. $x=1, y=1$; $x=\frac{7}{5}, y=-\frac{1}{5}.$
2. $x=1, y=3$; $x=14\frac{3}{5}, y=-\frac{2}{5}.$
3. $x=4, y=1$; $x=6, y=\frac{7}{3}.$
4. $x=2, y=1$; $x=14, y=-29.$
5. $x=3, y=5$; $x=5, y=3.$
6. $x=5, y=4$; $x=-4, y=-5.$
7. $x=3, y=7$; $x=7, y=3.$
8. $\left.\begin{array}{l} x=4, y=1 \text{ ; } x=1, y=4 \text{ ;} \\ x=-1, y=-4 \text{ ; } x=-4, y=-1 \end{array}\right\}.$
9. $x=8, y=5$; $x=-5, y=-8.$
10. $x=4, y=3$; $x=1, y=12.$
11. $x=3, y=4, z=5$; $x=-3, y=-4, z=-5.$
12. $x=1, y=3, z=5$; $x=-1, y=-3, z=-5.$
13. $x=1, y=2, z=4$; $x=-1, y=-2, z=-4.$

14. $x=3, y=2, z=1$; $x=-3, y=-2, z=-1$.
15. $x=2, y=5, z=1$; $x=-12, y=-15, z-11$.
16. $x=1, y=2, z=3$; $x=-1, y=-2, z=-3$.

প্রশ্নমালা 132

1. 7, 5. 2. 9, 8. 3. 15, 7. 4. 6 বা −5.
5. 7, 4 ; অথবা −7, −4. 6. 6, 7, 8 ; অথবা −6, −7, −8.
7. দৈর্ঘ্য 60 গজ, বিস্তার 45 গজ। 8. 20. 9. 40 টা.
10. 289. 11. দৈর্ঘ্য 50 গজ, প্রস্থ 40 গজ।
12. 20 জন পুরুষ, 16 জন স্ত্রীলোক ; অথবা 16 জন পুরুষ, 20 জন স্ত্রীলোক।
13. পুস্তকের প্রথমার্ধ পড়িবার বেগ ঘণ্টায় 25 পাতা। 14. 43.
15. A, 20 মিনিটে ; B, 12 মিনিটে।

প্রশ্নমালা 134

26. 2·8 (স্থূলত)। 27. 3·3 (স্থূলত)।
28. 3·6 (স্থূলত)। 29. 4·1 (স্থূলত)।

প্রশ্নমালা 135

1. $x=\cdot 6, -1\cdot 6$ (স্থূলত)। 2. $x=4\cdot 2, -\cdot 2$, (স্থূলত)।
3. $x=5, -1$. 4. $x=4\cdot 5, -1\cdot 5$ (স্থূলত)।
5. $x=3, -1$. 6. $x=6\cdot 37, \cdot 63$ (স্থূলত)।
7. $x=\cdot 41, -2\cdot 41$ (স্থূলত)। 8. $x=1, -\frac{1}{3}$.
9. $x=1\cdot 15, -\cdot 65$ (স্থূলত)। 10. $x=\cdot 36, -\cdot 56$ (স্থূলত)।
11. $x=\cdot 3, -\cdot 6$ (স্থূলত)। 12. $x=\cdot 14, -7\cdot 14$ (স্থূলত)।
13. $\left.\begin{array}{l} x=4, y=3 \\ x=3, y=4 \end{array}\right\}$. 14. $\left.\begin{array}{l} x=3\cdot 5, y=4\cdot 8; \\ x=-3, y=-5 \end{array}\right\}$ (স্থূলত)।
15. $\left.\begin{array}{l} x=12, y=5; \\ x=3\cdot 2, y=12\cdot 6 \end{array}\right\}$ (স্থূলত)। 16. $\left.\begin{array}{l} x=3\cdot 3, y=2\cdot 3; \\ x=-2\cdot 3, y=-3\cdot 3 \end{array}\right\}$ (স্থূলত)
17. $\left.\begin{array}{l} x=2, y=1; \\ x=1\frac{1}{7}, y=\frac{11}{7} \end{array}\right\}$ 18. $\left.\begin{array}{l} x=3, y=2; \\ x=-2, y=-3 \end{array}\right\}$
19. $\left.\begin{array}{l} x=1, y=1; \\ x=2\frac{8}{17}, y=\frac{13}{17} \end{array}\right\}$
20. $x=1$; $y=1$; $x=-1$, $y=-1$; $x=2$, $y=\frac{1}{2}$; $x=-2$, $y=-\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 136

1. $21, 36.$ 2. $50, 85.$

3. $-5\frac{1}{2}, -10\frac{1}{2}.$ 4. $38x, 68x.$

5. $-31a, -56a.$ 6. $a+6, a+11.$

7. $2a-11b, 2a-21b.$ 8. $a-11x, a-21x.$

9. $6n.$ 10. $12-4n.$

11. $(-7n+13)a.$ 12. $na-(4n-5)b.$

13. প্রথম পদ 4, সাধারণ অন্তর 3. 14. প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর b.

15. প্রথম পদ $2a$, সাধারণ অন্তর $a-b$.

16. প্রথম পদ $\frac{3}{2}$, সাধারণ অন্তর $-\frac{1}{2}$.

17. প্রথম পদ $(a+b)$, সাধারণ অন্তর $a-b$.

18. $7n-3.$ 19. $-7n+37.$ 20. 11. 21. 610.

প্রশ্নমালা 137

1. -25 ; $8\frac{1}{2}.$ 2. a ; $a^2+b^2.$ 3. $a+x, a+2x.$

4. $-6, -19.$ 5. $4\frac{1}{2}, 6, 7\frac{1}{2}, 9.$ 6. 4. 7. 5.

8. $\frac{1}{5}(4x+y)$, $\frac{1}{5}(3x+2y)$, $\frac{1}{5}(2x+3y)$, $\frac{1}{5}(x+4y)$.

9. সাধারণ অন্তর $\frac{2x}{x+1}=d$ ধরিয়া, মধ্যকগুলি $x+d$, $x+2d$, $x+3d, \cdots 3x-d$.

প্রশ্নমালা 138

1. 65. 2. 300. 3. $-345.$

4. $6\sqrt{3}-45.$ 5. $11a-55b.$ 6. $3(7a-8x).$

7. 129. 8. $\frac{1}{2}n(3n-1).$ 9. $n\left(1-\frac{n}{a}\right).$

10. 20. 11. 15. 12. 6.

13. 2828. 14. 4437. 15. 2542.

16. 5. 17. 10. 18. -15 ; $-60.$

19. 4. 20. $-5.$ 21. 705.

22. $\frac{b^2-a^2}{2S-(l+a)}.$ 23. 7. 24. 5.

25. $\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2, \frac{13}{5}, \cdots$; 285.

প্রশ্নমালা 139

1. $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.
2. $n(16n^3-16n^2-2n+3)$.
3. $\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$.
4. $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$.
5. $\frac{1}{3}n(16n^2+12n-1)$.
6. $\frac{1}{6}n(50n^2-45n+1)$.
7. $8n^2(2n^2-1)$.
8. $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+9n+22)$.
9. $\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+n-1)$.
10. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)$.
11. $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$.
12. $\frac{1}{3}n(4n^2+18n-1)$.
13. $\frac{n}{n+1}$.
14. $\frac{n}{3(5n+3)}$.
15. $\frac{1}{2}n(n^2-n+2)$.
16. $\frac{1}{6}n(7n^2-9n+8)$.
17. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
18. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
19. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.
20. $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$.
21. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

প্রশ্নমালা 140

6. 8, 14, 20.
7. 5, 19, 33, 47.
8. 5, 7, 9.
10. প্রথম পদ 1, সাধারণ অন্তর 6.
13. 4, 9, 14 ; বা 14, 9, 4.
14. 3, 8, 13 ; বা 13, 8, 3.
15. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.
17. 45°, 60°, 75°.
18. 60°, 80°, 100°, 120°.
19. 24300 টাকা।
20. 16.
21. 5 পা. 3 শি. ; 135 পা. 4 শি.
22. 10 মাসে।

প্রশ্নমালা 141

1. 64.
2. $\frac{1}{32}$.
3. ax^{14}.
4. -243.
5. 768.
6. 2916.
7. ষষ্ঠ পদ।
8. সপ্তম পদ।
9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2n-3}{2}}$
10. [illegible]

প্রশ্নমালা 142

1. $\pm 81.$ 2. $\pm 30.$ 3. $\pm(a^2-b^2).$

4. $\frac{1}{2}, 1, 2 ;\ -\frac{1}{2}, 1, -2.$

5. $-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, -9 ;\ \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9.$

6. 15, 45, 135, 405.

7. 25, 225, 2025, 18225, 164025··· ; 25, −225, 2025, −18225, 164025···.

8. 15, 45. 11. 27, 3.

প্রশ্নমালা 143

1. 255. 2. 364. 3. $1\frac{15}{16}.$

4. $\frac{182}{243}.$ 5. 189. 6. $\frac{1}{2}(3^n-1).$

7. $\frac{3^{\frac{n}{2}}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}.$ 8. $\frac{a(1-b^n)}{b^{n-1}(1-b)}.$ 9. $\frac{7(4^n-3^n)}{3^{n-1}}.$

10. $4\frac{3280}{6561}.$ 11. 1055.

12. 262143 টা. 15 আ. 3 পয়সা।

প্রশ্নমালা 144

1. 2. 2. $\frac{2}{3}.$ 3. 2. 4. 112.

5. $2\frac{2}{3}.$ 6. $-\frac{5}{12}.$ 7. $1\frac{1}{4}.$ 8. $\frac{1}{1-a}.$

9. $\frac{5}{4}\sqrt{5}.$ 10. $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3}).$ 13. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$

14. 3. 16. (1) $\frac{4}{9}$; (2) $\frac{16}{45}$;

(3) $\frac{358}{900}$; (4) $\frac{324}{99}$; (5) $\frac{563}{90}$; (6) $\frac{122}{99}.$

প্রশ্নমালা 145

2. $ar^{\frac{n-2}{2}}, ar^{\frac{n}{2}}$ (a প্রথমপদ এবং r সাধারণ অনুপাত)।

9. 7, 21, 63. 10. 2, 6, 18. 11. 1, 2, 4.

12. 12, 3. 19. $2^{n+1}-n-2.$

20. $\frac{4}{9}(4^n-1)-\frac{1}{3}n.$ 21. $\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}(3^n-1).$

22. $2^{n+1}+3n-2.$ 23. $\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{(1-x)}.$

24. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$. 25. $\dfrac{1+2x}{(1-x)^2}$.

26. $1\frac{7}{8}$. 27. $\frac{7}{16}$.

28. $\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{bx}{(1-x)^2}$. 29. $\dfrac{1+10x}{(1-2x)^2}$.

30. $\dfrac{1-9x}{(1+3x)^2}$. 31. $\dfrac{20}{81}\left(10^n-1\right)-\dfrac{2n}{9}$.

32. $\dfrac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\dfrac{5n}{9}$ 33. $\dfrac{7n}{9}-\dfrac{7}{81}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$.

36. 167772[illegible] টা. 9 আ. 2 পয়সা, 6 কড়ি।

প্রশ্নমালা 146

1. $m=2, n=3$; বা $m=-3, n=-2$. 2. $A=2, B=3, C=4$.

3. 3. 4. 1.

5. 49.

প্রশ্নমালা 147

8. $x=-2a, y=0$.

প্রশ্নমালা 148

17. (i) $\frac{162}{8}$; (ii) $\frac{25}{8}$.

18. (i) 1; (ii) 1.

প্রশ্নমালা 149

1. $a_1b_2-a_2b_1$. 2. $a_1b_2^2-a_2b_1b_2+c_1a_2^2=0$.

3. $-a_1c_1^3+a_2b_1c_1^2-a_3b_1^2c_1+a_4b_1^3=0$.

4. $(r^2-s+p)(s^2-ps+qr)=(q+rs)^2$.

5. $pq=1$.

6. $(mp-nq)(np-mq)=(p^2-q^2)^2$.

7. $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$.

8. $l^3-3lm+2n=0$.